Η ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Η διδιάστατη κυματική εξίσωση αναφέρεται στις δονήσεις μιας ορθογώνιας μεμβράνης και έχει τη μορφή

$$u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}).$$

Η γενική μορφή του ΠΑΣΤ για την κυματική εξίσωση δύο διαστάσεων είναι:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}), \quad 0<x<\ell,\ 0<y<m,\ t>0 \quad (1)$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0<x<\ell,\ 0<y<m, \quad (2)$$

$$u_t(x,y,0) = 0, \quad 0<x<\ell,\ 0<y<m, \quad (3)$$

$$u(x,0,t) = 0, \quad 0<x<\ell,\ t>0, \quad (4)$$

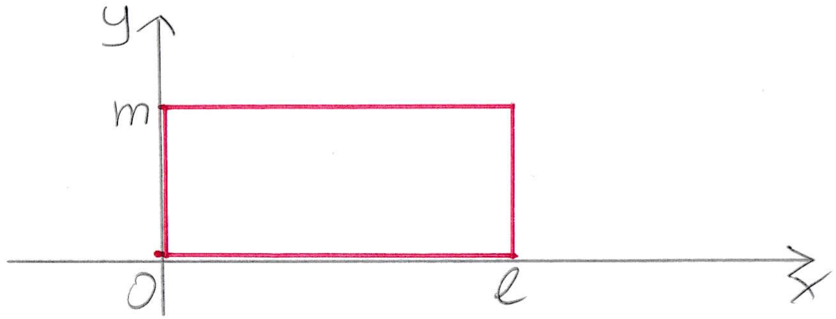
$$u(x,m,t) = 0, \quad 0<x<\ell,\ t>0, \quad (5)$$

$$u(0,y,t) = 0, \quad 0<y<m,\ t>0, \quad (6)$$

$$u(\ell,y,t) = 0, \quad 0<y<m,\ t>0, \quad (7)$$

Θα λύσουμε το ΠΑΣΤ (1)-(7) στον ορθογώνιο χώρο

$$R=\{(x,y)\mid (x,y)\in(0,\ell)\times(0,m)\}$$



εφαρμόζοντας τη μέθοδο του "χωρισμού των μεταβλητών" και χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη Θεωρία των "Σειρών Fourier".

Για το λόγο αυτό, θέτουμε

$$u(x,y,z)=X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t)$$

στην εξίσωση (1). Τότε η (1) θα πάρει τη μορφή

$$XYT''=c^2(X''YT+XY''T) \quad \text{ή}$$

$$\frac{T''}{T}=c^2\left(\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}\right) \quad \text{ή}$$

$$\frac{T''}{c^2T}-\frac{Y''}{Y}=\frac{X''}{X}=\lambda$$

Οπότε από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad (8)$$

και

$$\frac{T''}{c^2 T} - \lambda = \frac{Y''}{Y} = \mu$$

και επομένως

$$Y'' - \mu Y = 0 \qquad (9)$$

και

$$T'' - c^2(\lambda+\mu) T = 0. \qquad (10)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες (6) και (7) προκύπτουν οι

$$X(0) = X(\ell) = 0.$$

Οι συνθήκες αυτές μαζί με τη ΔΕ (8) συνθέτουν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών το οποίο έχει λύση

$$X(x) = c_2 \cos\sqrt{-\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\, x.$$

και εφαρμόζοντας τις συνθήκες $X(0) = X(\ell) = 0$ βρίσκουμε

$X(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

$X(\ell)=0 \Rightarrow c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\cdot\ell = 0$

$\Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\cdot\ell=0$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda}\cdot\ell = n\pi$

Άρα

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \quad n=1,2,\dots$$

και

$$X_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (11)$$

$n=1,2,\dots$

Ομοίως από την εξίσωση (9) και τις συνθήκες

$$Y(0)=Y(\ell)=0$$

βρίσκουμε

$$\mu_k = -\frac{k^2\pi^2}{m^2}, \quad k=1,2,\dots$$

και

$$Y_k(y) = B_k \sin\frac{k\pi}{m}y, \quad (12)$$

$k=1,2,\dots$

Επίσης η ΔΕ (10) παίρνει πλέον τη μορφή

$$T'' + c^2\left(\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}\right)\pi^2 T = 0$$

η οποία έχει λύση

$$T = C\cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right) + D\sin\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right).$$

Από την αρχική συνθήκη (3), έχουμε $T'(0)=0$ και συνεπώς

$$D=0.$$

Άρα

$$T_{nk} = C_{nk}\cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right) \qquad (13)$$

Από τις (11), (12), και (13) καταλήγουμε στη λύση

$$u_{nk} = K_{nk} \sin\frac{n\pi}{\ell}x \, \sin\frac{k\pi}{m}y \, \cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right)$$

η οποία επαληθεύει τη ΔΕ (1) και τις ομογενείς συνθήκες (3) – (7).

