Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE (Ή ΔΕ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ)

Η ΔΕ του Laplace (ή ΔΕ του δυναμικού) έχει τη μορφή

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Όταν το ΠΣΤ που περιέχει μια τέτοια ΔΕ ορίζεται σε μία ορθογώνια περιοχή R, τότε αναφερόμαστε στο λεγόμενο πρόβλημα του Dirichlet, το οποίο έχει τη γενική μορφή:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < y < m \quad (1)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (2)$$

$$u(x,m) = g_2(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (3)$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 < y < m \quad (4)$$

$$u(\ell,y) = 0, \quad 0 < y < m \quad (5)$$

Για να λύσουμε το εν λόγω ΠΣΤ θεωρούμε ότι η $u(x,y)$ γράφεται

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών βρίσκαμε ότι η X ικανοποιεί το πρόβλημα

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (6)$$

$$X(0) = 0 \qquad (7)$$

$$X(\ell) = 0 \qquad (8)$$

ενώ η Y πληροί τη ΔΕ

$$Y'' - \lambda Y = 0 \qquad (9)$$

Το πρόβλημα (6), (7), (8) έχει λύσεις τις ιδιοτιμές

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (10)$$

και τις ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 1, 2 \ldots \quad (11)$$

Με την τιμή του λ που δίνεται από τη σχέση (10), η γενική λύση της ΔΕ (9), θα είναι

$$Y_n(y) = a_n \cosh\frac{n\pi y}{\ell} + b_n \sinh\frac{n\pi y}{\ell} \quad (12)$$

Οπότε

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \quad (13)$$

Η λύση αυτή όμως πρέπει εκτός από τις (1), (4) και (5) να ικανοποιεί και τις συνθήκες (2) και (3), συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(0) \sin\frac{n\pi x}{\ell} = g_1(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(m) \sin\frac{n\pi x}{\ell} = g_2(x)$$

Διαπιστώνουμε τότε ότι $Y_n(0)$, $Y_n(m)$ θα πρέπει να είναι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της συνάρτησης g_1 και της συνάρτησης g_2 δηλ.

$$Y_n(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g_1(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad \text{και}$$

$$Y_n(m) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g_2(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

Όμως, λόγω της α2), έχουμε

$$Y_n(0) = a_n \quad \text{και}$$

$$Y_n(m) = a_n\cosh\frac{n\pi m}{\ell} + b_n\sinh\frac{n\pi m}{\ell}$$

Άρα $$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g_1(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad (14)$$

και $$b_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi m}{\ell}}\left[\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g_2(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx - \left(\cosh\frac{n\pi m}{\ell}\right)\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g_1(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right] \quad (15)$$

Η λύση είναι η $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cosh\frac{n\pi y}{\ell} + b_n\sinh\frac{n\pi y}{\ell}\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ (16)

όπου οι a_n και b_n δίνονται απ' τις (14) και (15), αντίστοιχα.

Παραδ. Να λυθεί το ΠΣΤ

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$
$$u(x,0)=0$$
$$u(x,1)=x$$
$$u(0,y)=0$$
$$u(1,y)=0$$
$$0<x<1$$
$$0<y<1$$

Απ. Έχουμε $\ell=1$, $m=1$, $g_1(x)=0$ οπότε $a_n=0$.

Απ' τη (15) βρίσκουμε

$$b_n=\frac{2}{\sinh n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=-\frac{2}{n\pi\sinh n\pi}\int_0^1 x(\cos n\pi x)'dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi\sinh n\pi}\Big[x\cos n\pi x\Big]_{x=0}^{1}+\frac{2}{n\pi\sinh n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\,dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi\sinh n\pi}\Big[(-1)^n-0\Big]+\frac{2}{n^2\pi^2\sinh n\pi}\Big[\sin n\pi x\Big]_{x=0}^{1}=$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi\sinh n\pi}.$$ Οπότε, λόγω της (16), έχουμε

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi\sinh n\pi}\sinh n\pi y\,\sin n\pi x.$$

$\square$

Άσκ. Να λυθεί το ΠΣΤ

$u_{xx}+u_{yy}=0,$

$u(x,0)=x,$

$u(x,1)=0,$

$u(0,y)=0,$

$u(1,y)=0,$

$0<x<1,$

$0<y<1.$

Απ Έχουμε $\ell=1$, $m=1$, $g_1(x)=x$, $g_2(x)=0$. Οπότε

$$a_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(\cos n\pi x)'dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\Big[x\cos n\pi x\Big]_{x=0}^{1}+\frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\sin n\pi x\Big]_{x=0}^{1}$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\Big[(-1)^n-0\Big]+\frac{2}{n^2\pi^2}\Big[0-0\Big]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\sinh n\pi}\Big[(-\cosh n\pi)\underbrace{2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx}_{a_n}\Big]$$

$$=-\coth n\pi\cdot\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}=\frac{2(-1)^n}{n\pi}\coth n\pi$$

Άρα η ζητούμενη λύση θα είναι

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\cosh n\pi y+\frac{2(-1)^n}{n\pi}\coth n\pi\sinh n\pi y\Big]\sin n\pi x$$

$\square$