ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

(ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ)

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
   - π.χ. ιξώδες, θερμοκρασία
2. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ
   - Νερό σε ηρεμία
   - Πίεση του νερού πάνω σε στερεές επιφάνειες, π.χ. πάνω σε φράγματα
3. ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ
   - Νερό σε κίνηση
   - Νόμοι της κίνησης του νερού
   - Αρχή της διατήρησης της ενέργειας
4. ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ
   - Υδρεύσεις κατοικημένων περιοχών
5. ΑΝΟΙΚΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ
   - Αρδευτικά κανάλια
   - Ποτάμια (φυσικοί ανοικτοί αγωγοί)

Πρακτικές εφαρμογές

Μεγέθη που απαντώνται σε πρακτικά προβλήματα:

- ταχύτητα του νερού
- γεωμετρικό σχήμα της διατομής ενός αγωγού
- τραχύτητα των τοιχωμάτων ενός αγωγού
- αντίσταση στην κίνηση του νερού

- Μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τα ανωτέρω μεγέθη βάσει πειραμάτων στο εργαστήριο και παρατηρήσεων (μετρήσεων) στη φύση

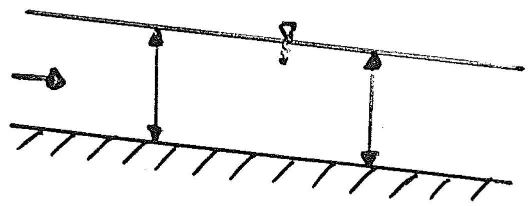
ΑΝΟΙΚΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΤΩΝ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

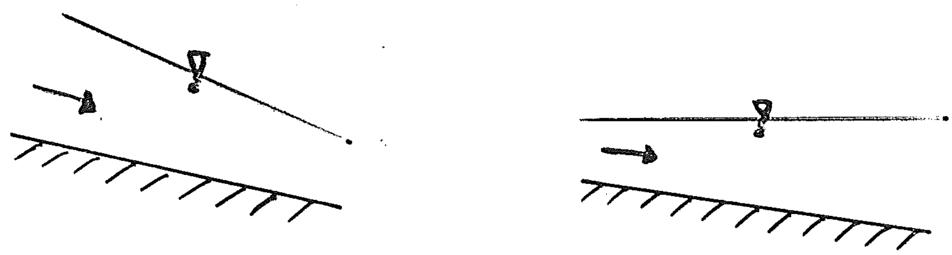
- Διάκριση μεταξύ κλειστών και ανοικτών αγωγών
- Κλειστοί αγωγοί:
  - Η διατομή της ροής καθορίζεται πλήρως από τις στερεές επιφάνειες (η διατομή είναι γεμάτη με νερό)
  - Συνήθως κυκλική διατομή
  - Ομοιόμορφη τραχύτητα των τοιχωμάτων
- Ανοικτοί αγωγοί:
  - Ροή του νερού με ελεύθερη επιφάνεια (ατμοσφαιρική πίεση)
  - Κλειστοί αγωγοί των οποίων η διατομή δεν είναι γεμάτη με νερό
  - Διατομή τεχνητών αγωγών: απλά γεωμετρικά σχήματα (π.χ. τραπεζοειδής διατομή)
  - Διατομή φυσικών αγωγών (ποταμών): ακανόνιστη, ανομοιόμορφη τραχύτητα

2. ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

Ομοιόμορφη : Ταχύτητα του νερού σταθερή,
Βάθος νερού σταθερό
από διατομή σε διατομή ⇒
Επιφάνεια νερού παράλληλη προς τον πυθμένα



Ανομοιόμορφη: Μεταβαλλόμενο βάθος από διατομή σε διατομή ⇒
Επιφάνεια νερού μη παράλληλη προς τον πυθμένα



Βαθμιαία μεταβολή

Ταχεία (απότομη μεταβολή)

<u>Σταθερή (ή μόνιμη)</u>: Σταθερή ταχύτητα ενός σημείου <u>ως προς τον χρόνο</u>,
Βάθος ροής (σε μια διατομή) σταθερό <u>ως προς τον χρόνο</u>

<u>Ασταθής (μη μόνιμη)</u>: Η ταχύτητα ενός σημείου μεταβάλλεται <u>ως προς τον χρόνο</u>,
το βάθος ροής (σε μια διατομή) μεταβάλλεται <u>ως προς τον χρόνο</u>

Αριθμός Reynolds $= Re = \dfrac{\text{δυνάμεις αδρανείας}}{\text{δυνάμεις ιξώδους}}$

$$Re = \frac{u\,l}{\nu}$$

u : ταχύτητα του υγρού

l : χαρακτηριστικό μέγεθος με διαστάσεις μήκους, συνήθως μέσο βάθος ροής

$$l = \frac{A}{b}$$

A : υγρή διατομή

b : πλάτος υγρής επιφάνειας

ν : κινηματικός συντελεστής συνεκτικότητας ή ιξώδους

$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{Στρωτή ροή}}\\ \underline{\text{Τυρβώδης ροή}}\end{array}\right\}$ Αναλόγως των τιμών του Re

π.χ. για $Re < 600 \Rightarrow$ στρωτή ροή

Αριθμός Froude $= Fr = \dfrac{\text{δυνάμεις αδρανείας}}{\text{δυνάμεις βαρύτητας}}$

$Fr = \dfrac{u}{\sqrt{gl}}$ (μερικές φορές $Fr = \dfrac{u^2}{gl}$)

g : επιτάχυνση βαρύτητας

<u>ποτάμια (ήρεμη) ροή</u>
<u>χειμαρρώδης (ταχεία) ροή</u> } αναλόγως των τιμών του Fr

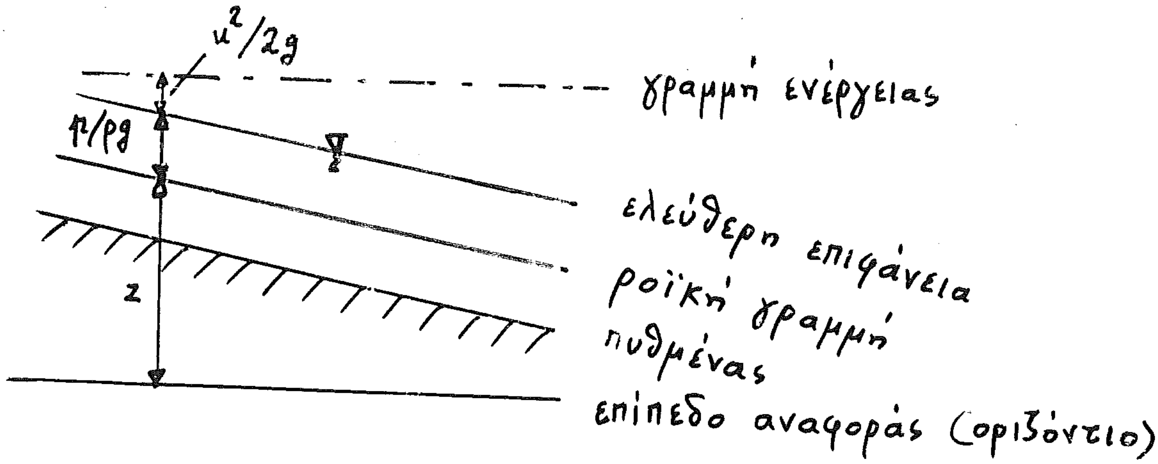
για $Fr < 1$ ποτάμια (υποκρίσιμη ροή)
(κίνηση μιας μικρής διαταραχής και προς τα ανάντη)

για $Fr > 1$ χειμαρρώδης (υπερκρίσιμη) ροή
(κίνηση μιας μικρής διαταραχής μόνο προς τα κατάντη)

για $Fr = 1$ κρίσιμη ροή

<u>Στην πράξη</u> :
- συνήθως ανομοιόμορφη ροή
  (σε μικρού μήκους ανοικτούς αγωγούς κατά προσέγγιση ομοιόμορφη ροή)
- συνήθως τυρβώδη ροή
- κατά προσέγγιση σταθερή ροή
  (ασταθής ροή : κύματα)

3. ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI ΣΕ ΡΟΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ



$$\boxed{\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{σταθ.}}$$

Εξίσωση ενέργειας

- Κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής
- Απώλειες λόγω τριβών αμελητέες (τέλεια ρευστά)

$\frac{u^2}{2g}$: ύψος ή φορτίο ταχύτητας (κινητική ενέργεια ανά μονάδα βάρους του ρευστού)

$\frac{p}{\rho g}$: ύψος ή φορτίο πιέσεως (ενέργεια λόγω πιέσεως ανά μονάδα βάρους του ρευστού)

z : ύψος ή φορτίο θέσεως (δυναμική ενέργεια ανά μονάδα βάρους του ρευστού)

$\frac{p}{\rho g} + z$: πιεζομετρικό ύψος ή φορτίο

Παραδοχές :

- Ροή σταθερή
- Ροϊκές γραμμές : ευθείες και παράλληλες ⇒
- Υδροστατική κατανομή της πίεσης ($\frac{p}{\rho g} + z = \text{σταθ.}$ για όλα τα σημεία μιας διατομής)

Παρατήρηση :

Στους ανοικτούς αγωγούς (και γενικά στους αγωγούς ροής με ελευθέρα επιφάνεια) η πιεζομετρική γραμμή συμπίπτει με την ελευθέρα επιφάνεια του υγρού.

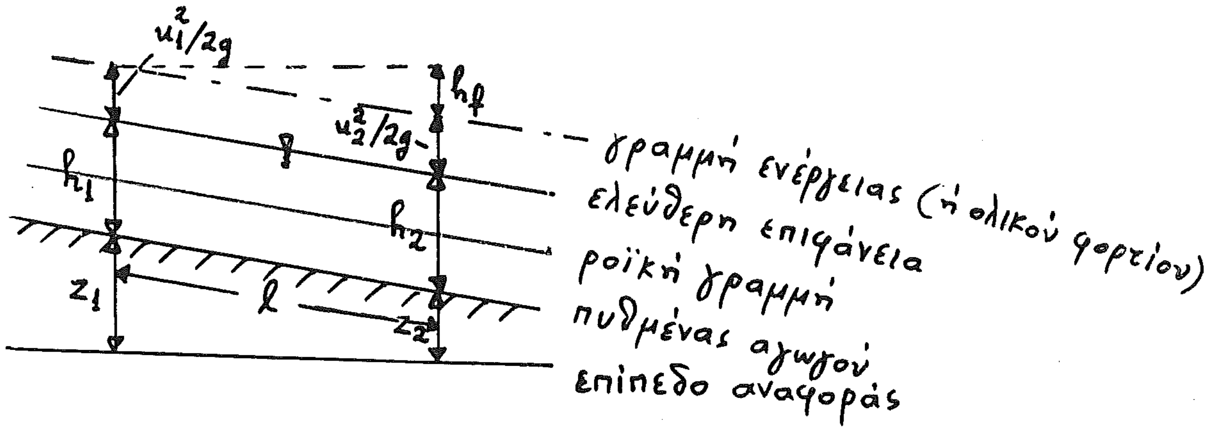
Συντελεστής διόρθωσης του κινητικού φορτίου (α) :

$$\alpha \frac{\bar{u}^2}{2g}$$

$\bar{u}$: μέση ταχύτητα μιας διατομής

$\alpha = 1.03$ μέχρι 1.6, για φυσικούς ανοικτούς αγωγούς

Απώλειες λόγω τριβών (πραγματικά ρευστά):



$$\boxed{\frac{u_1^2}{2g}+h_1+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+h_2+z_2+h_f}$$

$$a_1\frac{\bar{u}_1^2}{2g}+h_1+z_1=a_2\frac{\bar{u}_2^2}{2g}+h_2+z_2+h_f$$

$$S_f=\frac{h_f}{l}$$

S_f : κλίση γραμμής ενεργείας (ή ενεργειακή κλίση)

