Υδραυλικά βέλτιστη διατομή και πραγματικός σχεδιασμός

Επιμέλεια: Δρ Μ. Σπηλιώτης

Αν. Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Προβληματική

- Μέγιστη υδραυλική ακτίνα για δεδομένη επιφάνεια → Ελάχιστη βρεχόμενη περίμετρος για δεδομένη επιφάνεια

  $AR^{2/3}$ => MAX
- Πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό συνθήκη ισότητας → πολλαπλασιαστής Lagrange
- Έτοιμοι πίνακες
- Ανάλυση ομοιόμορφης ροής
- **Είναι η οικονομικά βέλτιστη (στην πραγματικότητα) η υδραυλική βέλτιστη διατομή τι κάνουμε στην πράξη?**

- Για δεδομένη επιφάνεια, κλίση και συντελεστή Manning:
- **ελάχιστη βρεχόμενη περίμετρος Π --->** **μέγιστη παροχή Q**

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}, \ R = \frac{A}{\Pi}$$

Υδραυλικά βέλτιστη διατομή

Ακρότατα υπό συνθήκη

Άρα βέλτιστη υδραυλική διατομή της διατομής.

$$\begin{cases} \Pi(x_1, \ldots x_n) \to \min \\ A(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

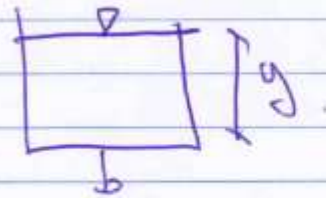
$x_1, \ldots x_n$ παράμετροι σχήματος

$\Rightarrow$ Θ. Lagrange, βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας

Ορθογωνική διατομή

16ο Χριστοδούλου

Ορθογωνικό σχήμα:



Παράμετροι σχήματος: b, y.

$$\frac{\partial(\Pi - \lambda A)}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(b + 2y - \lambda b y)}{\partial b} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda y = 0 \rightarrow \left(\lambda = \frac{1}{y}\right) ?$$

Ορθογωνική διατομή (2)

Όμοια:

$$\frac{\partial(\Pi - \lambda A)}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2 - \lambda b = 0 \Rightarrow \left(\lambda = \frac{2}{b}\right)$$

$=1$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2y}$$

Τότε: $A = 2y^2$, $\Pi = 4y$, $Fr = \left(\frac{Q^2}{4gy^5}\right)^{1/2}$.

Ορθογωνική διατομή + Manning

τότε όμως για την περίπτωση της ομοιόμορφης ροής προσδιορίζω το βάθος ροής χωρίς δοκιμές !!.

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S^{1/2} \rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{n} 2y^2 \left(\frac{2y^2}{4y}\right)^{2/3} S_0^{1/2} \rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left[\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)\left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}}\right)\right]^{3/8}$$

βάθος ομοιόμορφης ροής

υδραυλικά βέλτιστη διατομή (κάι)

ορθ/κη διατομή.

Τραπεζοειδής διατομή

Αν οι διώρυγες δεν κατασκευάζονται με μηχανικά μέσα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και η βέλτιστη από υδραυλική άποψη διατομή δηλαδή η διατομή με τη μέγιστη παροχετευτικότητα για καθορισμένο εμβαδόν υγρής διατομής. Η μέγιστη παροχετευτικότητα επιτυγχάνεται όταν η βρεχόμενη περίμετρος είναι ελάχιστη. Η μέθοδος των συντελεστών Lagrange εφαρμόζεται εδώ ειδικά για την τραπεζοειδή διατομή:

Βρεχόμενη περίμετρος : $\Pi = b + 2y\sqrt{1 + z^2}$

Βοηθητική συνάρτηση : $f = A - (b + zy)\,y \quad (= 0)$ (8.41)

Τελική συνάρτηση : $\sigma = \Pi + \lambda f$

Σκοπός : $\min \sigma$

όπου λ = συντελεστής Lagrange.

