2. Βασικές έννοιες

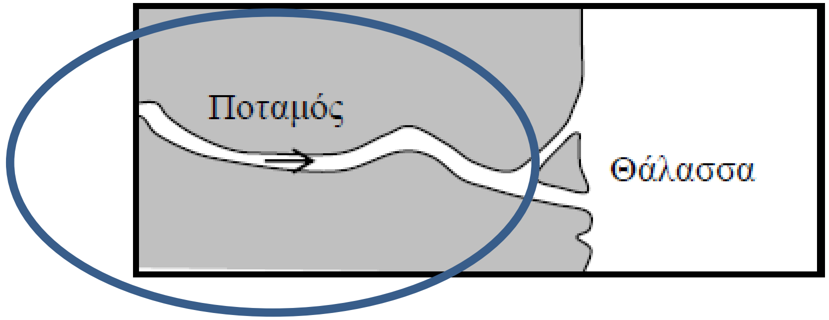
από το μάθημα της Ρευστομηχανικής στο μάθημα της Υδραυλικής και εισαγωγικές έννοιες

Δρ Μ.Σπηλιώτη
Αν. Καθηγητή ΔΠΘ

Πεδίο εφαρμογής Υδραυλικής: Σωληνοειδείς ροές

- Σωληνοειδείς ροές: Είναι οι ροές που η μορφή τους έχει το σχήμα ενός σωλήνα. Η κατά μήκος διάσταση είναι πολύ πιο σημαντική σε σχέση με την εγκάρσια. Ροή μονιάστατη.
- Συνήθεις περιπτώσεις: Μονοδιάστατη μόνιμη ροή, πολλές φορές και ομοιόμορφη
- Κατηγοριοποίηση: Ροή με ελεύθερη επιφάνεια, ροή σε κλειστούς αγωγούς

Η ροή ενός ποταμού ή φυσικού υδατορρεύματος, αν και η διατομή του διαφέρει καθ' όλο το μήκος, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μονοδιάστατη και να αναλυθεί με βάση τις αντίστοιχες αρχές.



Βασικές έννοιες

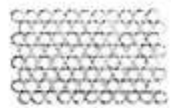
- **Ρευστό: Παραμορφώνεται υπό την αντίδραση διατμητικής δύναμης οσοδήποτε μικρής και αν είναι.**
- **Διαφορά υγρών και αερίων:** Τα υγρά παρουσιάζουν δυσκολία μεταβολής του όγκου τους ενώ τα αέρια τείνουν να καταλάβουν όλο τον όγκο που τα περιβάλλει. Αντίθετα τα υγρά σε ένα δοχείο καταλαμβάνουν έναν ορισμένο όγκο σχηματίζοντας ελεύθερη επιφάνεια. Τα αέρια δεν παρουσιάζουν ελεύθερη επιφάνεια και μπορούν να βρίσκονται σε ισορροπία μόνο σε κλειστά δοχεία.
- **Μοριακή δομή υγρών: Μόρια υγρών με ασυνέχειες και χαλαρή δομής σε σχέση με τα στερεά αλλά περισσότερο συνεκτικής σε σχέση με τα αέρια.**

Πίνακας Π-10 *Ιδιότητες νερού σε πίεση 1 atm*

T (°C)	ρ (kg/m^3)	μ (Pa·s)	ν (m^2/s)
0	999,9	$1{,}787 \times 10^{-3}$	$1{,}787 \times 10^{-6}$
5	1000,0	$1{,}519 \times 10^{-3}$	$1{,}519 \times 10^{-6}$
10	999,7	$1{,}307 \times 10^{-3}$	$1{,}307 \times 10^{-6}$
20	998,2	$1{,}002 \times 10^{-3}$	$1{,}004 \times 10^{-6}$
30	995,7	$7{,}975 \times 10^{-4}$	$8{,}009 \times 10^{-7}$
40	992,2	$6{,}529 \times 10^{-4}$	$6{,}580 \times 10^{-7}$
50	988,1	$5{,}468 \times 10^{-4}$	$5{,}534 \times 10^{-7}$
60	983,2	$4{,}665 \times 10^{-4}$	$4{,}745 \times 10^{-7}$
70	977,8	$4{,}042 \times 10^{-4}$	$4{,}134 \times 10^{-7}$
80	971,8	$3{,}547 \times 10^{-4}$	$3{,}650 \times 10^{-7}$
90	965,3	$3{,}147 \times 10^{-4}$	$3{,}260 \times 10^{-7}$
100	958,4	$2{,}818 \times 10^{-4}$	$2{,}940 \times 10^{-7}$