Περίπτωση ομοιόμορφης ροής:

$$h_f=z_1-z_2$$

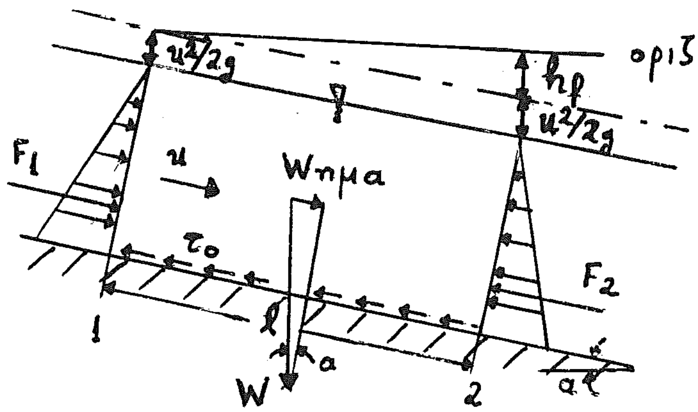
$$S_f=S_w=S_o$$

S_w : κλίση ελεύθερης επιφάνειας

S_o : κλίση πυθμένα

4. ΣΤΑΘΕΡΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

- Βάθος ροής : σταθερό
- Διατομή της υγρής επιφάνειας : σταθερή
- Τραχύτητα της επιφάνειας των στερεών ορίων : σταθερή
- Κλίση πυθμένα = Κλίση ελεύθερης επιφάνειας
- Κανονικές συνθήκες (κανονικό βάθος, κανονική κλίση)



Όγκος ελέγχου του υγρού μεταξύ των διατομών 1 και 2

F_1, F_2 : υδροστατικές δυνάμεις
W : Βάρος του υγρού
τ_o : μέση διατμητική τάση στα τοιχώματα

Συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων :

$$W \eta\mu a = \tau_o P l$$

P : βρεχομένη περίμετρος

$$A l \rho g \, \eta\mu a = \tau_o P l$$

A : υγρή διατομή (επιφάνεια)

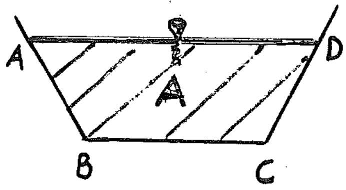
$$\tau_o = \frac{A}{P} \rho g \, \eta\mu a$$

$$\eta\mu a = \frac{h_f}{l} = S_o$$

$$\tau_o = \frac{A}{P} \rho g S_o$$

$R = \dfrac{A}{P} \Rightarrow$ υδραυλική ακτίνα

$$\tau_o = \rho g R S_o$$



$P = (AB) + (BC) + (CD)$

$\tau_0 = \frac{1}{2} \rho u^2 f$ $\quad$ f: συντελεστής τριβής (αδιάστατος)

$\frac{1}{2} \rho u^2 f = \rho g R S_0$

$u^2 = \frac{2g}{f} R S_0 \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\frac{2g}{f}} R^{1/2} S_0^{1/2}}$

Εξίσωση Chézy

$\boxed{u = C R^{1/2} S_0^{1/2}}$ $\quad C = \sqrt{\frac{2g}{f}} \Rightarrow \left[\frac{L^{1/2}}{T}\right]$

C: συντελεστής του Chézy

f = συνάρτ. $\left(Re, \frac{k}{R}\right)$

C = συνάρτ. $\left(Re, \frac{k}{R}\right)$

k: τραχύτητα των τοιχωμάτων

$\frac{k}{R}$: σχετική τραχύτητα

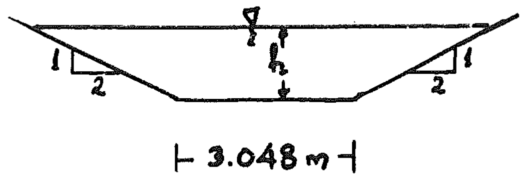
Εξίσωση Manning

$\boxed{u = \frac{1}{n} R^{2/3} S_0^{1/2}}$ $\quad C = \frac{R^{1/6}}{n}$

n: συντελεστής Manning $\left[\frac{T}{L^{1/3}}\right]$
(από πίνακες ανάλογα με την τραχύτητα)

$K_{ST} = \frac{1}{n}$ (γερμανική βιβλιογραφία)

Παράδειγμα



Τραπεζοειδής διατομή

$Q = 6.3675\ m^3/s$

$S_o = 0.0006$

Ομοιόμορφη ροή

$n = 0.016$

$h = ;$

$$A = 3.048\,h + 2\left(\frac{1}{2}\cdot 2h \cdot h\right) = h\,(3.048 + 2h)$$

$$P = 3.048 + 2\sqrt{h^2+4h^2} = 3.048 + 2\sqrt{5}\,h$$

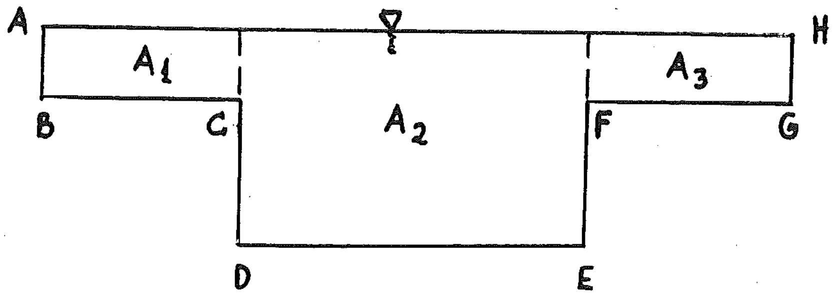
$$R = \frac{A}{P} = \frac{(3.048+2h)h}{3.048+2\sqrt{5}\,h}$$

$$Q = 6.3675 = \frac{1}{0.016}(3.048+2h)h\left[\frac{(3.048+2h)\,h}{3.048+2\sqrt{5}\,h}\right]^{2/3} 0.0006^{1/2}$$

$h = 1.03632\ m$

Σύνθετη διατομή

- π.χ. ποταμός με υπερχειλισμένες όχθες
- Χωρισμός της διατομής σε επί μέρους τμήματα



$$P_1 = (AB) + (BC)$$
$$P_2 = (CD) + (DE) + (EF)$$
$$P_3 = (FG) + (GH)$$

$$R_1 = \frac{A_1}{P_1}$$
$$R_2 = \frac{A_2}{P_2}$$
$$R_3 = \frac{A_3}{P_3}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Q : παροχή $\left[\frac{L^3}{T}\right]$

$$Q_1 = A_1 u_1 = \frac{A_1}{n_1} R_1^{2/3} S_o^{1/2}$$
$$Q_2 = A_2 u_2 = \frac{A_2}{n_2} R_2^{2/3} S_o^{1/2}$$
$$Q_3 = A_3 u_3 = \frac{A_3}{n_3} R_3^{2/3} S_o^{1/2}$$

$$\boxed{Q = A u}$$ εξίσωση συνέχειας

5. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ MOODY ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

$$u = \sqrt{\frac{2g}{f}}\, R^{1/2} S_o^{1/2}$$

f : συντελεστής τριβής

$$C = \sqrt{\frac{2g}{f}}$$

C : συντελεστής Chézy $[\frac{L^{1/2}}{T}]$

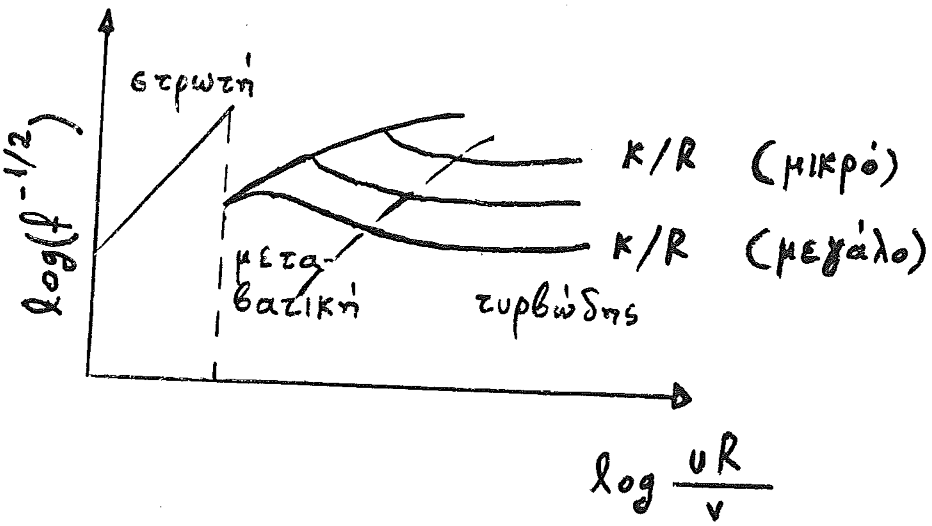
$$f^{-\frac{1}{2}} = \frac{C}{(2g)^{1/2}}$$

$$f = \text{συνάρτ.} \left(Re, \frac{k}{R}\right)$$

Re = αριθμός Reynolds

k = τραχύτητα $[L]$

R = υδραυλική ακτίνα $[L]$



<u>Πρακτικό συμπέρασμα:</u>

Για δεδομένη τιμή k/R σε τυρβώδη ροή και τραχείς αγωγούς $f \to$ σταθ., $C \to$ σταθ. και $n \to$ σταθ. (γιατί $C = R^{1/6}/n$).

n : συντελεστής Manning

Η εξίσωση Manning μπορεί να εφαρμοστεί με σχετικά μεγάλη ακρίβεια σε τυρβώδη ροή και τραχείς σωλήνες.

Για κλειστούς αγωγούς με εσωτερική διάμετρο D:

$$f^{-1/2} = 4\ \lambda o\gamma\left(\frac{D}{k}\right) + 2.28$$

$$\frac{C}{\sqrt{2g}} = 4\ \lambda o\gamma\left(\frac{D}{k}\right) + 2.28$$

Για κλειστούς αγωγούς με κυκλική διατομή: (διαμέτρου D)

$$R = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4} \quad \Rightarrow \quad D = 4R$$

Για ανοικτούς αγωγούς:

$$f^{-1/2} = 4\ \lambda o\gamma\left(\frac{4R}{k}\right) + 2.28$$

$$\frac{C}{\sqrt{2g}} = 4\ \lambda o\gamma\left(\frac{4R}{k}\right) + 2.28$$

$$\frac{R^{1/6}}{\sqrt{2g}\, n} = 4\ \lambda o\gamma\left(\frac{4R}{k}\right) + 2.28$$

6. ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΑΡΟΧΗΣ

- Ανοικτός αγωγός με δεδομένα S_o, n, A

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} A \qquad\qquad A = RP$$

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} (RP)$$

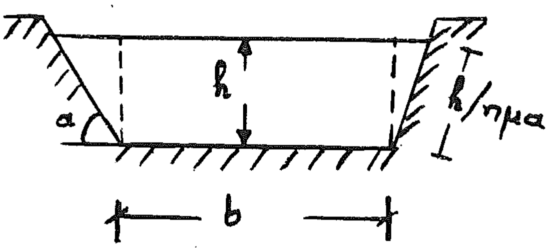
$Q \to max$, όταν $R \to max$ ή όταν $P \to min$

(γιατί $R = A/P$)

$Q \to max$: από υδραυλικής πλευράς η πιο αποτελεσματική διατομή

$P \to min$: απαιτεί το ελάχιστο υλικό επιστρώσεως

- Παράδειγμα (τραπεζοειδής διατομή):



$A = bh + h^2 σφα$ (υγρή διατομή)

$P = b + \frac{2h}{ημα}$ (υγρή περίμετρος)

$$R = \frac{A}{P} = \frac{A}{b + \frac{2h}{ημα}} = \frac{A}{\frac{A}{h} - hσφα + \frac{2h}{ημα}}$$ (υδραυλική ακτίνα)