Τσακίρης, εγγειοβελτιωτικά

Τραπεζοειδής διατομή (2)

όπου λ = συντελεστής Lagrange.

Λύση.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial b} = 0 \qquad 1 - \lambda y = 0 \tag{8.42}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0 \qquad 2\sqrt{1 + z^2} - \lambda(b + 2zy) = 0 \tag{8.43}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \qquad \frac{2yz}{\sqrt{1 + z^2}} - \lambda y^2 = 0 \tag{8.44}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = 0 \qquad A = (b + zy)\,y \tag{8.45}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}}\,y, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \Pi = 2\sqrt{3}\,y, \quad A = \sqrt{3}\,y^2 \quad \text{και} \quad R = \frac{y}{2}$$

Πίνακας 4-1: Γεωμετρικά στοιχεία βέλτιστων διατομών

Διατομή	b/y_o	z	E_o	Π_o	R_o	B_o	y_μ	Fr_o
Τραπεζοειδής	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}y_o^2$	$2\sqrt{3}y_o$	$\frac{1}{2}y_o$	$\frac{4}{\sqrt{3}}y_o$	$\frac{3}{4}y_o$	$\sqrt{\frac{12Q^2}{27gy_o^5}}$
Ορθογωνική	2	0	$2y_o^2$	$4y_o$	$\frac{1}{2}y_o$	$2y_o$	y_o	$\sqrt{\frac{Q^2}{4gy_o^5}}$
Τριγωνική	--	1	y_o^2	$2\sqrt{2}y_o$	$\frac{\sqrt{2}}{4}y_o$	$2y_o$	$\frac{1}{2}y_o$	$\sqrt{\frac{2Q^2}{gy_o^5}}$
Ημικυκλική	--	--	$\frac{\pi}{2}y_o^2$	πy_o	$\frac{1}{2}y_o$	$2y_o$	$\frac{\pi}{4}y_o$	$\sqrt{\frac{512Q^2}{\pi^3gd^5}}$
Παραβολική	--	--	$\frac{4\sqrt{2}}{3}y_o^2$	$\frac{8\sqrt{2}}{3}y_o^2$	$\frac{1}{2}y_o$	$2\sqrt{2}y_o$	$\frac{2}{3}y_o$	

Χριστοδούλου και Παπαθανασιάδη, 2007

Υδραυλικά βέλτιστη διατομή+ Manning

(α) για συμμετρική βέλτιστη τραπεζοειδή διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{2^{2/3}}{3^{1/2}}\right)\left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}}\right)\right)^{3/8}$$

(β) για βέλτιστη ορθογωνική διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)\left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}}\right)\right)^{3/8}$$

(γ) για συμμετρική βέλτιστη τριγωνική διατομή:

$$y_0 = \left(2\left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}}\right)\right)^{3/8}$$

(δ) για βέλτιστη ημικυκλική διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{2^{5/3}}{\pi}\right)\left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}}\right)\right)^{3/8}$$

(ε) για βέλτιστη παραβολική διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{3}{2^{11/6}}\right)\left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}}\right)\right)^{3/8}$$

Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν μόνο για ομοιόμορφη ροή <u>ΣΕ ΥΔΡΑΥΛΙΚΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΤΟΜΗ</u> (ΜΟΝΟ)
ΜΟΝΟ σε αυτή την περίπτωση δεν απαιτούνται δοκιμές για την εύρεση του βάθους ροής για δεδομένη παροχή

Τσακίρης και Παπαθανασιάδης, 2010

Εφαρμογή

Παράδειγμα 2

Αγωγός ($n = 0.015$) μεταφέρει παροχή $Q = 20\ m^3/s$. Να διαστασιολογηθεί η διατομή τραπεζοειδούς αγωγού ως υδραυλικά βέλτιστη, όταν η κατά μήκος κλίση του είναι $S_0 = 0.0015$.

Από την εξίσωση (3.14) προκύπτει $y_0 = 2.09$ m.