Σύμφωνα με την "αρχή της υπερθέσεως" αν $u_1, u_2, \ldots, u_m$ είναι λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$, όπου $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ θα είναι επίσης λύση της ΔΕ αυτής. Για το λόγο αυτόν καταλήγουμε στη λύση

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} K_{nk} \sin\frac{n\pi}{\ell}x \cdot \sin\frac{k\pi}{m}y \, \cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{k^2}{m^2}}\,\pi t\right) \quad (14)T$$

Η λύση αυτή επίσης θα ικανοποιεί και τη συνθήκη (2), δηλ.

$$u(x,y,0) = f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} K_{nk} \sin\frac{n\pi}{\ell}x \cdot \sin\frac{k\pi}{m}y$$

η οποία αποτελεί διπλό ανάπτυγμα Fourier στο ορθογώνιο R, όποτε σύμφωνα με τη θεωρία σειρών Fourier K_{nk} δίνονται από τον τύπο

$$K_{nk} = \frac{4}{\ell m}\int_0^{\ell}\int_0^{m} f(x,y)\cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}x \cdot \sin\frac{k\pi}{m}y \, dx\, dy \quad (15)T$$

Εν κατακλείδι, το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών (1) - (7) έχει λύση που δίνεται από τη σχέση (14) όπου οι συντελεστές K_{nk} προσδιορίζονται από τον τύπο (15).

__Ασκ.__ Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1, \quad t>0,$$

$$u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y) \quad 0<x<1, \quad 0<y<1,$$

$$u_t(x,y,0) = 0 \quad 0<x<1, \quad 0<y<1,$$

$$u(x,0,t) = 0, \quad 0<x<1, \quad t>0,$$

$$u(x,1,t) = 0, \quad 0<x<1, \quad t>0,$$

$$u(0,y,t) = 0, \quad 0<y<1, \quad t>0,$$

$$u(1,y,t) = 0, \quad 0<y<1, \quad t>0.$$

Απ Από τη σχέση (15) έχουμε

$$K_{nk} = 4 \int_0^1 \int_0^1 x(1-x)\, y(1-y) \sin n\pi x \sin k\pi y \, dx\, dy$$

$$= 4 \underbrace{\left[\int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x \, dx \right]}_{I_1} \cdot \underbrace{\left[\int_0^1 y(1-y) \sin k\pi y \, dy \right]}_{I_2}$$

αφού οι μεταβλητές του διπλού ολοκληρώματος χωρίζονται.

Υπολογίζουμε αρχικά το πρώτο ολοκλήρωμα I_1.

$$I_1 = \int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\, dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 (x-x^2)\cdot(\cos n\pi x)'\, dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\Big[(x-x^2)\cos n\pi x\Big]_{x=0}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cdot \cos n\pi x\, dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2x)\cdot(\sin n\pi x)'\, dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[(1-2x)\cdot\sin n\pi x\Big]_{x=0}^{1} + \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x\, dx$$

$$= -\frac{2}{n^3\pi^3}\Big[\cos n\pi x\Big]_{x=0}^{1} = -\frac{2}{n^3\pi^3}\Big[\cos n\pi - \cos 0\Big]$$

$$= -\frac{2}{n^3\pi^3}\Big[(-1)^n - 1\Big] = \frac{2}{n^3\pi^3}\Big[1-(-1)^n\Big].$$

Ομοίως

$$I_2 = \frac{2}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right].$$

Άρα

$$K_{nk} = 4\cdot I_1\cdot I_2 = 4\cdot\frac{2}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]\cdot\frac{2}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} \dfrac{64}{n^3k^3\pi^6}, & n \text{ και } k \text{ περιττοί} \\ 0, & n \text{ ή } k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

και τελικά από τη σχέση (14) παίρνουμε τη λύση

$$u(x,y,t) = \frac{64}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cdot\frac{1}{(2k-1)^3}\sin(2n-1)\pi x\cdot\sin(2k-1)\pi y\cdot$$

$$\cdot\cos\sqrt{(2n-1)^2+(2k-1)^2}\,\pi t.$$

$\square$