Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

* ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ - ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Θεωρούμε τη ΔΕΜΠ $2^{ης}$ τάξης

$$a_1(x,y)u_{xx} + a_2(x,y)u_{xy} + a_3(x,y)u_{yy} + a_4(x,y)u_x + a_5(x,y)u_y + a_6(x,y)u = f(x,y) \qquad (1)$$

όπου a_i $(i=1,\dots,6)$ και η f είναι δοθείσες συναρτήσεις,

Ζητούμε λύση $u(x,y)$ της ΔΕΜΠ (1) που να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$A_1 \; u(x,0) = g_1(x), \qquad 0<x<\ell \qquad (2)$$

$$A_2 \; u_y(x,0) = g_2(x), \qquad 0<x<\ell \qquad (3)$$

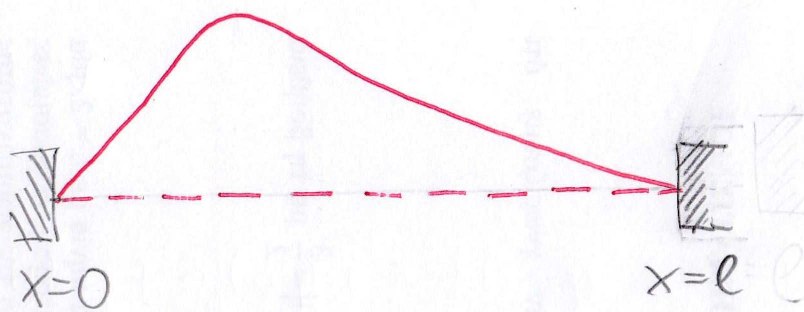
$$A_3 \, u(0,y) + A_4 u_x(0,y) = g_5(x), \qquad 0<y<m \qquad (4)$$

$$A_5 \, u(\ell,y) + A_6 u_x(\ell,y) = g_6(x), \qquad 0<y<m \qquad (5)$$

όπου g_i $(i=1,\dots,4)$ είναι δοθείσες συναρτήσεις

και A_i $(i=1,\dots,6)$ -||- -||- σταθερές.

Η κυματική εξίσωση μιας διάστασης αναφέρεται και ως εξίσωση της παλλόμενης χορδής, διότι θεωρούμε μία χορδή στερεωμένη στα άκρα της $x=0$ και $x=\ell$. Τότε η κατακόρυφη απομάκρυνση $u=u(x,t)$ επαληθεύει τη ΔΕΜΠ



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0<x<\ell, \quad t>0$$

όπου $c^2 = \frac{T}{\rho}$, T είναι η σταθερή δύναμη που οφείλεται στην τάση της χορδής και ρ είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους.

Η γενική μορφή του ΠΑΣΤ για την κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - c^2 u_{xx}, \quad 0<x<\ell, \quad t>0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad 0<x<\ell, \quad (2)$$

$$u_t(x,0) = g_2(x), \quad 0<x<\ell, \quad (3)$$

$$u(0,t) = 0, \quad t>0, \quad (4)$$

$$u(\ell,t) = 0, \quad t>0, \quad (5)$$

Υποθέτουμε ότι η λύση $u=u(x,t)$ της ΔΕΜΠ (1) γράφεται στη μορφή

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας την (6) στη ΔΕΜΠ (1) προκύπτει

$$XT'' - c^2 X'' T = 0$$

ή

$$c^2 \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda$$

όπου λ είναι σταθερά. Οπότε από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι ΣΔΕ

$$c^2 \frac{X''}{X} = \lambda \quad (7)$$

και

$$\frac{T''}{T} = \lambda \quad (8)$$

Επίσης

$$(4) \to u(0,t)=0 \Rightarrow X(0)\cdot T(t)=0 \overset{\forall t\in \mathbb{R}_+}{\Longrightarrow} X(0)=0$$

$$(5) \to u(\ell,t)=0 \Rightarrow X(\ell)\cdot T(t)=0 \overset{\forall t>0}{\Longrightarrow} X(\ell)=0$$

Οι συνοριακές αυτές συνθήκες και η ΔΕ (7) δημιουργούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$X'' - \frac{\lambda}{c^2}X = 0, \qquad X(0)=X(\ell)=0$$

το οποίο έχει λύση

$$X(x) = c_1 \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x$$

και λόγω των συνοριακών συνθηκών

$$X(0)=0 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$$

$$X(\ell)=0 \Rightarrow c_2 \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\ell = 0 \overset{c_2\neq 0}{\Longrightarrow} \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\ell=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\ell = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}} \quad (9)$$

Άρα έχουμε $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}$, $n=1,2,\ldots$ (10)

Επιπλέον, η ΔΕ (8), λόγω της σχέσης (9) γίνεται

$$T'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}T = 0$$

και έχει λύση την

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi c}{\ell}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{\ell}t , \quad n=1,2,\ldots \qquad (11)$$

όπου a_n και b_n είναι αυθαίρετες σταθερές.