(α) για συμμετρική βέλτιστη τραπεζοειδή διατομή:

$$y_0 = \left(\left(\frac{2^{2/3}}{3^{1/2}}\right)\left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}}\right)\right)^{3/8}$$

Τσακίρης, 2011

Από την εξίσωση (3.14) προκύπτει $y_0 = 2.09$ m. Από τον Πίνακα 3.3 λαμβάνομε $b = 2\,y_0/3^{1/2} = 2.41$ m.

Πίνακας 4-1: Γεωμετρικά στοιχεία βέλτιστων διατομών

Διατομή	b/y_o	z	E_o	Π_o	R_o	B_o	y_μ	Fr_o
Τραπεζοειδής	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}y_o^2$	$2\sqrt{3}y_o$	$\frac{1}{2}y_o$	$\frac{4}{\sqrt{3}}y_o$	$\frac{3}{4}y_o$	$\sqrt{\frac{12Q^2}{27gy_o^5}}$

Είναι η οικονομικά βέλτιστη (στην πραγματικότητα) η υδραυλική βέλτιστη διατομή τι κάνουμε στην πράξη?

Είναι η οικονομικά βέλτιστη (στην πραγματικότητα) η υδραυλική βέλτιστη διατομή τι κάνουμε στην πράξη? οχι

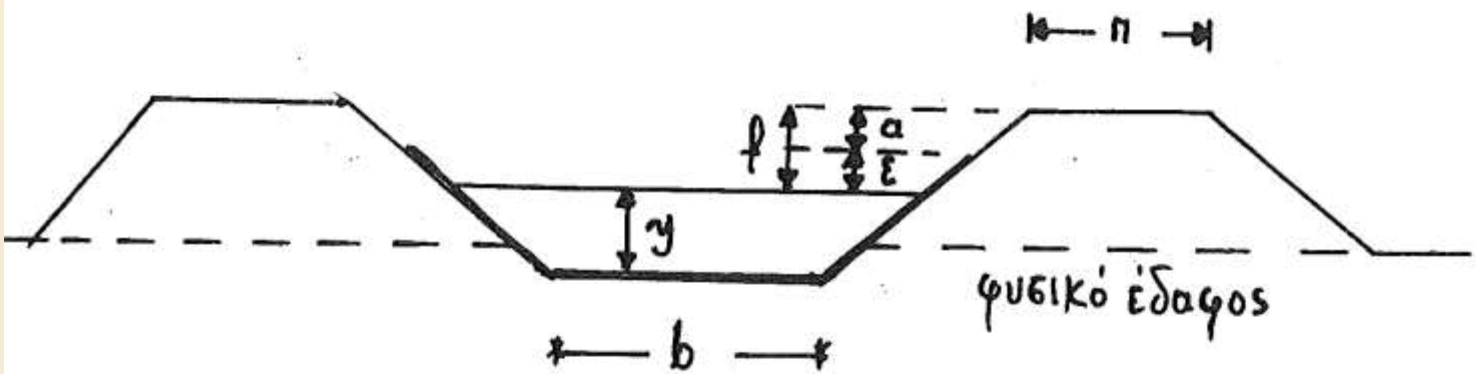
- **Η υδραυλική βέλτιστη διατομή αναφέρεται σε σταθερό κόστος και εξασφαλίζει τη μέγιστη διοχετευτικότητα. Επίσης το ελάχιστο υλικό επένδυσης της διώρυγας (Έως όμως το βάθος ροής).**
- **Δεν εξασφαλίζει όμως και την πιο οικονομική διατομή γιατί δεν λαμβάνονται υπόψη οι εκσκαφές (που εξαρτάται από το πλάτος επιφάνειας της διώρυγας στο έδαφος) ενώ προκύπτουν κλίσεις πρανών που οδηγούν σε πιο δαπανηρά υλικά (Δημητρίου, 1995) σε σχέση με τα ίδια τα προϊόντα εκσκαφής**