$R \to max$, όταν $P \to min$

$$\frac{d\left(\frac{A}{h} - h\sigma\varphi a + \frac{2h}{\eta\mu a}\right)}{dh} = 0 \Rightarrow -\frac{A}{h^2} - \sigma\varphi a + \frac{2}{\eta\mu a} = 0$$

Δευτέρα παράγωγος : $\frac{2A}{h^3} > 0 \Rightarrow$ υπάρχει ελάχιστο

$$A = h^2\left(\frac{2}{\eta\mu a} - \sigma\varphi a\right)$$

$$R_{max} = \frac{h}{2}$$

- Ορθογωνική διατομή:

$a = 90° \Rightarrow A = 2h^2$

$A = bh \Rightarrow bh = 2h^2 \Rightarrow b = 2h$

7. ΣΥΡΤΙΚΗ ΤΑΣΗ

$\tau_o = \rho g R S_o$ (αποδείχθηκε σε προηγούμενο μάθημα)

- Για ανοικτό αγωγό με άπειρο πλάτος:

$\boxed{\tau_o = \rho g h S_o}$ h : βάθος ροής

(π.χ. για ορθογωνική διατομή $R = \frac{A}{P} = \frac{bh}{b+2h}$,

όταν h πολύ μικρό σε σχέση με το b, τότε $R \to h$)

- Κρίσιμη συρτική τάση ($\tau_{o\,cr}$):

Χαρακτηρίζει την έναρξη μετακίνησης των υλικών του πυθμένα (σε μη επενδυμένους ανοικτούς αγωγούς)

- Εμπειρικός τύπος:

$\tau_{o\,cr} = 0.8\ d_{75}$ [kg^*/m^2] (για αδρά μη συνεκτικά υλικά)

d_{75} : 75% των υλικών του πυθμένα έχουν διάμετρο μικρότερη της d_{75} [cm]

(από την καμπύλη κοκκομετρικής σύνθεσης)

- Κρίσιμη συρτική τάση για πρανή ($\tau'_{o\,cr}$):

$\tau'_{o\,cr} = K\,\tau_{o\,cr}$

$K = \text{συν}\varphi \sqrt{1 - \frac{\text{εφ}^2\varphi}{\text{εφ}^2\vartheta}}$

φ : γωνία πρανών με το οριζόντιο επίπεδο

ϑ : γωνία τριβής του υλικού

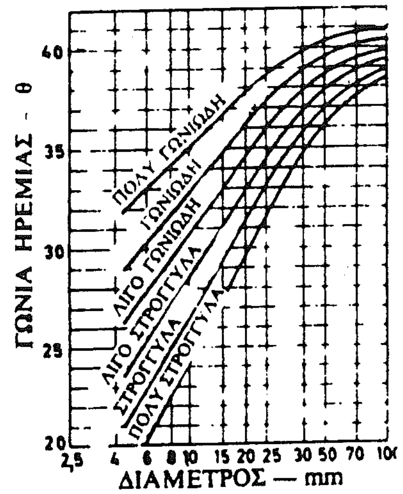
Τιμές των ϑ και K από διαγράμματα

ΔΥΝΑΜΗ

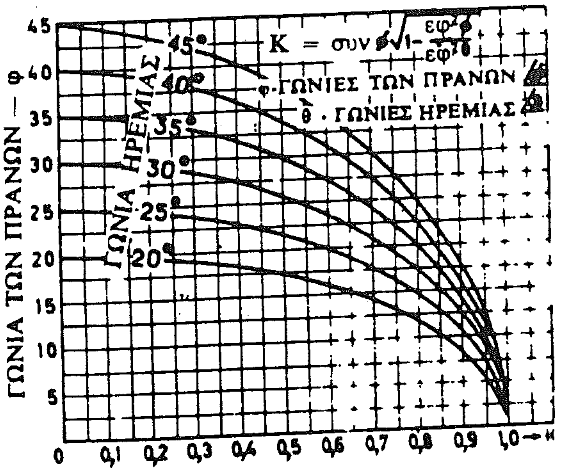
$$K = \sigma\upsilon\nu\varphi \sqrt{1 - \frac{\varepsilon\varphi^2\varphi}{\varepsilon\varphi^2\theta}} \qquad (46)$$

$$\tau_o' = K\ \tau_o \qquad (47)$$

η γωνία των πρανών του αγωγού με το οριζόντιο επίπεδο
ι γωνία τριβής του υλικού.
. τιμές θ και Κ δίδονται από ειδικούς πίνακες και σχήματα
Σχήματα 11 και 12.



11 Μεταβολή της γωνίας ηρεμίας με την διάμετρο για χοντρά μή-συνεκτικά υλικά.



Σχήμα 12 Μεταβολή του Κ με την γωνία των πρανών φ(μετρουμένη από το οριζόντιο επίπεδο).

ιγμα: Να προσδιορισθεί η μέγιστη κλίση που μπορεί να δοθεί
.ν ανοικτό αγωγό τραπεζοειδούς διατομής με πλάτος πυθμένα

Παράδειγμα :

- Ανοικτός αγωγός τραπεζοειδούς διατομής
- Πλάτος πυθμένα $b = 8\ m$, βάθος ροής $h = 2\ m$,
- Κλίση πρανών $m = 1.5$ $(\sigma\varphi\varphi = 1.5)$
- Υλικό αδρό και γωνιώδες με $d_{75} = 1.5\ cm$
- Μέγιστη κλίση του αγωγού = ;

Λύση

- Μέγιστη συρτική τάση στον πυθμένα :

$$\tau_m = 0.97\ \rho g h S_o = 1940\ S_o \quad [kg^*/m^2]$$

(από σχετικό πίνακα για $b/h = 4$ και $m = 1.5$)

- Μέγιστη συρτική τάση στα πρανή :

$$\tau_m' = 0.75\ \rho g h S_o' = 1500\ S_o' \quad [kg^*/m^2]$$

(από τον ίδιο πίνακα)

- Κρίσιμη συρτική τάση στον πυθμένα :

$$\tau_{ocr} = 0.8 \times 1.5 = 1.2 \quad kg^*/m^2$$

- Κρίσιμη συρτική τάση στα πρανή :

για $d = 1.5\ cm \rightarrow \vartheta = 35°$ (από σχετικό διάγραμμα)

για $\vartheta = 35°$ και $m = 1.5$ $(\varphi \simeq 33°) \rightarrow K = 0.3$ (από διάγραμμα)

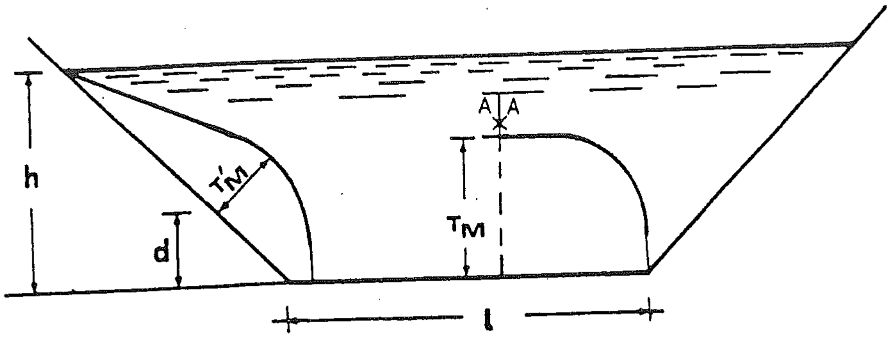
$$\tau_{ocr}' = 0.3 \times \tau_{ocr} = 0.3 \times 1.2 = 0.36 \quad kg^*/m^2$$

- Πυθμένας χωρίς μεταφορά υλών :

$$\tau_m < \tau_{ocr} \quad \text{ή} \quad 1940\ S_o < 1.2 \quad \text{ή} \quad S_o < 0.62\ ‰$$

- Πρανή χωρίς μεταφορά υλών :

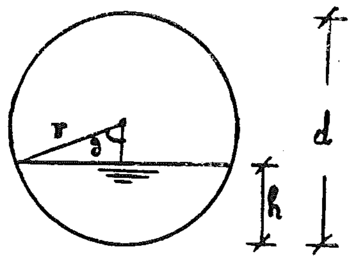
$$\tau_m' < \tau_{ocr}' \quad \text{ή} \quad 1500\ S_o' < 0.36 \quad \text{ή} \quad S_o' < 0.24\ ‰$$



m → / $\frac{l}{h}$ ↓	2/1			3/2			(ορθογωνική) 0		
	K_M	K'_M	K_d	K_M	K'_M	K_d	K_M	K'_M	K_d
0*	0	0.650	0.3	0	0.565	0,3	0	0	-
1	0,780	0.730	-	0,780	0,695	-	0.372	0.468	1.0
2	0.890	0.760	0,2	0,890	0,735	0.2	0.686	0.686	1,0
3	0.940	0.760	-	0,940	0.743	-	0,870	0.740	1,0
4	0,970	0.770	0.2	0.970	0,750	0,2	0.936	0.744	1.0
6	0.980	0.770	-	0.980	0.755	-	-	-	-
8	0,990	0.770	0.2	0.990	0.760	0.2	-	-	-

Πίνακας 3 Τραπεζοειδής ανοικτός αγωγός και κατανομή της συρτικής δύναμης
Μέγιστηδύναμη στον πυθμένα $\tau_m = K_m \rho g h S$
Μέγιστη δύναμη στα πρανή $\tau'_m = K'_m \rho g h S$
Στον πυθμένα το τ_m εξασκείται στο μέσο.
Στα πρανή το τ'_m εξασκείται σε απόσταση $d = \kappa_d h$ από τον πυθμένα.

8. ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ ΜΕ ΜΕΡΙΚΗ ΠΛΗΡΩΣΗ



Κυκλική διατομή

$$A = r^2\theta - 2\left(\frac{1}{2}\, r\,\eta\mu\theta\, r\,\sigma\upsilon\nu\theta\right) =$$

$$= r^2(\theta - \eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta) = r^2\left(\theta - \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\right)$$

$$P = 2\theta r \qquad \theta : \text{σε ακτίνια}$$

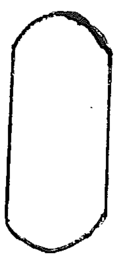
$$u = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = \frac{1}{n}\left[\frac{r^2\left(\theta - \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\right)}{2\theta r}\right]^{2/3} S_o^{1/2}$$

$$Q = u\,A$$

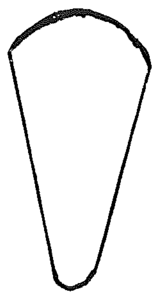
$$Q = \frac{1}{n}\left[\frac{r^2\left(\theta - \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\right)}{2\theta r}\right]^{2/3} S_o^{1/2}\, r^2\left(\theta - \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\right)$$

$Q \to max$ για $\theta = 151.2^\circ$ ή για $h/d = 0.938$

$u \to max$ για $h/d = 0.81$

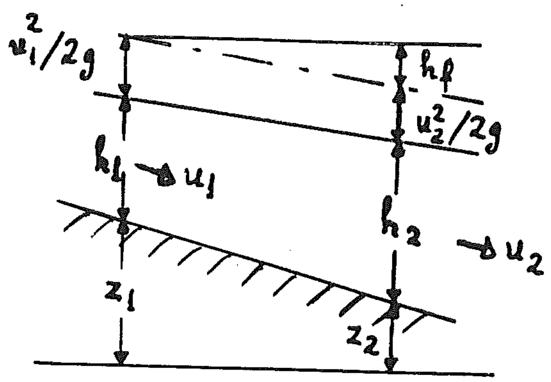


Ωοειδής διατομή



Διατομή σχήματος V

9. ΕΙΔΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ



Ολικό φορτίο ή ύψος ενέργειας: $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{u^2}{2g}$

