Θεωρούμε το *πρόβλημα συνοριακών τιμών του* Dirichlet για την **εξίσωση του Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < y < m \qquad (1)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad 0 < x < l, \qquad (2)$$

$$u(x,m) = g_2(x), \quad 0 < x < l, \qquad (3)$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 < y < m, \qquad (4)$$

$$u(l,y) = 0, \quad 0 < y < m, \qquad (5)$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cosh \frac{np\,y}{l} + b_n \sinh \frac{np\,y}{l} \right) \sin \frac{np\,x}{l}} \qquad (16)$$

όπου

$$\boxed{a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{np\,x}{l} dx} \qquad (14)$$

και

$$\boxed{\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\sinh \frac{np\,m}{l}} \Bigg[& \frac{2}{l} \int_0^l g_2(x) \sin \frac{np\,x}{l} dx \\ & - \left(\cosh \frac{np\,m}{l} \right) \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{np\,x}{l} dx \Bigg] \end{aligned}}. \qquad (15)$$

Θεωρούμε το *πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet* για την **εξίσωση του Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < l, \;\; 0 < y < m \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{18}$$

$$u(x,m) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{19}$$

$$u(0,y) = g_3(y), \quad 0 < y < m, \tag{20}$$

$$u(l,y) = g_4(y), \quad 0 < y < m, \tag{21}$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cosh \frac{np\, x}{m} + b_n \sinh \frac{np\, x}{m} \right) \sin \frac{np\, y}{m}} \tag{22}$$

όπου

$$\boxed{a_n = \frac{2}{m} \int_0^m g_3(y) \sin \frac{np\, y}{m} dy} \tag{23}$$

και

$$\boxed{\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\sinh \frac{np\, l}{m}} & \left[\frac{2}{m} \int_0^m g_4(y) \sin \frac{np\, y}{m} dy \right. \\ & \left. - \left(\cosh \frac{np\, l}{m} \right) \frac{2}{m} \int_0^m g_3(y) \sin \frac{np\, y}{m} dy \right] \end{aligned}}. \tag{24}$$

Θεωρούμε το *πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet* για την **εξίσωση του Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < l, \; 0 < y < m \qquad (25)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad 0 < x < l, \qquad (26)$$

$$u(x,m) = g_2(x), \quad 0 < x < l, \qquad (27)$$

$$u(0,y) = g_3(y), \quad 0 < y < m, \qquad (28)$$

$$u(l,y) = g_4(y), \quad 0 < y < m, \qquad (29)$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)} \qquad (30)$$

όπου

$u_1(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος (1)-(5)

και

$u_2(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος (17)-(21)

οι οποίες υπολογίζονται από τις σχέσεις (6) και (22), αντίστοιχα.

Θεωρούμε το *πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών* για την **εξίσωση της θερμότητας**:

$$u_t - cu_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 p^2 c}{l^2} t} \sin \frac{np\, x}{l}} \tag{11}$$

όπου

$$\boxed{c_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{np\, x}{l} dx}. \tag{12}$$