Κανάλια με επένδυση

- Σε πολλά χωμάτινα κανάλια χωρίς επένδυση σε ομοσπονδιακά έργα άρδευσης, οι πλευρικές κλίσεις είναι συνήθως 1,5:1. Ωστόσο, έχουν χρησιμοποιηθεί πλευρικές κλίσεις τόσο απότομες όσο 1:1 όταν το κανάλι διέρχεται από συνεκτικά υλικά.
- Σε κανάλια με επένδυση, οι πλευρικές κλίσεις είναι γενικά πιο απότομες (μικρό Z) από ό,τι σε κανάλι χωρίς επένδυση. Εάν το υλικό επένδυσης είναι σκυρόδεμα, οι πλευρικές κλίσεις μεγαλύτερες (πιο απότομες) από 1:1 συνήθως απαιτούν τη χρήση καλουπιών και με πλευρικές κλίσεις μεγαλύτερες από 0,75:1 οι επενδύσεις πρέπει να είναι σχεδιασμένες ώστε να αντέχουν τις ωθήσεις γης. Ορισμένοι τύποι επένδυσης απαιτούν πλευρικές κλίσεις τόσο επίπεδες όσο αυτές που χρησιμοποιούνται για κανάλια χωρίς επένδυση.
- Οι πλαϊνές κλίσεις μέσα σε βράχο μπορεί να είναι κάθετες εάν αυτό είναι επιθυμητό.
- **Για επενδεδυμένα κανάλια ο Chow προτείνει κλίση 1:1,5 p. 158)**

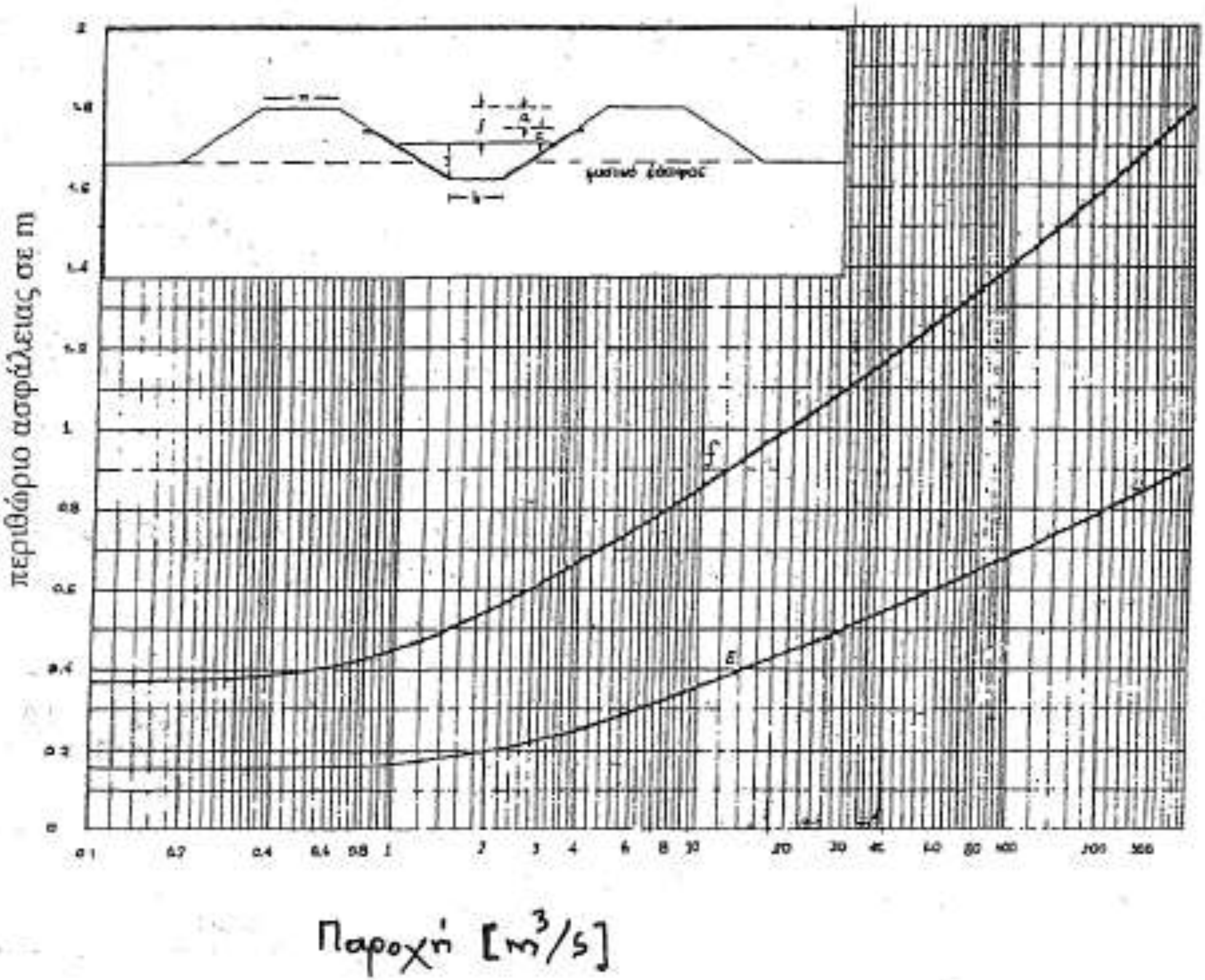
- Τα <u>επενδυμένα κανάλια</u> δημιουργούνται για πέντε βασικούς λόγους:
- 1. Να επιτρέπεται η μετάδοση νερού με **υψηλές ταχύτητες** μέσα από περιοχές βαθιάς ή δύσκολης εκσκαφής με οικονομικά αποδοτικό τρόπο
- 2. Να επιτρέπεται η μεταφορά νερού με υψηλή ταχύτητα με μειωμένο κόστος κατασκευής
- 3. Να μειωθεί η **διαρροή του καναλιού** (διήθηση), εξοικονομώντας έτσι νερό
- 4. Να μειωθεί το ετήσιο κόστος λειτουργίας και συντήρησης
- 5. Για να εξασφαλιστεί η σταθερότητα του τμήματος του καναλιού