Για ανοικτούς αγωγούς: $H = h + z + \frac{u^2}{2g}$

- μικρή κλίση
- ροϊκές γραμμές ευθείες και παράλληλες

$$\boxed{E = h + \frac{u^2}{2g}}$$

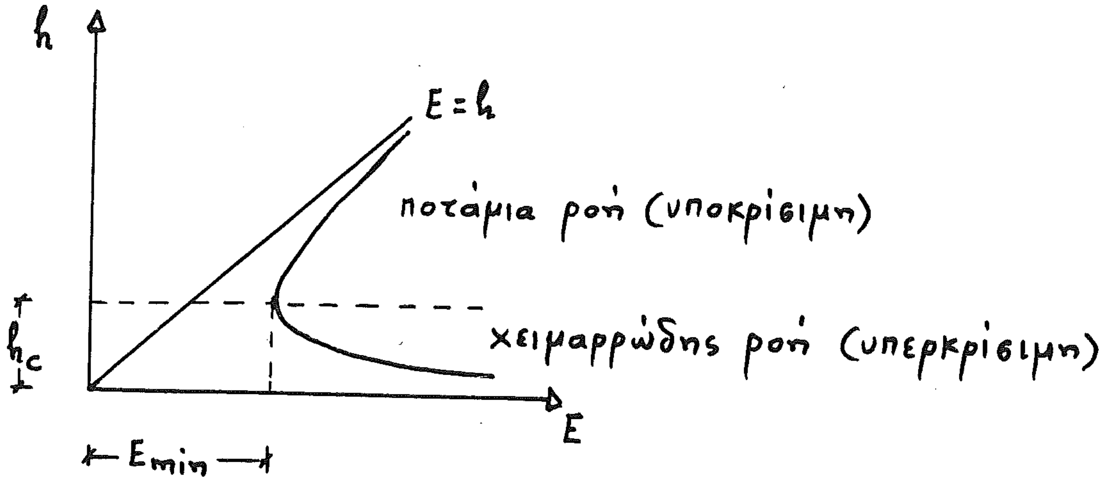
E: ειδική ενέργεια

$$u = \frac{Q}{A} \Rightarrow E = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Ανοικτοί αγωγοί ορθογωνικής διατομής

- Πλάτος b
- $q = \frac{Q}{b}$ $\quad$ q: παροχή ανά μονάδα πλάτους
- $E = h + \frac{Q^2}{2g(bh)^2} = h + \frac{1}{2g}\frac{q^2}{h^2}$
- Τρεις μεταβλητές: E, h, q
- Διάκριση δύο περιπτώσεων:
  - $q =$ σταθ., E και h μεταβλητά
  - $E =$ σταθ., q και h μεταβλητά

q : σταθ.



$$u = \frac{Q}{bh} = \frac{q}{h} \qquad E = h + \frac{u^2}{2g}$$

- Όταν $h \to 0$, τότε $u \to \infty$ και $E \to \infty$
- Όταν $h \to \infty$, τότε $u \to 0$ και $E \to h$
- E_{min} για h_c : κρίσιμο βάθος ροής
- για οποιαδήποτε άλλη τιμή E δύο τιμές του h : εναλλακτικά βάθη ροής

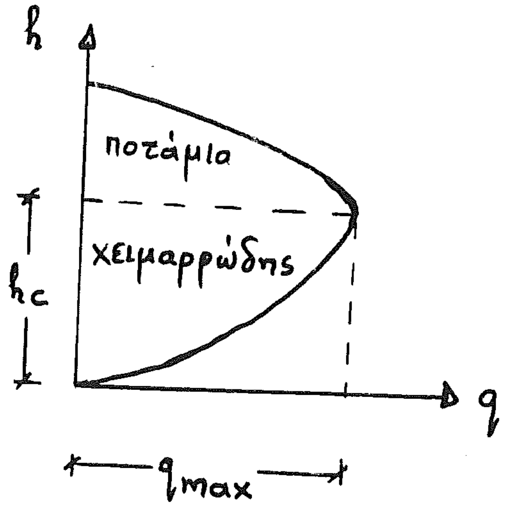
- $$E = h + \frac{1}{2g}\,\frac{q^2}{h^2} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial h} = 1 + \frac{q^2}{2g}\left(-\frac{2}{h^3}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 0 \Rightarrow \frac{q^2}{gh^3} = 1 \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

$$\boxed{h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}}$$

$$\boxed{E_{min} = \frac{3}{2}\,h_c}$$

E = σταθ.



$$E = h + \frac{1}{2g}\frac{q^2}{h^2} \Rightarrow q^2 = 2gh^2(E-h) \Rightarrow q^2 = 2g(Eh^2 - h^3)$$

$$2q\frac{\partial q}{\partial h} = 2g(2Eh - 3h^2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial h} = 0 \Rightarrow 2Eh - 3h^2 = 0 \Rightarrow 2E = 3h \Rightarrow h = \frac{2}{3}E$$

$$\boxed{h_c = \frac{2}{3}E}$$

h_c : κρίσιμο βάθος ροής

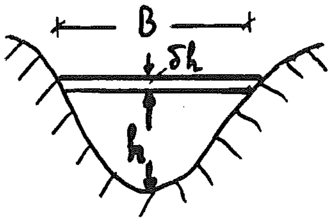
Κρίσιμη ταχύτητα: (u_c)

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \Rightarrow h_c^3 = \frac{q^2}{g}$$

$$q = uh \Rightarrow h_c^3 = \frac{u_c^2 h_c^2}{g} \Rightarrow u_c^2 = g h_c$$

$$\boxed{u_c = \sqrt{g h_c}}$$

Ανοικτοί αγωγοί μη ορθογωνικής διατομής



$$E = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$\frac{dE}{dh} = 1 + \frac{Q^2}{2g}\left(-\frac{2}{A^3}\,\frac{dA}{dh}\right)$$

B : πλάτος της διατομής στην επιφάνεια του νερού

$$dA = B\,dh \Rightarrow \frac{dA}{dh} = B$$

$$\frac{dE}{dh} = 1 + \frac{Q^2}{2g}\left(-\frac{2B}{A^3}\right) \Rightarrow 0 = 1 + \frac{Q^2}{g}\left(-\frac{B}{A^3}\right) \Rightarrow$$

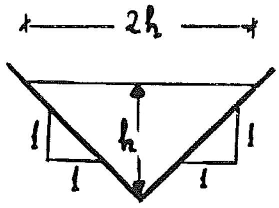
$$\boxed{\frac{Q^2}{g} = \left(\frac{A^3}{B}\right)_{h=h_c}}$$

$$Q = A_c u_c$$

$$\frac{A_c^2 u_c^2}{g} = \frac{A_c^3}{B_c}$$

$$\boxed{u_c = \sqrt{\frac{A_c g}{B_c}}}$$

Παράδειγμα:



- Αγωγός τριγωνικής διατομής
- Σταθερή και ομοιόμορφη ροή
- $Q = 0.3962 \ m^3/s$
- Κλίση πρανών 1:1
- Κατά μήκος κλίση πυθμένα $S_o = 0.006$
- $n = 0.012$ (συντελεστής Manning)
- Ροή υπερκρίσιμη ή υποκρίσιμη;

Λύση

- Βρεχόμενη επιφάνεια (υγρή διατομή): $A = \frac{1}{2}(2h)h = h^2$
- Βρεχόμενη περίμετρος: $P = 2\sqrt{2}\,h = 2.83h$
- $Q = uA \Rightarrow Q = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} A$

$$0.3962 = \frac{1}{0.012}\left(\frac{h^2}{2.83h}\right)^{2/3} 0.006^{1/2}\, h^2 \Rightarrow$$

$\underline{h \simeq 0.45 \ m}$ ομοιόμορφο βάθος ροής

$$\boxed{\frac{Q^2}{g} = \left(\frac{A^3}{B}\right)_{h=h_c}}$$

$$\frac{0.3962^2}{9.81} = \frac{(h_c^2)^3}{2h_c} \Rightarrow 0.032 = h_c^5 \Rightarrow$$

$\underline{h_c \simeq 0.50 \ m}$ κρίσιμο βάθος ροής

$h < h_c \Rightarrow$ υπερκρίσιμη ροή

Κρίσιμες συνθήκες

Κρίσιμη ταχύτητα : $\boxed{u_c = \sqrt{g h_c}}$ (h_c : κρίσιμο βάθος ροής)

u_c : Ταχύτητα διαδόσεως επιφανειακών κυμάτων σε αβαθή υγρά

Όταν $u < u_c$ ⇒ υποκρίσιμη ροή, ένα επιφανειακό κύμα μπορεί να μεταδοθεί και προς τα ανάντη και προς τα κατάντη

Όταν $u > u_c$ ⇒ υπερκρίσιμη ροή, ένα επιφανειακό κύμα μεταδίδεται μόνο προς τα κατάντη

Όταν $u = u_c$ ⇒ στάσιμο κύμα

Για κρίσιμες συνθήκες $\boxed{F_r = \dfrac{u}{\sqrt{g h_c}} = 1}$

Όταν $F_r < 1$ ⇒ υποκρίσιμη ροή, όταν $F_r > 1$ υπερκρίσιμη ροή

Κρίσιμη κλίση S_c : Κλίση του πυθμένα ενός ανοικτού αγωγού για την οποία υπάρχει κρίσιμη ομοιόμορφη ροή.

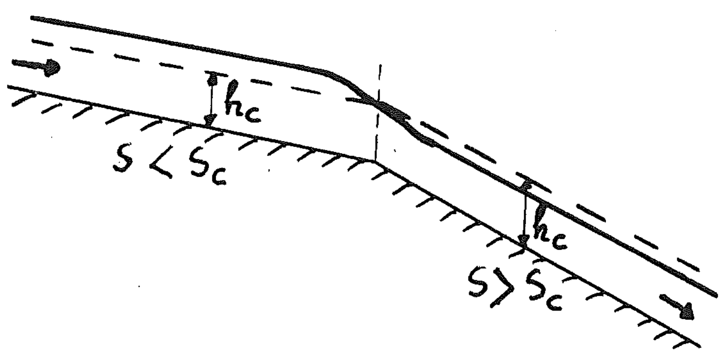
Όταν $S < S_c$ ⇒ υποκρίσιμη (ομοιόμορφη) ροή ⇒ μικρή κλίση

Όταν $S > S_c$ ⇒ υπερκρίσιμη (ομοιόμορφη) ροή ⇒ απότομη κλίση

10. ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΡΟΗΣ

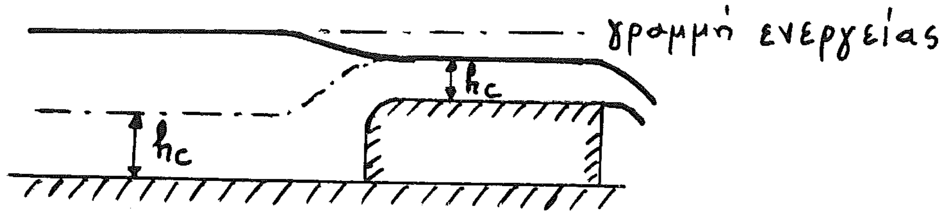
- Σε διατομές του ανοικτού αγωγού, όπου έχουμε μετάβαση από ποτάμια σε χειμαρρώδη ροή (ή αντίστροφα):
  - αλλαγή κλίσης του πυθμένα του αγωγού
  - αναβαθμός τοποθετημένος στον πυθμένα
  - σύγκλιση του πλάτους του αγωγού

Αλλαγή κλίσης του πυθμένα



- Σε απότομη αλλαγή της κλίσης η καμπυλότητα των ροϊκών γραμμών είναι μεγάλη, οπότε δεν ισχύει η παραδοχή της υδροστατικής κατανομής της πίεσης.