Το γινόμενο $X_n(x)\cdot T_n(t)$ είναι λύση της ΔΕΜΠ (1) η οποία είναι γραμμική, οπότε η (1) έχει λύση το

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\cdot T_n(t).$$

Άρα η λύση του ΠΑΣΤ (1)-(5) είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t)$$

όπου η $X_n(x)$ δίνεται από τη σχέση (10)

και -//- $T_n(t)$ -//- -//- -//- -//- (11).

Η λύση αυτή πληροί επίσης και την αρχική συνθήκη (2), δηλ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = g_1(x)$$

Σύμφωνα με τη Θεωρία Fourier οι συντελεστές a_n δίνονται από τη σχέση

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \qquad (12)\ T$$

Ομοίως προκειμένου να ικανοποιείται και η συνθήκη (3)

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} g_2(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad (13)\ T$$

Η λύση του ΠΑΣΤ (1)-(5) είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi c}{\ell}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (14)\ T$$

όπου οι συντελεστές a_n και b_n προσδιορίζονται από τις σχέσεις (12) και (13), αντίστοιχα.

Παραδ Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_{tt} - \underbrace{}_{c=1} u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = x(1-x) = g_1(x)$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad = g_2(x)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ell = 1$$

Απ Αφού $g_2(x)=0$ θα είναι και οι $b_n=0$.

Έτσι, από τη (α2) βρίσκουμε

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell g_1(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (x-x^2)\left[\cos(n\pi x)\right]'dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(x-x^2)\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2x)\left[\sin(n\pi x)\right]'dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(1-2x)\sin(n\pi x)\right]_{x=0}^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (-2)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^1 = -\frac{4}{n^3\pi^2}\left[\cos(n\pi) - \cos 0\right] = -\frac{4}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi^3}, & n \text{ περ.} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Άρα καταλήγουμε στη λύση

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\cos(2n-1)\pi t \cdot \sin(2n-1)\pi x.$$

$\square$

* Έστω, τώρα ότι οι συνοριακές συνθήκες (4) και (5) του ΠΑΣΤ (1)-(5) αντικαθίστανται από τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = A, \quad t>0 \quad (4')$$

$$u(\ell,t) = B, \quad t>0 \quad (5')$$

όπου A, B μη μηδενικές σταθερές.

Θεώρ. Αν

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{x-\ell}{\ell}A - \frac{x}{\ell}B \quad (15)$$

όπου u είναι λύση του ΠΑΣΤ (1), (2), (3), (4'), (5'), τότε η v είναι λύση του ΠΑΣΤ

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, \quad 0<x<\ell, \quad t>0 \quad (16)$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x) + \frac{x-\ell}{\ell}A - \frac{x}{\ell}B, \quad 0<x<\ell \quad (17)$$

$$v_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0<x<\ell \quad (18)$$

$$v(0,t) = 0 \quad (19)$$

$$v(\ell,t) = 0 \quad (20)$$

<u>Παραδ.</u> Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_{tt} - \underbrace{}_{c=1} u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = x(1-x) = g_1(x)$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad = g_2(x)$$

$$u(0,t) = 3 \quad = A$$

$$u(1,t) = 0 \quad = B$$

$$\Downarrow$$

$$\ell = 1$$

<u>Απ</u> Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα λύσουμε το ΠΑΣΤ (16)-(20). Οπότε

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \left[g_1(x) + \frac{x-\ell}{\ell}A - \frac{x}{\ell}B\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 [x(1-x) + 3(x-1)]\sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx + 6\int (x-1)\sin n\pi x\,dx$$

