ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στα επόμενα παραδείγματα περιγράφεται η συγκεκριμένη μέθοδος.

Παραδ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Απ. Θέτουμε $u = X(x)\cdot Y(y)$. Τότε

$$X''(x)\cdot Y(y) - X(x)\cdot Y''(y) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Από όπου προκύπτουν οι εξισώσεις

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \lambda > 0 \\ c_1 + c_2 x, & \lambda = 0 \\ c_1 \cos\sqrt{-\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,x, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \Rightarrow Y = \begin{cases} c_3 e^{\sqrt{\lambda}y} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}y}, & \lambda > 0 \\ c_3 + c_4 y, & \lambda = 0 \\ c_3 \cos\sqrt{-\lambda}\,y + c_4 \sin\sqrt{-\lambda}\,y, & \lambda < 0 \end{cases}$$

Άρα η λύση της ΔΕΜΠ είναι η

$$u = X(x)\cdot Y(y) = \begin{cases} \left(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(c_3 e^{\sqrt{\lambda}y} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}y}\right), & \lambda>0 \\ \left(c_1 + c_2 x\right)\left(c_3 + c_4 y\right), & \lambda=0 \\ \left(c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x\right)\left(c_3 \cos\sqrt{-\lambda}y + c_4 \sin\sqrt{-\lambda}y\right), & \lambda<0 \end{cases}$$

$\square$

Παράδ.: Να λυθεί η ΔΕΜΠ $3u_x - 2u_y - 5u_z = 0$.

Λύση: Αφού $u = u(x, y, z)$, θέτουμε $u = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$

Οπότε

$$3X'(x)Y(y)Z(z) - 2X(x)Y'(y)Z(z) - 5X(x)Y(y)Z'(z) = 0$$

ή

$$3\frac{X'(x)}{X(x)} - 2\frac{Y'(y)}{Y(y)} - 5\frac{Z'(z)}{Z(z)} = 0$$

ή

$$3\frac{X'(x)}{X(x)} = 2\frac{Y'(y)}{Y(y)} + 5\frac{Z'(z)}{Z(z)} = \lambda$$

Από όπου προκύπτουν οι ΔΕ

$$\begin{cases} 3\dfrac{X'(x)}{X(x)} = \lambda & (\alpha) \\ 2\dfrac{Y'(y)}{Y(y)} + 5\dfrac{Z'(z)}{Z(z)} = \lambda & (\beta) \end{cases}$$

Από την (α) προκύπτει

$$3\frac{dX}{dx} = \lambda X \Rightarrow \int \frac{1}{X}\,dX = \int \frac{\lambda}{3}\,dx \Rightarrow \ln X = \frac{\lambda}{3}x + c \Rightarrow X = c_1 e^{\frac{\lambda}{3}x}$$

Η (β) μπορεί να γραφεί

$$2\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda - 5\frac{Z'(z)}{Z(z)} = \mu \Rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{Y'(y)}{Y(y)} = \mu & (\gamma) \\[2ex] \lambda - 5\dfrac{Z'(z)}{Z(z)} = \mu & (\delta) \end{cases}$$

Οπότε

$$(\gamma) \Rightarrow \int \frac{dY}{Y} = \int \frac{\mu}{2}\,dy \Rightarrow \ln Y = \frac{\mu}{2}y + c \Rightarrow Y = c_2 e^{\frac{\mu}{2}y}$$

$$(\delta) \Rightarrow -5\int \frac{dZ}{Z} = \int (\mu - \lambda)\,dz \Rightarrow \ln Z = \frac{\lambda-\mu}{5}z + c \Rightarrow Z = c_3 e^{\frac{\lambda-\mu}{5}z}$$

Επομένως η ΔΕΜΠ έχει λύση τη συνάρτηση

$$u = \left(c_1 e^{\frac{\lambda}{3}x}\right)\left(c_2 e^{\frac{\mu}{2}y}\right)\left(c_3 e^{\frac{\lambda-\mu}{5}z}\right) = c\cdot \exp\left(\frac{\lambda}{3}x + \frac{\mu}{2}y + \frac{\lambda-\mu}{5}z\right). \quad \square$$

Ασκ Η μη γραμμική ΔΕΜΠ $(u_x)^{n+1}\cdot u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ εμφανίζεται στην Ακουστική και συγκεκριμένα στη διάδοση του ήχου, όπου α είναι η ταχύτητα του ήχου στο μέσο διάδοσης. Θέτοντας $u = X(x)\cdot T(t)$ να βρεθούν οι εξισώσεις που πληρούν οι συναρτήσεις $X(x)$ και $T(t)$.

Απ. Αντικαθιστώντας $u = X(x)\cdot T(t)$ στη ΔΕΜΠ προκύπτει

$$\left[X'(x)\cdot T(t)\right]^{n+1}\cdot\left[X(x)\cdot T''(t)\right] = \alpha^2\left[X''(x)\cdot T(t)\right] \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha^2 X''(x)}{X(x)\cdot\left[X'(x)\right]^{n+1}} = T^n(t)\cdot T''(t) = \lambda \quad \text{ή}$$

$$X''(x) - \frac{\lambda}{\alpha^2}X(x)\left[X'(x)\right]^{n+1} = 0 \quad \text{και} \quad T''(t)\cdot T^n(t) = \lambda$$

$\square$

Ασκ Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕΜΠ $(u_x)^2+(u_y)^2=1$ θέτοντας $u = X(x)+Y(y)$.