Εκχειλιστής πλατειάς στέψης



- Ανάντη του αναβαθμού $h > h_c \Rightarrow$ ποτάμια ροή
- Πάνω από τον εκχειλιστή κρίσιμη ροή $\Rightarrow h_c$
- Για ορθογωνική διατομή (όταν q σταθ.):

$$\boxed{h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}} \qquad \left(\text{όπου } q = \frac{Q}{b}\right)$$

$$q = \sqrt{g h_c^3} \quad \Rightarrow \text{μέτρηση της παροχής}$$

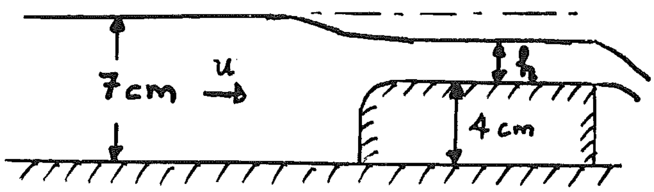
$$h_c = \frac{2}{3}E \Rightarrow q = \sqrt{g\left(\frac{2E}{3}\right)^3} \Rightarrow \boxed{Q = b\sqrt{g\left(\frac{2E}{3}\right)^3}}$$

- Πάνω από τον εκχειλιστή: $E = h + \dfrac{u^2}{2g}$
- Εάν u πολύ μικρό, τότε $E \simeq h$

$$\boxed{Q = b\sqrt{g\left(\frac{2h}{3}\right)^3}}$$

- Εάν u δεν είναι αμελητέο, τότε $h = E - \dfrac{u^2}{2g}$

Παράδειγμα:



- Πλάτος αγωγού $b = 40$ cm
- Κρίσιμες συνθήκες πάνω από τον εκχειλιστή
- $Q = ;$
- Να γίνει διόρθωση της ταχύτητας προσέγγισης
- Να αγνοηθεί η τριβή και η κυρτότητα των ροϊκών γραμμών

Λύση

Πρώτη προσέγγιση : $u \to$ αμελητέα

$$E \simeq h = 7 - 4 = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$$

$$Q = b\sqrt{g\left(\frac{2h}{3}\right)^3} = 0.4\sqrt{9.81\left(\frac{2\times 0.03}{3}\right)^3} = 3.543\times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

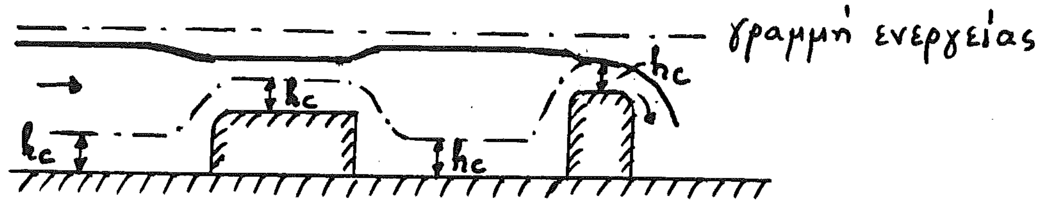
Ταχύτητα προσέγγισης : $u = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{3.543\times 10^{-3}}{0.4\times 0.07} = 0.126 \text{ m/s}$

$$\frac{u^2}{2g} = 0.809 \text{ mm}$$

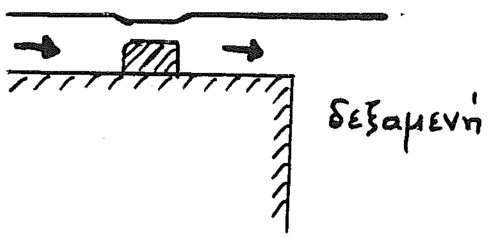
$$E = h + \frac{u^2}{2g} = 30 + 0.809 = 30.809 \text{ mm} \simeq 30.81 \text{ mm}$$

$$Q = b\sqrt{g\left(\frac{2E}{3}\right)^3} = 0.4\sqrt{9.81\left(\frac{2\times 0.03081}{3}\right)^3} = 3.688\times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

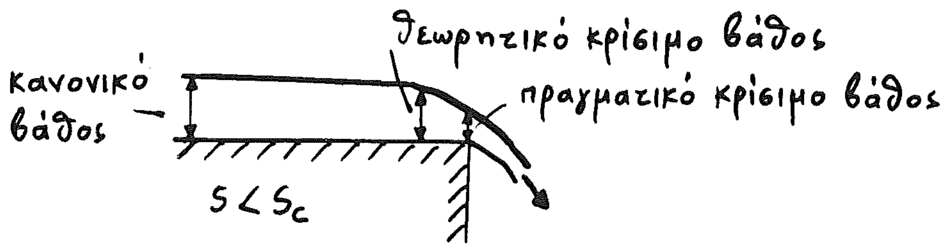
Βυθισμένος εκχειλιστής



- Η ροή πάνω από τον εκχειλιστή πλατειάς στέψης δεν είναι κρίσιμη ⇒ βυθισμένος εκχειλιστής
- Πτώση του βάθους ροής πάνω από τον εκχειλιστή

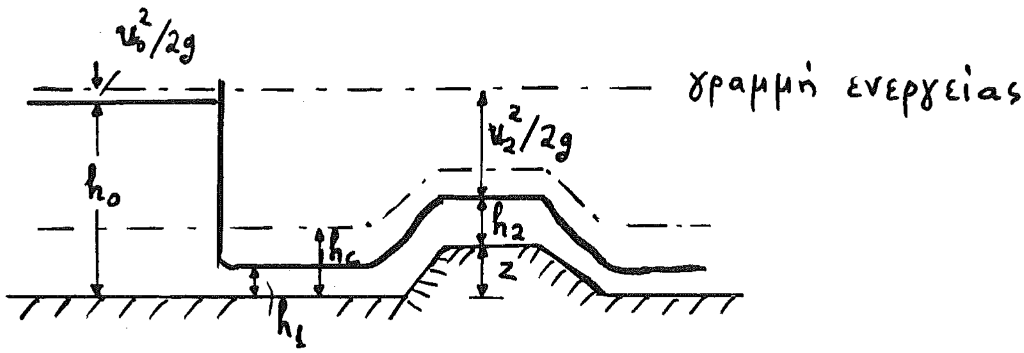


όμοια περίπτωση όπως προηγουμένως



- Ελεύθερη πτώση από μακρύ ανοικτό αγωγό μικρής κλίσης
- Στην γωνία καμπύλες ροϊκές γραμμές, δεν ισχύει η σχέση
$$E = h + \frac{u^2}{2g}$$

Χειμαρρώδης ροή προσεγγίζουσα εκχειλιστή ή αναβαθμό



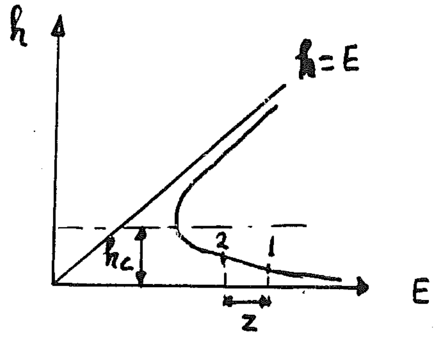
- u_0 αμελητέο

$$\boxed{q = C_d\, h_1 \sqrt{2g\,(h_0 - h_1)}}$$

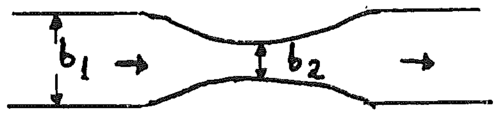
q : παροχή (ανά μονάδα πλάτους) από το θυρόφραγμα

C_d : συντελεστής παροχής (0.95 έως 1.0)

- Μείωση της ειδικής ενέργειας E πάνω από τον εκχειλιστή κατά z



Υδαταγωγός Venturi



- Σύγκλιση των τοιχωμάτων του ανοικτού αγωγού
- Η ποτάμια ροή πριν από τη στένωση γίνεται κρίσιμη στη στένωση (λαιμός)

$$u_2 = \sqrt{g h_2} \qquad \text{(ορθογωνική διατομή)}$$

$$Q = b_2 h_2 \sqrt{g h_2} \Rightarrow \text{μέτρηση παροχής}$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} = h_2 + \frac{g h_2}{2g} = \frac{3}{2} h_2 \qquad \text{(μικρές απώλειες ενεργείας)}$$

$$h_2 = \frac{2}{3}\left(h_1 + \frac{u_1^2}{2g}\right)$$

$$Q = b_2 \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(h_1 + \frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2}$$

$$Q = C_d\, b_2 \sqrt{g} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \left(h_1 + \frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2}$$

$C_d = 0.95$ έως 0.99 (απώλειες της ροής του ρευστού)

11. ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

(Εξίσωση Bernoulli)

- Κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής

- Για τέλεια ρευστά (αμελητέες ιξώδεις δυνάμεις):

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + z_2}$$

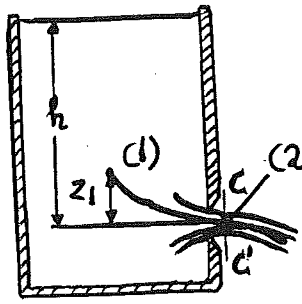
- Για πραγματικά ρευστά (με ιξώδεις δυνάμεις):

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + h_f}$$

h_f : απώλειες ενεργείας ανά μονάδα βάρους του ρευστού

Ένα μέρος της διαθέσιμης ενέργειας στο σημείο 1 (της ροϊκής γραμμής) μετατρέπεται σε θερμότητα κατά τον ρου από το σημείο 1 στο σημείο 2.

Ροή διά μέσου στομίων



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + 0$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{u_2^2}{2g} \Rightarrow \boxed{u_2 = \sqrt{2gh}}$$ ιδεατή τιμή

Πραγματική τιμή της ταχύτητας:

$$\boxed{u_2 = C_v \sqrt{2gh}}$$

C_v = συντελεστής ταχύτητας (λόγος πραγματικής προς την ιδεατή ταχύτητα)

$Q = u_2 A_2$ $\qquad A_2 = C_c A_{στομ.}$ $\qquad C_c$: συντελεστής σύγκλισης

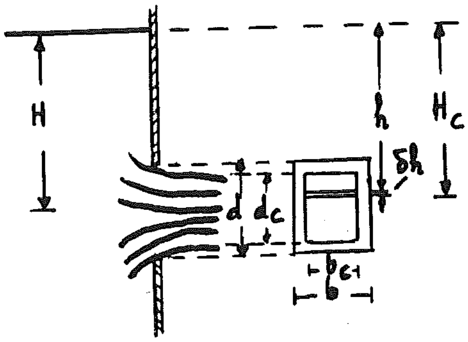
$$Q = C_v \sqrt{2gh}\, C_c A_{στομ.}$$

$$C_d = C_v C_c \Rightarrow \boxed{Q = C_d \sqrt{2gh}\, A_{στομ.}}$$

C_d : συντελεστής παροχής

$$Q = C_d\, Q_{ιδεατό}$$

Ορθογωνικό στόμιο



$$\delta A = b_c \, \delta h$$

$$\delta Q = u \, \delta A = C_v \sqrt{2gh} \; b_c \, \delta h$$

$$Q = C_v \, b_c \sqrt{2g} \int_{H_c - \frac{d_c}{2}}^{H_c + \frac{d_c}{2}} h^{1/2} \, dh$$

$$Q = \frac{2}{3} C_v \, b_c \sqrt{2g} \left[\left(H_c + \frac{d_c}{2}\right)^{3/2} - \left(H_c - \frac{d_c}{2}\right)^{3/2} \right]$$

$$\boxed{Q = \frac{2}{3} C_d \, b \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{d}{2}\right)^{3/2} - \left(H - \frac{d}{2}\right)^{3/2} \right]}$$

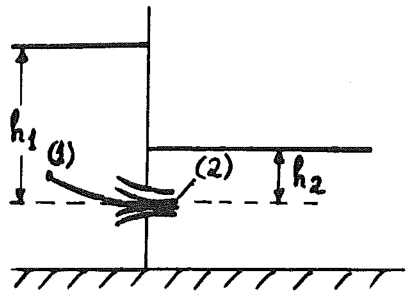
Για οξύ σχήμα χειλέων στομίου και κυκλική διατομή :