Παπαϊωάννου, 2009

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1 Σύγκριση στερεών, υγρών και αερίων

Ιδιότητα	Στερεό	Υγρό	Αέριο
Συμβολισμός			
Περιγραφή	Τα στερεά διατηρούν το σχήμα τους. Δεν χρειάζεται να μπουν σε δοχείο.	Τα υγρά παίρνουν το σχήμα του δοχείου και διατηρούνται σε ανοικτό δοχείο.	Τα αέρια καταλαμβάνουν όλο το χώρο κλειστού δοχείου.
Κινητικότητα μορίων	Τα μόρια έχουν μικρή κινητικότητα αφού είναι δέσμια στη δομή με ισχυρές διαμοριακές δυνάμεις.	Τα μόρια κινούνται ελεύθερα παρά τις ισχυρές δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσά τους.	Τα μόρια κινούνται ελεύθερα αλληλεπιδρώντας σε μικρό βαθμό, εκτός κατά τη διάρκεια των κρούσεων. Για το λόγο αυτό καταλαμβάνουν όλο το χώρο του δοχείου.
Τυπική πυκνότητα	Συχνά αρκετά μεγάλη. Η πυκνότητα του χάλυβα, π.χ. είναι 7700 kg/m^3.	Μέτρια. για παράδειγμα, η πυκνότητα του νερού είναι 1000 kg/m^3.	Μικρή. Για παράδειγμα, η πυκνότητα του αέρα είναι 1.2 kg/m^3.
Μοριακή απόσταση	Μικρή. Τα μόρια είναι πολυ κοντά το ενα στο άλλο.	Μικρή. Τα μόρια συγκρατούνται μαζί σε μικρές αποστάσεις με τη βοήθεια διαμοριακών δυνάμεων.	Μεγάλη. Τα μόρια κατά μέσο όρο είναι μακριά το ένα από το άλλο.
Επίδραση διατμητικής τάσης	Προκαλεί παραμόρφωση	Προκαλεί ροή	Προκαλεί ροή
Επίδραση κάθετης τάσης	Προκαλεί παραμόρφωση που ίσως οδηγήσει σε μεταβολή όγκου. Μπορεί να προκαλέσει αστοχία υλικού.	Προκαλεί παραμόρφωση που σχετίζεται με μεταβολή όγκου.	Προκαλεί παραμόρφωση που σχετίζεται με μεταβολή όγκου.
Ιξώδες	Δεν υπάρχει	Υψηλό. Ελαττωνεται με αύξηση θερμοκρασίας	Χαμηλο. Αυξανεται με αύξηση της θερμοκρασίας
Συμπιεστότητα	Δύσκολο να συμπιεστούν. Το μέτρο ελαστικότητας όγκου του χάλυβα είναι 160×10^9 pa	Δύσκολο να συμπιεστούν. Το μέτρο ελαστικότητας όγκου του υγρου νερού είναι 2.2×10^9 pa.	Εύκολο να συμπιεστούν. Το μέτρο ελαστικότητας όγκου σε συνθήκες δωματιου είναι 1.0×10^5 pa