Το 2ο ολοκλήρωμα ισούται

$$6\int_0^1 (x-1)\sin n\pi x\,dx = -\frac{6}{n\pi}\int_0^1 (x-1)\left[\cos(n\pi x)\right]'dx$$

$$= -\frac{6}{n\pi}\left[(x-1)\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^{1} + \frac{6}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{6}{n\pi} + \frac{6}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi x\right]_{x=0}^{1} = -\frac{6}{n\pi}.$$

Το 1ο ολοκλήρωμα ισούται με $\begin{cases} \frac{8}{n^3\pi^3}, & \text{αν } n \text{ περ} \\ 0, & \text{" } n \text{ άρτιος} \end{cases}$

Επομένως

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi^3} - \dfrac{6}{n\pi}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\[2ex] -\dfrac{6}{n\pi}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}.$$

Από τη (14) έχουμε

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} - \frac{6}{(2n-1)\pi} \right] \cos(2n-1)\pi t \cdot \sin(2n-1)\pi x$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{6}{2n\pi} \right] \cos 2n\pi t \cdot \sin 2n\pi x$$

και τελικά από τη σχέση (15)

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{x-\ell}{\ell}A - \frac{x}{\ell}B \Rightarrow$$

$$v(x,t) = u(x,t) + 3(x-1) \Rightarrow$$

$$u(x,t) = v(x,t) + 3(1-x). \qquad \square$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν στη συνθήκη (2) η g_1 είναι άθροισμα τριγωνομετρικών όρων της μορφής $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ τότε δεν μπορούμε να εργαστούμε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

<u>Παράδ.</u> Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$c=2$

$$u_{tt}-4u_{xx}=0$$

$$u(x,0)=4\sin(3\pi x)-6\sin(7\pi x)$$

$$u_t(x,0)=0=g_2(x) \Rightarrow b_n=0$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(4,t)=0$$

$\ell=4$

<u>Απ</u> Από τη (14) για $b_n=0$ έχουμε

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi c}{\ell}t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

Θέτοντας $c=2$, $\ell=4$ βρίσκουμε ότι

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{4}x = 4\sin 3\pi x - 6\sin 7\pi x$$

Οπότε

$$a_n\sin\frac{n\pi}{4}x = 4\sin 3\pi x \Rightarrow \frac{n\pi}{4}=3\pi \Rightarrow \begin{cases} n=12 \\ a_{12}=4 \end{cases}$$

$$a_n\sin\frac{n\pi}{4}x = -6\sin 7\pi x \Rightarrow \frac{n\pi}{4}=7\pi \Rightarrow \begin{cases} n=28 \\ a_{28}=-6 \end{cases}$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές a_n θα είναι 0.

Άρα

$$u(x,t)=a_{12}\cos\frac{12\pi 2}{4}t\,\sin\frac{12\pi}{4}x + a_{28}\cos\frac{28\pi 2}{4}t\,\sin\frac{28\pi}{4}x$$

$$=4\cos 6\pi t\,\sin 3\pi x - 6\cos 14\pi t\,\sin 7\pi x.$$

□

Ασκ Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$c=5$

$u_{tt} - 25u_{xx} = 0$

$u(x,0) = \sin 3x = g_1(x)$

$u_t(x,0) = 4 = g_2(x)$

$u(0,t) = 0$

$u(\pi,t) = 0$

$l = \pi$

Απ Λύνουμε την αρχική συνθήκη $u(x,0) = \sin 3x$ για a_n, δηλ.

$$u(x,0) = \sin 3x \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{\pi} x = \sin 3x \Rightarrow$$

$$a_n \sin nx = \sin 3x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

Όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές a_n θα είναι 0.

Επίσης

$$b_n = \frac{2}{5n\pi} \int_0^{\pi} 4 \sin \frac{n\pi}{\pi} x \, dx = \frac{8}{5n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{8}{5n^2\pi} \left[\cos nx\right]_{x=0}^{\pi} = -\frac{8}{5n^2\pi} \left[(-1)^n - 1\right]$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (14) έχουμε

$$u(x,t) = \cos 15t \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 5nt \sin nx$$

$$= \cos 15t \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{8}{5n^2\pi}\right)\left[(-1)^n - 1\right] \sin 5nt \sin nx$$

$$= \cos 15t \sin 3x + \left(-\frac{8}{5\pi}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left[(-1)^{2n-1} - 1\right] \sin 5(2n-1)t \sin (2n-1)x$$

$$= \cos 15t \sin 3x + \frac{16}{5\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin 5(2n-1)t \sin (2n-1)x$$

$\square$