- Αν το υλικό επένδυσης παραμορφωθεί η μετατοπιστεί, η ροή θα γίνει πίσω από το υλικό επένδυσης γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε αστοχία



f: περιθώριο ασφαλείας αναχώματος

ε: περιθώριο ασφαλείας επένδυσης



Κατασκευαστικό: περιθώριο ασφαλείας σε αγωγούς τραπεζοειδούς διατομής

Σακκάς

Κατασκευαστικό, Μπέλλος, 2009. Υδραυλική επίλυση: Πάντα η εσωτερική διατομή

Πίνακας 3.2

Πάχος επενδύσεως και πλάτος στέψης αναχωμάτων σε αρδευτικές διώρυγες

ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΔΙΩΡΥΓΑΣ				ΑΝΑΧΩΜΑΤΑ ΔΙΩΡΥΓΑΣ	
Απλό σκυρόδεμα		Οπλισμένο σκυρόδεμα			
Παροχή [m^3/s]	πάχος επένδυσης [cm]	Παροχή [m^3/s]	πάχος επένδυσης [cm]	Παροχή [m^3/s]	πλάτος στέψης αναχώματος [cm]
<5	5	<50	10	≤200	50
5 -15	7	50 - 120	12	200-650	70
15 – 40	8		-	650 - 1150	80
40 - 100	9			1150-1650	90
				1650-2150	100
				2150-2800	120
				>2800	180-240

Πραγματικός σχεδιασμός στην πράξη

- Επιλογή κλίσης με βάση το έδαφος (ήπια)
- **Συνήθως επένδυση από σκυρόδεμα άοπλο κλίση z=1.5**
- Με βάση την παροχή επιλέγω διάφορα πλάτη και προσδιορίζω θεωρώντας ομοιόμορφη ροή το βάθος ροής
- Πρακτικοί κανόνες πλάτους-ύψους ροής