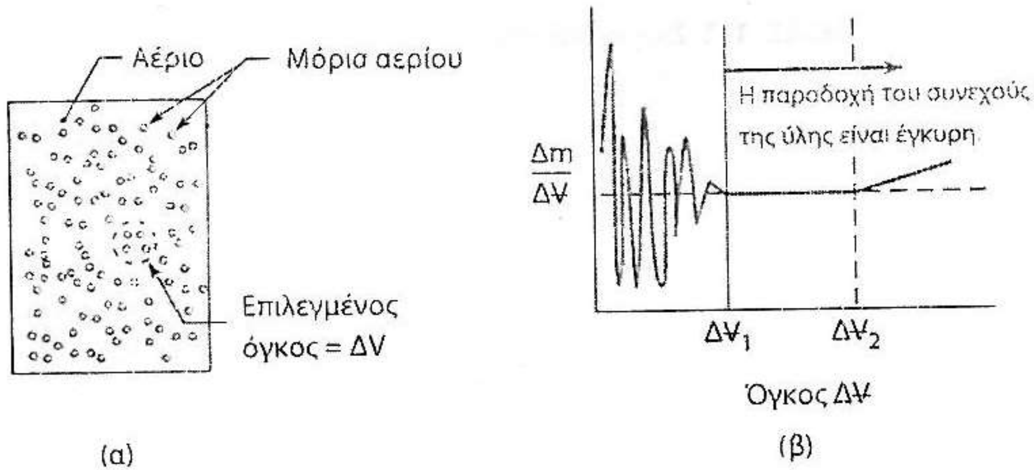
Elger et al., 2014

Διαφορές υγρού με στερεά, υγρά

- Στερεό: Ανθίσταται στη διατμητική τάση, το ρευστό όχι (προκαλείται κίνηση ρευστού)
- Υγρό σε δοχείο: σχηματίζει ελεύθερη επιφάνεια

Υπόθεση του συνεχούς μέσου

- Η υπόθεση του συνεχούς ρευστού βασίζεται στην παραδοχή ότι το ρευστό αποτελείται από μια συνεχή ακολουθία μικρών στοιχειωδών όγκων Vo. Υποθέτουμε ότι οι όγκοι αυτοί είναι αρκετά μικροί, έτσι που στη μαθηματική ανάλυση να θεωρηθούν σημεία.
- Ο στοιχειώδης όγκος για τον ορισμό της πυκνότητας δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρός διότι τότε παύει να υπάρχει ένα επαρκές στατιστικό δείγμα για την μέτρηση των ιδιοτήτων του ρευστού. Λαμβάνεται λοιπόν δν→10^{-9} mm^3 για να περιλαμβάνεται στο στοιχειώδη όγκο έναν ικανό αριθμό μορίων ώστε να μπορεί να εξαχθεί μία μέση τιμή από το δείγμα μορίων και να είναι σωστή η προσέγγιση του συνεχούς μέσου που θεωρείται στα ρευστά.
- **Ρευστό σωματίδιο (στοιχειώδης όγκος ρευστού, προσέγγιση):** Καλείται ο μικρότερος όγκος ρευστού ώστε να επιτρέπεται η στατιστική ερμηνεία της συμπεριφοράς τους. Έτσι σε κάθε σημείο του χώρου και σε κάθε χρονική στιγμή η πυκνότητα, η ταχύτητα και κάθε άλλη ιδιότητα μπορεί να περιγραφεί ως συνεχής συνάρτηση.
- Κατά συνέπεια όταν αναφερόμαστε στην ταχύτητα u(x,y,z) στο σημείο με συντεταγμένες x,y,z θα εννοούμε ότι η ταχύτητα αυτή είναι η ταχύτητα κάποιου μικρού όγκου του ρευστού Vo που περικλείει το μαθηματικό σημείο x,y,z.

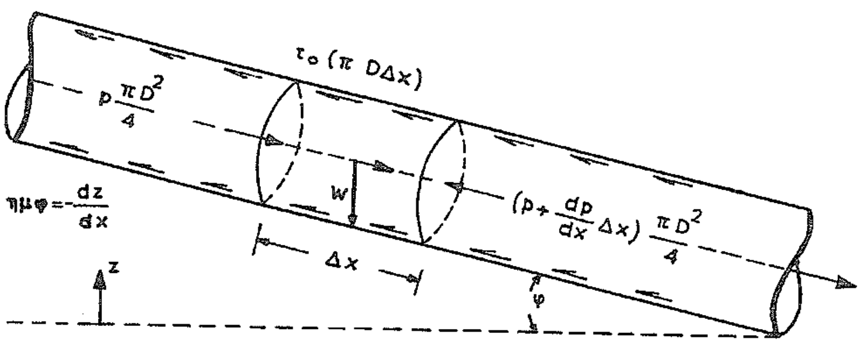


ΣΧΗΜΑ 1.4 Η παραδοχή περί του συνεχούς της ύλης είναι έγκυρη όταν ο καταμετρημένος όγκος ΔV είναι αρκετά μεγάλος ώστε να μην λαμβάνονται υπόψη οι επιδράσεις της κίνησης των μορίων.