$C_v = 0.97 - 0.99$

$C_c = 0.61 - 0.66$

$C_d = 0.59 - 0.65$

Βυθισμένο στόμιο



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = h_1$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = h_2$$

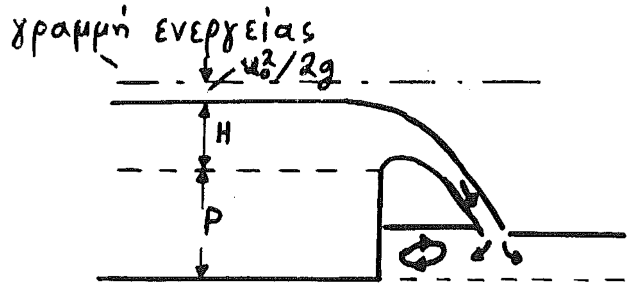
$$z_2 = 0$$

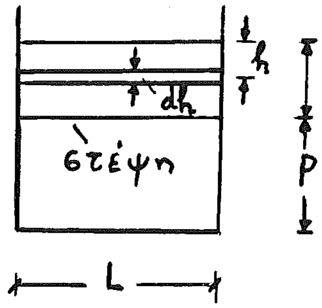
$$u_1 = 0$$

$$h_1 = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_2 = \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}}$$

$$\boxed{Q = C_d \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}\; A}$$

Ορθογωνικοί εκχειλιστές (λεπτής στέψεως)





- Μέτρηση της παροχής
- Προηγουμένως μέτρηση του ύψους H σε μία απόσταση από τη στέψη τουλάχιστον 4H
- Μήκος της στέψης = Πλάτος του ανοικτού αγωγού

$$dA = L\,dh \qquad dQ = u\,dA \qquad dQ = \sqrt{2gh}\;L\,dh$$

$u = \sqrt{2gh}$: ιδανική ταχύτητα, όταν $u_o \simeq 0$

$$dQ = L\sqrt{2g}\;h^{1/2}dh$$

$$Q_i = L\sqrt{2g}\int_0^H h^{1/2}dh$$

Q_i : ιδανική παροχή

$$Q_i = \frac{2L}{3}\sqrt{2g}\;H^{3/2}$$

$$\boxed{Q = C_d Q_i = C_d\,\frac{2}{3}\sqrt{2g}\;L\,H^{3/2}}$$

Q: πραγματική παροχή

C_d : συντελεστής παροχής
(απώλειες ενεργείας λόγω τριβών, σύγκλιση του στρώματος νερού

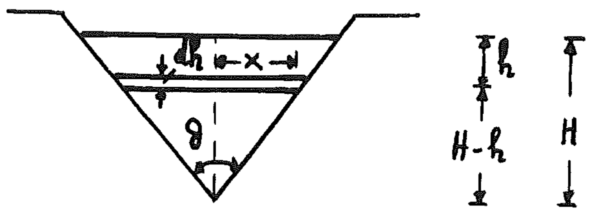
Εμπειρική σχέση (βάσει πειραμάτων):

$$C_d = 0.605 + \frac{1}{305H} + 0.08\,\frac{H}{P}$$

(ισχύει για $H/P < 0.4$)

Τριγωνικοί εκχειλιστές

- Οι ορθογωνικοί εκχειλιστές δεν είναι κατάλληλοι για τη μέτρηση πολύ μικρών παροχών.



$$dQ = C_d \sqrt{2gh}\, dA$$

$$dA = 2x\, dh$$

$$x = (H-h)\, \varepsilon\varphi \frac{\theta}{2}$$

$$Q = C_d\, 2\sqrt{2g}\, \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2} \int_0^H (H-h)\, h^{1/2}\, dh$$

$$\boxed{Q = C_d \frac{8}{15}\sqrt{2g}\, \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\, H^{5/2}}$$

$$Q = K H^{5/2}$$

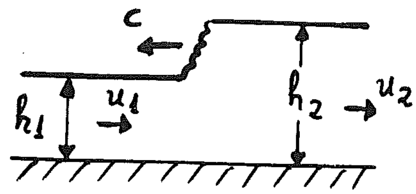
- Διάγραμμα (βάσει πειραμάτων) : $C_d = f(H, \theta)$

12. ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ (ΟΡΜΗΣ)

Κυμάνσεις και ωθήσεις της ροής

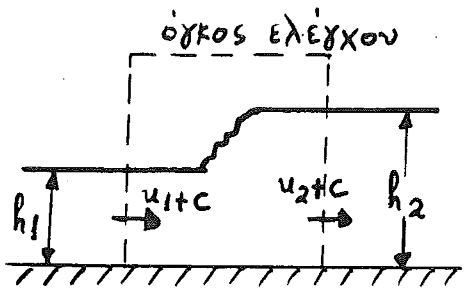
Παράδειγμα : Απότομο άνοιγμα ή κλείσιμο ενός θυροφράγματος

- Θετικό κύμα : αυξάνει το βάθος ροής
- Αρνητικό κύμα : μειώνει το βάθος ροής
- Ασταθής ροή



Θετικό κύμα διαδιδόμενο προς τα ανάντη
(από κλείσιμο θυροφράγματος)

- Η αλλαγή της ταχύτητας από u_1 σε u_2 είναι αποτέλεσμα δυνάμεως που ενεργεί πάνω στο ρευστό
- Μέγεθος δυνάμεως από την εξίσωση της ορμής



- Κινούμενο σύστημα αναφοράς με ταχύτητα c $\Rightarrow$ στάσιμο κύμα, σταθερή ροή

$$F = m\gamma$$

$$F = \left(\rho g \frac{h_1}{2}\right) h_1 - \left(\rho g \frac{h_2}{2}\right) h_2 = \rho g \frac{h_1^2}{2} - \rho g \frac{h_2^2}{2}$$

(υδροστατικές δυνάμεις)

$$m\gamma = \rho V \frac{\Delta u}{\Delta t} = \rho \frac{V}{\Delta t} \Delta u = \rho Q (u_2 - u_1)$$

$$\rho g \frac{h_1^2}{2} - \rho g \frac{h_2^2}{2} = \rho Q (u_2 - u_1)$$

$$Q = (u_1 + c) h_1 = (u_2 + c) h_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = (u_1 + c)\frac{h_1}{h_2} - c$$

$$\rho g \frac{h_1^2}{2} - \rho g \frac{h_2^2}{2} = \rho (u_1 + c) h_1 (u_2 - u_1)$$

$$\rho g \frac{h_1^2}{2} - \rho g \frac{h_2^2}{2} = \rho (u_1 + c) h_1 \left[(u_1 + c)\frac{h_1}{h_2} - c - u_1 \right]$$

$$u_1 + c = \sqrt{g h_2} \sqrt{\frac{1 + (h_2/h_1)}{2}}$$

$h_1 \simeq h_2 \simeq h$ (κύμα με μικρό ύψος)

$$u_1 + c = \sqrt{gh}$$

- Ταχύτητα διαδόσεως κύματος : $\sqrt{gh}$ (για ορθογωνική διατομή)

Υδραυλικό άλμα σε οριζόντιους αγωγούς (ορθογωνικής διατομής)

- Υδραυλικό άλμα : στάσιμο κύμα ωθήσεως $(c=0)$

$$u_1 = \sqrt{gh_2}\sqrt{\frac{1+(h_2/h_1)}{2}}$$

$$u_1 = \sqrt{gh_1}\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\sqrt{\frac{1+(h_2/h_1)}{2}}$$

$$F_{r_1} = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}\,\frac{1+(h_2/h_1)}{2}} \qquad h_2 > h_1 \Rightarrow \boxed{F_{r_1} > 1}$$

- Εξίσωση συνεχείας : $u_1 b h_1 = u_2 b h_2$ (b: πλάτος ροής)

$$u_2 = \frac{u_1 h_1}{h_2}$$

$$u_1 = \sqrt{gh_2}\sqrt{\frac{1+(h_2/h_1)}{2}}$$

$$u_2 = \sqrt{gh_2}\sqrt{\frac{1+(h_2/h_1)}{2}}\;\frac{h_1}{h_2}$$

$$F_{r_2} = \frac{u_2}{\sqrt{gh_2}} = \sqrt{\frac{(h_1/h_2)^2 + (h_1/h_2)}{2}} \qquad h_2 > h_1 \Rightarrow \boxed{F_{r_2} < 1}$$

- Υδραυλικό άλμα : απότομη μεταβολή από χειμαρρώδη σε ποτάμια ροή

Σχηματισμός τύρβης, σημαντική απώλεια ενέργειας

$$u_1 = \sqrt{g h_2}\sqrt{\frac{1+(h_2/h_1)}{2}}$$

$$u_1^2 = g h_2 \, \frac{1+\frac{h_2}{h_1}}{2} \Rightarrow h_2^2 + h_1 h_2 - \frac{2u_1^2 h_1}{g} = 0 \Rightarrow$$

$$h_1 h_2^2 + h_1^2 h_2 - \frac{2q^2}{g} = 0$$ (συμμετρική εξίσ. ως προς h_1 και h_2)

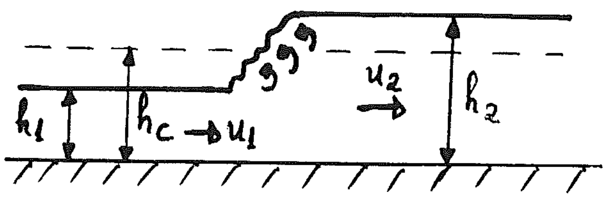
$$\left(a x^2 + \beta x + \gamma = 0 \qquad x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \right)$$

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} \pm \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2q^2}{g h_1}}$$

$$\boxed{h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2u_1^2 h_1}{g}}}$$ (ανάλογη λύση για το h_1)

h_1, h_2 : συζυγή βάθη

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_1^2}}$$



Εξίσωση ενέργειας :

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_j$$ h_j : απώλειες ενέργειας

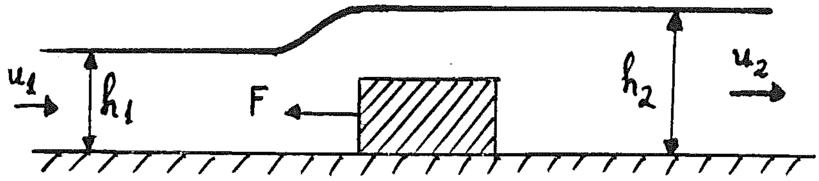
$$h_j = h_1 - h_2 + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} = h_1 - h_2 + \frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)$$

$$h_j = h_1 - h_2 + \left(\frac{h_1 h_2^2 + h_1^2 h_2}{4}\right)\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)$$

$$\boxed{h_j = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}}$$

- Σημαντική απώλεια ενέργειας λόγω του υδραυλικού άλματος
- Εκμετάλλευση του φαινομένου αυτού σε διάφορες κατασκευές για την καταστροφή τμήματος της κινητικής ενέργειας (αύξηση της θερμοκρασίας του νερού)

Παράδειγμα (Νόμος διατήρησης ποσότητας κίνησης)



- Εύρεση δύναμης F που ασκεί ένα εμπόδιο (βάθρο γέφυρας, αγκυροβολημένο πλοίο) πάνω στο νερό.
- Αμελητέες δυνάμεις τριβής με τα τοιχώματα
- Μοναδιαίο πλάτος αγωγού

