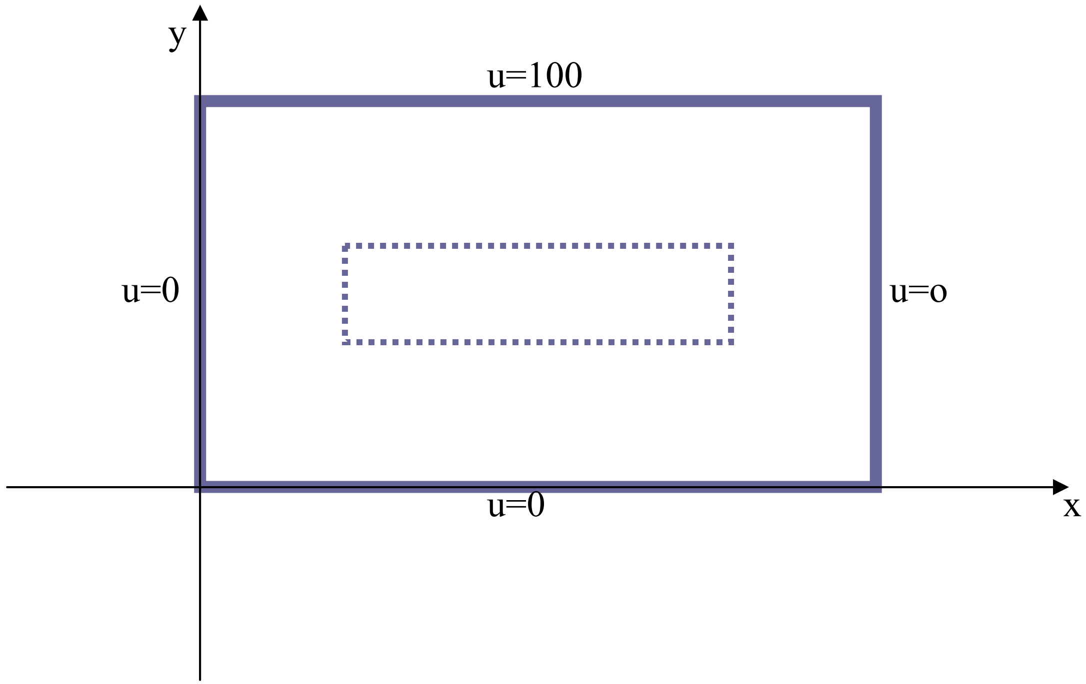
Η εξίσωση του Laplace ή διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου: $\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$.

Με διαφορικές εξισώσεις αυτού του τύπου περιγράφονται διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως το δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου, η κατανομή θερμοκρασίας μέσα σε σώματα που είναι σε θερμική ισορροπία κ.λ.π..



Για να εκμαιεύσουμε τη διαφορική εξίσωση της κατανομής της θερμοκρασίας σε μία ομογενή μεταλλική πλάκα μετά την αποκατάσταση της θερμικής ισορροπίας, υποθέτουμε ότι η πλάκα είναι μονωμένη στην επάνω και κάτω επιφάνειά της και ως εκ τούτου η θερμότητα υποχρεωτικά ρέει μόνο κατά μήκος του επιπέδου Oxy και ότι η θερμοκρασία $u = u(x,y)$ της πλάκας διατηρεί στις πλευρές της σταθερές τιμές, όπως απεικονίζονται στο παραπάνω σχήμα.

Θεωρούμε το *πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet* για την **εξίσωση του Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < l, \; 0 < y < m \tag{1}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u(x,m) = g_2(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 < y < m, \tag{4}$$

$$u(l,y) = 0, \quad 0 < y < m, \tag{5}$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cosh \frac{n\pi y}{l} + b_n \sinh \frac{n\pi y}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}} \tag{16}$$

όπου

$$\boxed{a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx} \tag{14}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi m}{l}} \Bigg[& \frac{2}{l} \int_0^l g_2(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ & - \left(\cosh \frac{n\pi m}{l} \right) \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \Bigg] \end{aligned}}. \tag{15}$$

Θεωρούμε το *πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet* για την **εξίσωση του Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < m \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{18}$$

$$u(x,m) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{19}$$

$$u(0,y) = g_3(y), \quad 0 < y < m, \tag{20}$$

$$u(l,y) = g_4(y), \quad 0 < y < m, \tag{21}$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cosh\frac{n\pi x}{m} + b_n \sinh\frac{n\pi x}{m}\right)\sin\frac{n\pi y}{m}} \tag{22}$$

όπου

$$\boxed{a_n = \frac{2}{m}\int_0^m g_3(y)\sin\frac{n\pi y}{m}dy} \tag{23}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi l}{m}}&\left[\frac{2}{m}\int_0^m g_4(y)\sin\frac{n\pi y}{m}dy\right. \\ &\left.-\left(\cosh\frac{n\pi l}{m}\right)\frac{2}{m}\int_0^m g_3(y)\sin\frac{n\pi y}{m}dy\right]\end{aligned}}. \tag{24}$$

Θεωρούμε το *πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet* για την **εξίσωση του Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < m \tag{25}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad 0 < x < l, \tag{26}$$

$$u(x,m) = g_2(x), \quad 0 < x < l, \tag{27}$$

$$u(0,y) = g_3(y), \quad 0 < y < m, \tag{28}$$

$$u(l,y) = g_4(y), \quad 0 < y < m, \tag{29}$$

Τότε η λύση του προβλήματος αυτού είναι:

$$\boxed{u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)} \tag{30}$$

όπου

$u_1(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος (1)-(5)

και

$u_2(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος (17)-(21)

οι οποίες υπολογίζονται από τις σχέσεις (6) και (22), αντίστοιχα.