- Σε αυτή την περίπτωση η ροή πρέπει να είναι υποκρίσιμη (θα εξηγηθεί στο επόμενο μάθημα)

Επιλογή διατομής στην πράξη

- **Συνήθως επένδυση από σκυρόδεμα άοπλο κλίση z=1.5**

Τα οικονομοτεχνικα κριτηρια ειναι η μεγιστη αγωγιμοτητα για ενα συγκεκριμένο εμβαδόν διατομής. Η οικονομικότερη θεωρητικά διατομή προκύπτει ότι είναι η διατομή σχήματος κανονικού ημιεξαγώνου, ωστόσο για λόγους τεχνικούς στην πράξη προτιμούνται διατομές με μεγαλύτερες τιμές του λόγου b/y_n.

Για μικρούς αγωγούς $b/y_n \sim 1$

Για αγωγού μεσαίου μεγέθους $b/y_n \sim 1\text{-}3$

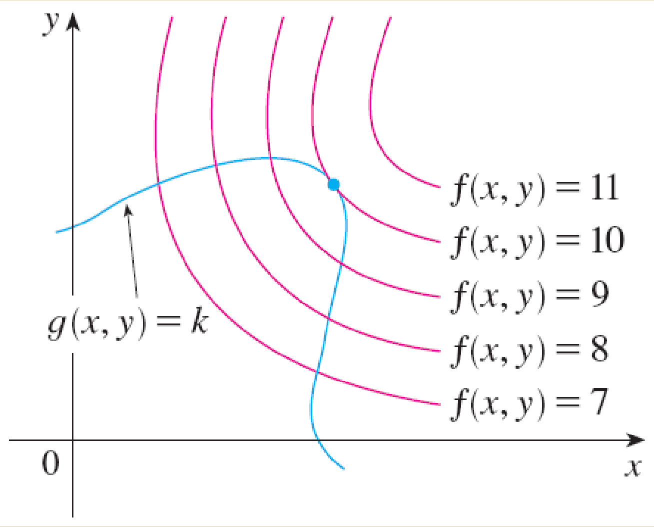
Για μεγάλους αγωγούς $b/y_n > 3$

ΠΑΡΆΡΤΗΜΑ

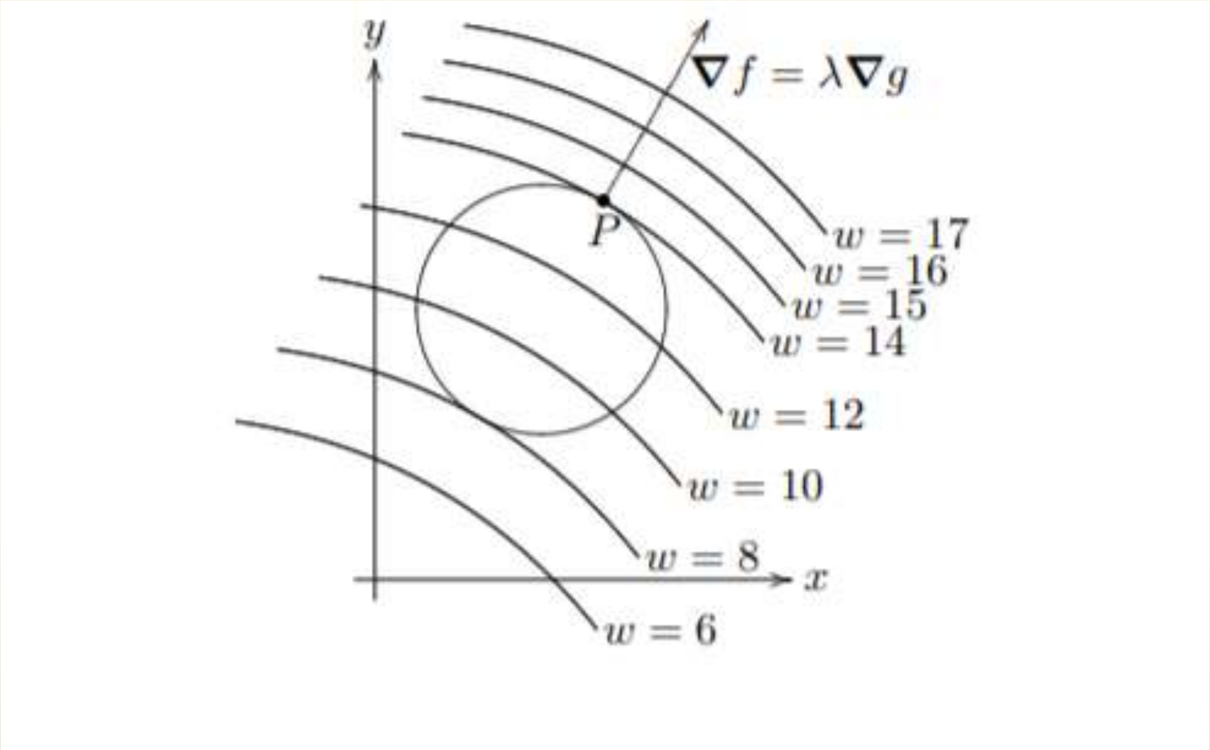
Ακρότατα υπό περιορισμούς ισότητας (στην κόψη του ξυραφιού)