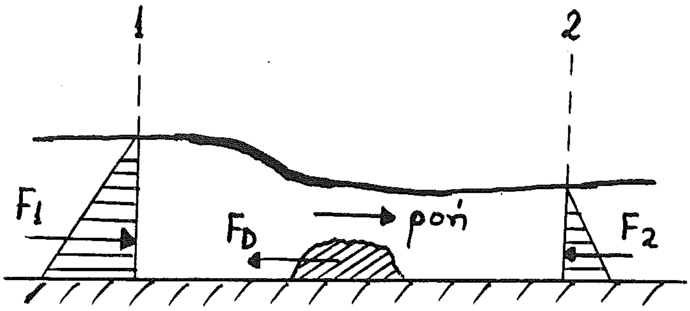
$$\rho g \frac{h_1}{2} h_1 - F - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 = \rho Q (u_2 - u_1)$$

$$\rho g \frac{h_1}{2} h_1 - F - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 = \rho q (u_2 - u_1)$$

- Εάν η ανάντη ροή είναι ποτάμια, τότε $h_2 < h_1$
- Εάν η ανάντη ροή είναι χειμαρρώδης, τότε $h_2 > h_1$

(αποτέλεσμα της δύναμης F)

Ειδική δύναμη



Νόμος της διατήρησης της ποσότητας κινήσεως (ορμής):

$$-F_\tau + F_g + F_1 - F_2 - F_D = \rho Q (u_2 - u_1)$$

F_τ : δύναμη τριβής στον πυθμένα και παρειές του αγωγού

F_g : συνιστώσα στη διεύθυνση του πυθμένα του βάρους του νερού

F_1 : υδροστατική δύναμη στη διατομή 1

F_2 : υδροστατική δύναμη στη διατομή 2

F_D : δύναμη ασκούμενη από το εμπόδιο στο νερό

$\rho Q u_1$: ώθηση (ποσότητα κινήσεως στη μονάδα χρόνου) στη διατομή 1

$\rho Q u_2$: ώθηση στη διατομή 2

$$F_1 = \rho g \bar{h}_1 A_1 \qquad F_2 = \rho g \bar{h}_2 A_2$$

$$\frac{-F_\tau + F_g - F_D}{\rho g} = \left(\frac{Q u_2}{g} + A_2 \bar{h}_2\right) - \left(\frac{Q u_1}{g} + A_1 \bar{h}_1\right)$$

$$u = Q/A \Rightarrow \frac{-F_\tau + F_g - F_D}{\rho g} = \left(\frac{Q^2}{g A_2} + A_2 \bar{h}_2\right) - \left(\frac{Q^2}{g A_1} + A_1 \bar{h}_1\right)$$

$$\boxed{M = \frac{Q^2}{gA} + A\bar{h}}$$

$\bar{h}$: απόσταση κέντρου βάρους της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια

M : ειδική δύναμη [δύναμη/ειδ. βάρος]

$$\frac{F_g - F_\tau - F_D}{\rho g} = M_2 - M_1$$

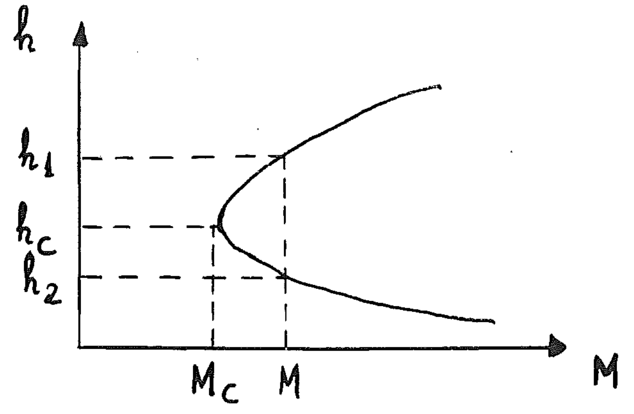
- Για οριζόντιο αγωγό $F_g = 0$
- Για μικρή απόσταση των διατομών 1 και 2 $F_\tau \simeq 0$

$$-\frac{F_D}{\rho g} = M_2 - M_1$$

- Για ορθογωνική διατομή $q = \frac{Q}{b}$ $\bar{h} = \frac{h}{2}$

$$\boxed{M = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}}$$

M : ειδική δύναμη ανά μονάδα πλάτους



q : δεδομένο

- Ανάλογο προς το διάγραμμα ειδικής ενέργειας

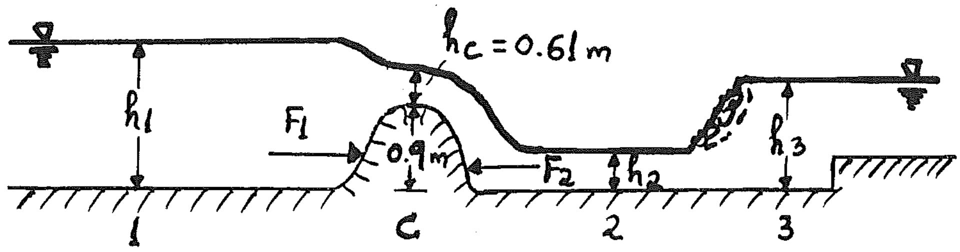
$h \to \infty \qquad M \to \infty$

$h \to 0 \qquad M \to \infty$

$$\frac{dM}{dh} = -\frac{q^2}{gh^2} + h = 0 \quad \Rightarrow \boxed{h = h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}} \Rightarrow M_{min}$$

h_1, h_2 : συζυγή βάθη

Παράδειγμα : Υδραυλικό άλμα με αναβαθμό



- Διώρυγα ορθογωνικής διατομής πλάτους $b = 3.0$ m
- Αναβαθμός ύψους 0.90 m ($\Delta z = 0.90$ m)
- Πάνω από τον αναβαθμό κρίσιμο βάθος ροής $h_c = 0.61$ m

Ζητούνται :

α) η παροχή της διώρυγας

β) Τα βάθη ροής h_1 και h_2 ανάντη και κατάντη του αναβαθμού

γ) Το βάθος h_3 κατάντη του υδραυλικού άλματος

δ) Η δύναμη που ασκείται από το νερό στον αναβαθμό

Λύση

α) $$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \Rightarrow q = \sqrt{g h_c^3} = \sqrt{9.81 \times 0.61^3} = 1.49 \ m^3/s/m$$

$$Q = qb = 1.49 \times 3.0 = 4.47 \ m^3/s$$

β) Εξίσωση ενέργειας στις θέσεις 1, C, 2 (αμελητέες απώλειες):

$$z_1 + h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \Delta z + h_c + \frac{u_c^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$u_c = \sqrt{g h_c} \qquad u_1 = \frac{q}{h_1} \qquad u_2 = \frac{q}{h_2}$$

$$z_1 = z_2 = 0$$

$$h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} = \frac{3}{2} h_c + 0.9 = h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2}$$

$$h_1 + \frac{0.1131}{h_1^2} = 1.815 = h_2 + \frac{0.1131}{h_2^2}$$

$$h^3 - 1.815 h^2 + 0.1131 = 0$$

$$h_1 = 1.78 \text{ m} \qquad h_2 = 0.27 \text{ m}$$

γ) $$\frac{h_3}{h_2} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_2^2}\right)$$

$$Fr_2 = \frac{u_2}{\sqrt{gh_2}} = \frac{q}{h_2\sqrt{gh_2}} = 3.38$$

$$\frac{h_3}{h_2} = 4.30 \Rightarrow h_3 = 4.30 \times 0.27 = 1.16 \text{ m}$$

δ) <u>Εξίσωση ποσότητας κίνησης στις διατομές 1 και C:</u>

$$P_1 - P_c - F_1 = \rho Q (u_c - u_1)$$

$$u_1 = q/h_1 = 0.84 \text{ m/s}$$

$$u_c = q/h_c = 2.44 \text{ m/s}$$

$$P_1 = \rho g \bar{h}_1 A_1 = \rho g \frac{h_1}{2} b h_1 = \rho g \frac{h_1^2}{2} b = 1000 \times 9.81 \times \frac{1.78^2}{2} \times 3.0 = 46623 \text{ N}$$

$$P_c = \rho g \frac{h_c^2}{2} b = 1000 \times 9.81 \times \frac{0.61^2}{2} \times 3.0 = 5475 \text{ N}$$

$$\rho Q (u_c - u_1) = 1000 \times 4.47 \times (2.44 - 0.84) = 7152 \text{ N}$$

$$F_1 = 33996 \text{ N} = 3465 \text{ kg}^*$$

Εξίσωση ποσότητας κίνησης στις διατομές C και 2:

$$P_c - P_2 + F_2 = \rho Q\,(u_2 - u_c)$$

$$u_2 = q/h_2 = 5.52 \text{ m/s}$$

$$P_c = 5475 \text{ N}$$

$$P_2 = \rho g \bar{h}_2 A_2 = \rho g \frac{h_2}{2}\, b h_2 = \rho g \frac{h_2^2}{2} b = 1000 \times 9.81 \times \frac{0.27^2}{2} \times 3.0 = 1073 \text{ N}$$

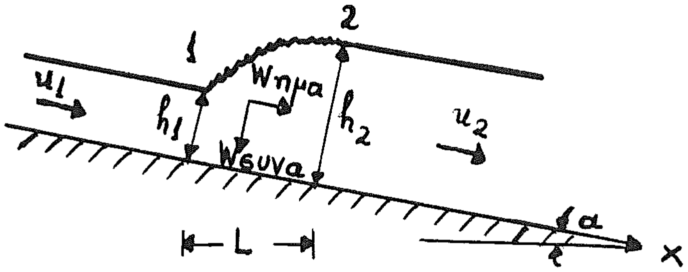
$$\rho Q (u_2 - u_c) = 1000 \times 4.47 \times (5.52 - 2.44) = 13768 \text{ N}$$

$$F_2 = 9366 \text{ N} = 955 \text{ kg}^*$$

Συνισταμένη δύναμη:

$$F = F_1 - F_2 = 3465 - 955 = 2510 \text{ kg}^*$$

Υδραυλικά άλματα σε κεκλιμένους αγωγούς



- Υδροστατικές δυνάμεις: (κατά τη διεύθυνση x)

$$P_1 = \rho g \bar{h}_1 \,\text{συν}\alpha\, A_1$$

$$P_2 = \rho g \bar{h}_2 \,\text{συν}\alpha\, A_2$$

$\bar{h}_1, \bar{h}_2$: αποστάσεις κέντρου βάρους των διατομών 1,2 αντιστοίχως από την ελεύθερη επιφάνεια

- Συνιστώσα του βάρους W του υγρού κατά τη διεύθυνση x :

$$W\,\text{ημ}\alpha = \rho g \left(\frac{A_1+A_2}{2}\right) \frac{L}{\text{συν}\alpha} N_o \,\text{ημ}\alpha = \rho g \left(\frac{A_1+A_2}{2}\right) L \,\text{εφ}\alpha\, N_o$$

N_o : συντελεστής διόρθωσης του όγκου του άλματος

- Εξίσωση ποσότητας κινήσεως (ορμής) :

(αμελητέες οι δυνάμεις τριβής και τύρβης)

$$\rho g \,\text{συν}\alpha\, (\bar{h}_1 A_1 - \bar{h}_2 A_2) + \rho g N_o \left(\frac{A_1+A_2}{2}\right) L \,\text{εφ}\alpha = \rho Q (u_2 - u_1)$$

$$\bar{h}_1 A_1 - \bar{h}_2 A_2 + N_o \left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) L \frac{\varepsilon\varphi a}{\sigma\upsilon\nu a} = Q\left(\frac{Q}{A_2} - \frac{Q}{A_1}\right)\frac{1}{g\sigma\upsilon\nu a}$$

$$\boxed{\bar{h}_1 A_1 - \bar{h}_2 A_2 + N_o \left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) L \frac{\varepsilon\varphi a}{\sigma\upsilon\nu a} = \frac{Q^2}{g\sigma\upsilon\nu a}\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 A_2}\right)}$$

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κεκλιμένους αγωγούς οποιουδήποτε γεωμετρικού σχήματος.