Απ. Η ΔΕΜΠ $[X'(x)]^2+[Y'(y)]^2=1$

ή

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = 1-\left(\frac{dY}{dy}\right)^2 = \lambda$$

Έτσι

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2=\lambda \Rightarrow \frac{dX}{dx}=\pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow X=\pm\sqrt{\lambda}\, x + c_1 , \quad \lambda\geq 0$$

και

$$\left(\frac{dY}{dy}\right)^2=1-\lambda \Rightarrow \frac{dY}{dy}=\pm\sqrt{1-\lambda} \Rightarrow Y=\pm\sqrt{1-\lambda}\, y + c_2 \quad \lambda\leq 1$$

Οπότε η ζητούμενη λύση είναι

$$u=\pm\sqrt{\lambda}\, x \pm\sqrt{1-\lambda}\, y + c , \quad \lambda\in[0,1]. \quad \square$$

Ασκ Να λυθεί η ΔΕΜΠ $2u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u = 0$.

Λυ Θέτοντας $u = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ προκύπτει

$$2X''YZ + XY''Z + XYZ'' + u = 0 \quad \text{ή} \quad 2\frac{X''}{X} + 1 = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda$$

Τότε λαμβάνουμε τις

$$2\frac{X''}{X} + 1 = \lambda \quad (\alpha) \qquad \text{και} \qquad -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda \quad (\beta)$$

Η (α) γράφεται

$$2X'' + (1-\lambda)X = 0$$

Απ' τη (β) έχουμε $-\dfrac{Y''}{Y} = \dfrac{Z''}{Z} + \lambda = \mu$

Οπότε προκύπτουν οι ΔΕ

$$Y'' + \mu Y = 0$$

και

$$Z'' + (\lambda - \mu)Z = 0$$

$\square$

Ασκ. 3.12 α) Αντικαθιστώντας στη ΔΕΜΠ προκύπτει

$$\frac{i\cancel{h}}{\cancel{2\pi}}\left(-\frac{i\cancel{2\pi}E}{\cancel{h}}\cancel{e^{-\frac{i2\pi Et}{h}}}\,u\right)=-\frac{h^2}{8m\pi^2}\cancel{e^{-\frac{i2\pi Et}{h}}}\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)+V\cancel{e^{-\frac{i2\pi Et}{h}}}\,u$$

$$\frac{h^2}{8m\pi^2}\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{xy}\right)+Eu=Vu\Rightarrow$$

$$\frac{h^2}{8m\pi^2}\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)+(E-V)u=0\Rightarrow$$

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{8m\pi^2}{h^2}(E-V)u=0$$

β) Αν $V=0$, τότε η ΔΕΜΠ (α) γίνεται

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{8m\pi^2E}{h^2}u=0$$

Έστω $u=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$. Οπότε

$$X''YZ+XY''Z+XYZ''+\frac{8m\pi^2E}{h^2}u=0 \qquad \text{ή}$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}+\frac{8m\pi^2E}{h^2}=0$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{8m\pi^2E}{h^2}=-\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}=\lambda$$

Συνεπώς $\displaystyle \frac{X''}{X}+\frac{8m\pi^2E}{h^2}=\lambda \qquad (i)$

και $\displaystyle -\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}=\lambda \Rightarrow \frac{Y''}{Y}+\lambda=-\frac{Z''}{Z}=\mu$

άρα $Y''+(\lambda-\mu)Y=0 \qquad (ii)$

και $Z''+\mu Z=0 \qquad (iii)$

Ασκ Να λυθεί η ΔΕΜΠ $u_{xx}+u_{yy}+u_{xy}=0$ με τη μέθοδο του "χωρισμού των μεταβλητών" θέτοντας $u = X(x)+Y(y)$.

Απ Θέτοντας $u=u(x,y)=X(x)+Y(y)$ βρίσκουμε

$$X''(x)+Y''(y)+0=0 \Rightarrow X''(x) = -Y''(y) = \lambda .$$

Οπότε

$$X''(x)=\lambda \Rightarrow X(x)=\frac{\lambda}{2}x^2+c_1x+c_3$$

και

$$Y''(y)=-\lambda \Rightarrow Y(y)=-\frac{\lambda}{2}y^2+c_2y+c_4$$

Άρα

$$u=\frac{\lambda}{2}x^2-\frac{\lambda}{2}y^2+c_1x+c_2y+c .$$

□

Ορ. Η ΔΕΜΠ

$$a u_{xx} + \beta u_{xy} + \gamma u_{yy} + \delta u_x + \varepsilon u_y + \zeta u = 0$$

ονομάζεται υπερβολική αν $\beta^2 - 4a\gamma > 0$

–||– παραβολική –||– $\beta^2 - 4a\gamma = 0$

–||– ελλειπτική –||– $\beta^2 - 4a\gamma < 0$

Π.χ. Η ΔΕΜΠ $u_{xx} + 6u_{xy} + 12u_{yy} = 0$ είναι ελλειπτική

–||– –||– $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{xyy} = 0$ –||– παραβολική