- Μέθοδοι ποινής (αριθμητική επίλυση → βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)
- Πολλαπλασιαστές Lagrange

Π.χ. Για δύο μεταβλητές, ζητείται μέγιστη $f(x, y)$ υπό τους περιορισμούς $g(x, y) = k$



Θ. Lagrange
Βέλτιστο: Κάθετα διανύσματα παράλληλα μεταξύ τους



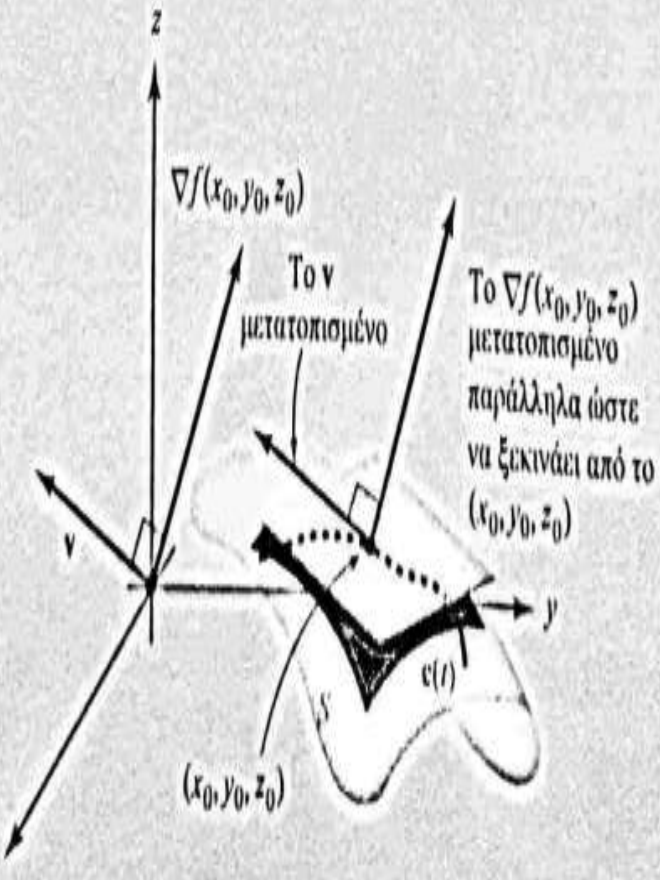
f: συνάρτηση (max)