<u>Για κεκλιμένους αγωγούς ορθογωνικής διατομής</u>:

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2G_1^2}}$$

h_1, h_2 : συζυγή βάθη

$$G_1^2 = \frac{Fr_1^2}{\sigma\upsilon\nu a + \dfrac{N_o L \varepsilon\varphi a}{h_1\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)}}$$

13. ΒΑΘΜΙΑΙΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΡΟΗ

Ομοιόμορφη ροή : σε τεχνητούς ανοικτούς αγωγούς σταθερής διατομής και κλίσης

Ανομοιόμορφη ροή : σε φυσικούς ανοικτούς αγωγούς, όταν το σχήμα της διατομής και η κλίση του πυθμένα μεταβάλλονται κατά μήκος του αγωγού

Ανομοιόμορφη ροή → βαθμιαίως μεταβαλλόμενη
Ανομοιόμορφη ροή → ταχέως μεταβαλλόμενη

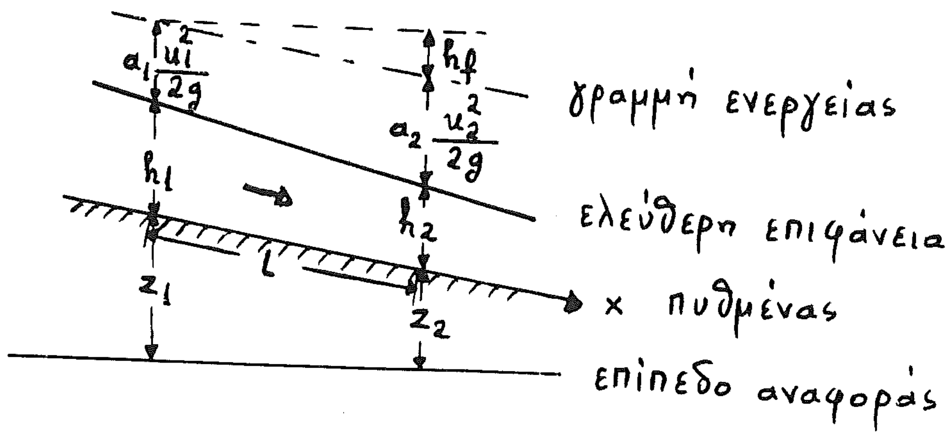
Βαθμιαίως μεταβαλλόμενη ροή : Η αλλαγή των συνθηκών ροής επεκτείνεται σε μεγάλη απόσταση

Ταχέως μεταβαλλόμενη ροή : Η αλλαγή των συνθηκών ροής εμφανίζεται απότομα (π.χ. υδραυλικό άλμα)

Παραδείγματα ανομοιόμορφης ροής : στην είσοδο και έξοδο ανοικτού αγωγού, στις αλλαγές της διατομής, σε γωνίες, σε εμπόδια στη ροή (φράγματα, εκχειλιστές)

- Συσχετισμός δυνάμεων βαρύτητας και τριβής

Εξισώσεις της βαθμιαίως μεταβαλλόμενης ροής



$$H = z + h + a\frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2g}\frac{d(u^2)}{dx}$$

Ενεργειακή κλίση : $S_f = -\frac{dH}{dx}$

Κλίση του πυθμένα : $S_o = -\frac{dz}{dx}$

Κλίση της ελεύθερης επιφάνειας : $S_w = -\frac{dz}{dx} - \frac{dh}{dx}$

Εξίσωση ενεργείας ανάμεσα στις διατομές 1 και 2 :
(σταθερή ροή)

$$z_1 + h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_f$$

$h_f = S_f L$ $\qquad\qquad z_1 - z_2 = S_o L$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} + (S_f - S_o)L$$

Εξίσωση Manning για ανομοιόμορφη ροή:

- Υποδιαίρεση του αγωγού σε επιμέρους τμήματα, έτσι ώστε οι συνθήκες ροής να είναι περίπου ίδιες σε κάθε τμήμα.

$$S_f = \left(\frac{n u_m}{R_m^{2/3}}\right)^2$$

u_m, R_m : μέσες τιμές των δύο ακραίων διατομών ενός τμήματος

$$L = \frac{\left(h_1 + \frac{u_1^2}{2g}\right) - \left(h_2 + \frac{u_2^2}{2g}\right)}{S_f - S_o}$$

$$\boxed{L = \frac{E_1 - E_2}{S_f - S_o}}$$

Κατάταξη των μορφών της ελεύθερης επιφάνειας της βαθμιαίως μεταβαλλομένης ροής

$$H = z + h + a\frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2g}\frac{d(u^2)}{dx}$$

$$\frac{d(u^2)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{q^2}{h^2}\right) = -\frac{2q^2}{h^3}\frac{dh}{dx}$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} - \frac{q^2}{g}\frac{1}{h^3}\frac{dh}{dx}$$

$$-S_f + S_o = \frac{dh}{dx}\left(1 - \frac{q^2}{gh^3}\right)$$

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - \frac{q^2}{gh^3}} = \frac{S_o - S_f}{1 - \frac{u^2}{gh}}}$$

- Όταν $dh/dx > 0$, το βάθος νερού αυξάνεται κατά μήκος του αγωγού
- " $dh/dx < 0$, " " μειώνεται " " "

$$q = uh = \frac{1}{n}h^{2/3}S_f^{1/2}h = \frac{1}{n}h_n^{2/3}S_o^{1/2}h_n$$

$$\frac{S_f}{S_o} = \left(\frac{h_n}{h}\right)^{10/3}$$

- Όταν $h > h_n$, τότε $S_f < S_o$ και αριθμητής > 0
- " $h < h_n$, " $S_f > S_o$ " " < 0

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - \frac{q^2}{gh^3}} = \frac{S_o - S_f}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3}} \qquad q^2 = g h_c^3$$

- Όταν $h > h_c$, τότε παρονομαστής > 0
- " $h < h_c$, " " < 0

$\underline{S_o > 0}$

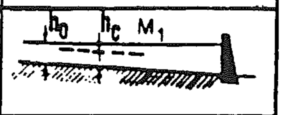
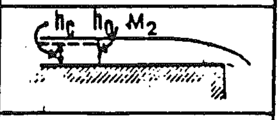
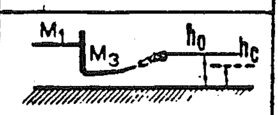
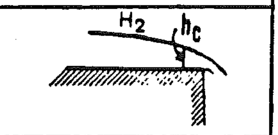
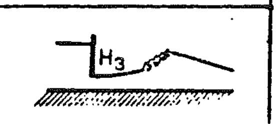
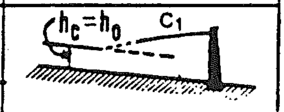
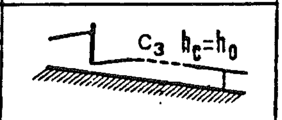
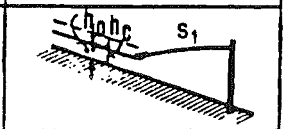
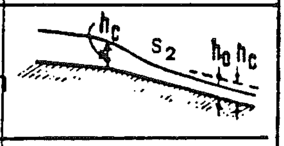
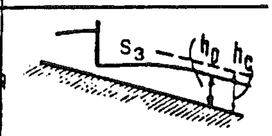
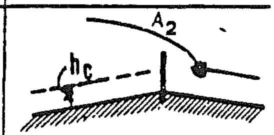
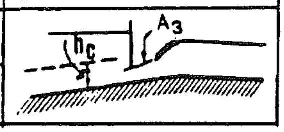
- Όταν $h_n > h_c$, τότε μικρή κλίση (mild, M)
- " $h_n < h_c$, " απότομη " (steep, S)
- " $h_n = h_c$, " κρίσιμη " (critical, C)

$\underline{S_o = 0}$: οριζόντιος αγωγός (horizontal, H)

$\underline{S_o < 0}$: ανάστροφη κλίση (adverse, A)

- Όταν $h > h_n$ και $h > h_c$, τότε ελεύθερη επιφάνεια τύπου 1
- " $h < h_n$ " $h < h_c$, " " " " 3
- " $h > h_n$ " $h < h_c$ " " " " 2
- " $h < h_n$ " $h > h_c$ " " " " 2

ΒΑΘΜΙΑΙΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΡΟΗ

κλίση	βάθος υγρού	dh/dx	τύπος καμπύλης	σύμβολο	είδος ροής	σχήμα
μικρή κλίση Mild $0 < S < S_c$	$h > h_o > h_c$	+	υπερύψωση	M_1	υποκρίσιμη	
	$h_o > h > h_c$	−	πτώση	M_2	υποκρίσιμη	
	$h_o > h_c > h$	+	υπερύψωση	M_3	υπερκρίσιμη	
οριζόντια Horizontal $S = 0$ $h_o = \infty$	$h > h_c$	−	πτώση	H_2	υποκρίσιμη	
	$h_c > h$	+	υπερύψωση	H_3	υπερκρίσιμη	
κρίσιμη Critical $S_o = S_c$ $h_o = h_c$	$h > h_c = h_o$	+	υπερύψωση	C_1	υποκρίσιμη	
	$h_c = h = h_o$		παράλληλη με πυθμένα	C_2	ομοιόμορφη	
	$h_c = h_o > h$	+	υπερύψωση	C_3	υπερκρίσιμη	
απότομη Steep $S > S_c > 0$	$h > h_c > h_o$	+	υπερύψωση	S_1	υποκρίσιμη	
	$h_c > h > h_o$	−	πτώση	S_2	υπερκρίσιμη	
	$h_c > h_o > h$	+	υπερύψωση	S_3	υπερκρίσιμη	
ανάστροφη Adverse $S < 0$ $h_o = \infty$	$h > h_c$	−	πτώση	A_2	υποκρίσιμη	
	$h_c > h$	+	υπερύψωση	A_3	υπερκρίσιμη	

Σχήμα 47 Είδη ροής σε ανοικτούς αγωγούς

Παράδειγμα ανομοιόμορφης ροής

- Αγωγός ορθογωνικής διατομής πλάτους $b = 1.8288$ m
- Βάθος ροής $h = 0.9144$ m σε μια ορισμένη διατομή
- Παροχή $Q = 4.528$ m^3/s
- Να υπολογισθεί η απόσταση από τη διατομή όπου $h = 0.9754$ m, Εάν $S_o = 0.002$ και $n = 0.012$

Λύση

$$Q = A \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2}$$

$$4.528 = (1.8288\, h_n) \frac{1}{0.012} \left(\frac{1.8288\, h_n}{1.8288 + 2h_n}\right)^{2/3} (0.002)^{1/2}$$

$$h_n = 1.0668 \text{ m}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \sqrt[3]{\frac{4.528^2}{1.8288^2 \times 9.81}} = 0.8549 \text{ m}$$

$$h_c < h < h_n$$

- υποκρίσιμη ροή, το βάθος του νερού αυξάνεται προς τα ανάντη της ροής, εκ της μελετωμένης διατομής
- Προφίλ M_2

Πίνακας 4:

$$S_f = \left(\frac{n u_m}{R_m^{2/3}}\right)^2$$

$$L = \frac{\Delta\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)}{S_f - S_o}$$

Πίνακας 4

h	A	P	R	u	$\frac{u^2}{2g}$	$h+\frac{u^2}{2g}$	αριθμητής	$u_{μέση}$	$R_{μέση}$	S_f	παρανομ.	L
		(1.8288+2h)					$\Delta(h+\frac{u^2}{2g})$					
m	m^2	m	m	m/s	m	m	m	m/s	m		$S_f - S_o$	m
0.9144	1.6722	3.6576	0.457	2.7078	0.3737	1.288						
							0.0069	2.6641	0.4608	0.00287	0.00087	7.919
0.9449	1.728	3.7186	0.4647	2.6204	0.3499	1.2949						
							0.0089	2.5794	0.4683	0.00263	0.00063	14.127
0.9754	1.7838	3.7796	0.47195	2.5384	0.3284	1.3038						ΣL=22.046