ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: *Καθηγητής Γ. Παπασχοινόπουλος - Καθηγητής Χρ. Ι. Σχοινάς*
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Γραπτή εξέταση ακαδημαϊκού έτους 2021-22 στο μάθημα:
"ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ"

ΘΕΜΑ 1^{ο} (2,5 μονάδες)
Να λυθεί η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$u_{xy} + u_{xx} + u_{yy} = 0$$

με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

ΘΕΜΑ 2^{ο} (2,5 μονάδες)
Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών–συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0, && 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = x - x^2, && 0 < x < 1, \\ &u(0,t) = 0, && t > 0, \\ &u(1,t) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^{ο} (2,5 μονάδες)
α) Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0,$$

όπου p_n, q_n δοθείσες ακολουθίες και $q_n \neq 0,\ n \in N$. Έστω y_n, z_n λύσεις της εξίσωσης. Θεωρούμε την ορίζουσα

$$C(y_n, z_n) = \begin{vmatrix} y_n & z_n \\ y_{n+1} & z_{n+1} \end{vmatrix} .$$

Τότε $C(y_n, z_n) \neq 0,\ n \in N$ εάν και μόνον εάν $C(y_0, z_0) \neq 0$. (**1.5 μον.**)
β) Έστω η εξίσωση

$$y_{n+1} = \frac{1 - e^{-y_n}}{3 + e^{y_n}}, n = 0,1,...$$

Να εξετάσετε την ευστάθεια του μηδενικού σημείου ισορροπίας. (**1 μον.**)

ΘΕΜΑ 4^{ο} (2,5 μονάδες)
α) Να δείξετε ότι κάθε θετική λύση της εξίσωσης

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n^3}{4 + 2x_n^2}, \quad n = 0,1,...,\ x_0 > 0$$

είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό. (**1.5 μον.**)
β) Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} - 3y_n = 3^n + 1. \quad \textbf{(1 μον.)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^o (2,5 μονάδες)
Θέτουμε $u = X(x) + Y(y)$. Οπότε αντικαθιστώντας στη ΔΕΜΠ έχουμε,

$$X'' + Y'' = 0$$

ή

$$X'' = -Y'' = \lambda$$

Συνεπώς

$$X'' = \lambda \Rightarrow X(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + c_1 x + c_3\,,$$

$$Y'' = -\lambda \Rightarrow Y(y) = -\frac{\lambda}{2}y^2 + c_2 y + c_4\,.$$

Άρα

$$u = \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda}{2}y^2 + c_1 x + c_2 y + c\,.$$

ΘΕΜΑ 2^o (2,5 μονάδες)
Είναι

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\sin n\pi x dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (x - x^2)(\cos n\pi x)' dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\Big[(x - x^2)\cos n\pi x\Big]_{x=0}^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1 - 2x)\cos n\pi x dx \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1 - 2x)(\sin n\pi x)' dx \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}\big[(1 - 2x)\sin n\pi x\big]_{x=0}^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (-2)\sin n\pi x dx \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x dx = -\frac{4}{n^3\pi^3}\big[\cos n\pi x\big]_{x=0}^1 = -\frac{4}{n^3\pi^3}\Big[(-1)^n - 1\Big] \\
&= \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi^3}, & n \;\; \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma \\ 0, & n \;\; \alpha\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin(2n-1)\pi x\,.$$