g: περιορισμός ισότητας εδώ κύκλος

w: ισοϋψείς της f

P βέλτιστη λύση

Παράρτημα

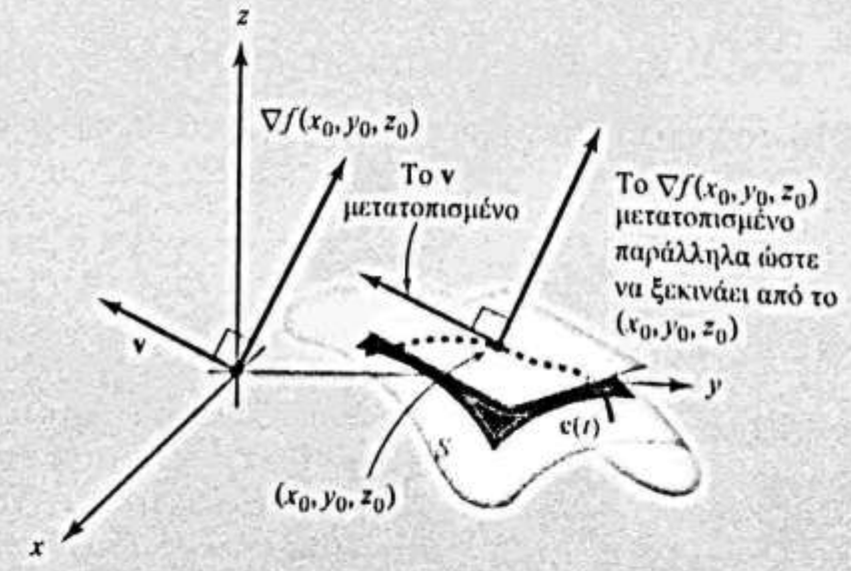


Σχήμα 2.6.2 Γεωμετρική σημασία της κλίσης: το ∇f είναι ορθογώνιο με την επιφάνεια S επί της οποίας είναι σταθερή η f.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΚΛΙΣΗΣ

- Η γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης μιας βαθμωτή ς συνάρτησης είναι η εξής:
  Αν έχουμε μια συνάρτηση c=f(x, y),
  στο επίπεδο, τότε η κλίση της f, είναι ένα δι άνυσμα κάθετο στην εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (x, y)
- Αν έχουμε μια συνάρτηση c=f(x, y,z)
  στο χώρο, τότε η κλίση της f, είναι ένα διάν υσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφά νειας στο σημείο (x, y,z)

Σχήμα 2.6.2 Γεωμετρική σημασία της κλίσης: το ∇f είναι ορθογώνιο με την επιφάνεια S επί της οποίας είναι σταθερή η f.



Πολλαπλασιαστές Lagrange

βρεχόμενη περίμετρος (ΕΛΆΧΙΣΤΟ)

Εμβαδόν, δεδομένο (περιορισμός ισότητας)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial A}{\partial x_i} = 0$$

Για κάθε μεταβλητή απόφασης, εδώ τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής

Απόδειξη

Οπότε:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\cancel{dx_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}\cancel{dx_1} = 0, \quad \text{όπου} \quad \lambda \overset{\text{ορ}}{=} \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0}$$

(από αρχική σχέση.)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0}$$

Ίδιο λ εφόσον αναφέρεται στον ίδιο περιορισμό ☺

Ερμηνεία των πολλαπλασιαστών:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(x) - b_j)$$

$$(g'_j(x) - b_j = g_j(x))$$

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange αντιπροσωπεύει την οριακή αλλαγή η βελτίωση της f που οφείλεται στη διαφορική χαλάρωση του περιορισμού της σταθεράς b_j

Ερμηνεία των πολλαπλασιαστών:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(x) - b_j)$$

$$(g'_j(x) - b_j = g_j(x))$$

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange αντιπροσωπεύει την οριακή αλλαγή ή βελτίωση της f που οφείλεται στη διαφορική χαλάρωση του περιορισμού της σταθεράς b_j