Elger et al., 2014

Υπόθεση του συνεχούς μέσου (2)

Εφαρμογή κύρια στην ανάπτυξη εξισώσεων με βάση τις τριες βασικές εξισώσεις της φυσικής σε ένα απειροστό όγκο αναφοράς.
Για παράδειγμα μεταβολή της πίεσης σε κλειστό αγωγό σταθερής διατομής μήκους dx



Εισροή:

Πίεση σταθερή σε όλη τη διατομή = p

Εκροή:

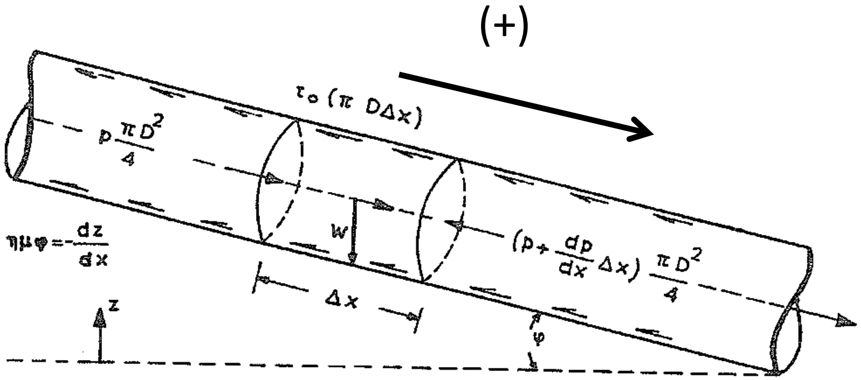
Πίεση σταθερή σε όλη τη διατομή με βάση το θεώρημα Taylor

$$p\left(x_0+\Delta x\right)\approx\left(p\left(x_0\right)+\left.\frac{dp}{dx}\right|\Delta x\right)$$

Προσέγγιση με βάση το Θεώρημα Taylor

Υπόθεση του συνεχούς μέσου (2)

Εφαρμογή κύρια στην ανάπτυξη εξισώσεων με βάση τις τριες βασικές εξισώσεις της φυσικής σε ένα απειροστό όγκο αναφοράς.
Για παράδειγμα μεταβολή της πίεσης σε κλειστό αγωγό σταθερής διατομής μήκους dx



Συνισταμένη δύναμη με βάση τις πιέσεις:

$$p \cdot \mathrm{A} - \left(p + \frac{dp}{dx} \Delta x \right) \cdot \mathrm{A} = - \frac{dp}{dx} \Delta x \mathrm{A}$$

Ιδιότητες ρευστών

- **Πυκνότητα:** Λόγος της μάζας του ρευστού προς τον όγκο αυτού και είναι για το ρευστό σωματίδιο:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

- **Ειδικό Βάρος: Λόγος** του βάρους ρευστού σωματιδίου για του όγκου αυτού. γ=ρg
- **Ασυμπίεστα ρευστά**: Διατηρούν σταθερή πυκνότητα και άρα σταθερό όγκο
- Νερό: πρακτικά ασυμπίεστο με μικρή σχετικά εξάρτηση από θερμοκρασία και πίεση. Συνήθης τιμής της πυκνότητας νερού προκύπτει για θερμοκρασία 20^oC και πίεση 1 atm:
- $\rho = 998\ Kg/m^3$
- Συνήθως για την πυκνότητα χρησιμοποιείται η τιμή $\rho = 1000\ Kg/m^3$. Οπότε θεωρώντας επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9.81\ m / s^2$ προκύπτει ειδικό βάρος νερού:
- $\gamma \approx 10{,}000\ N/ m^3$

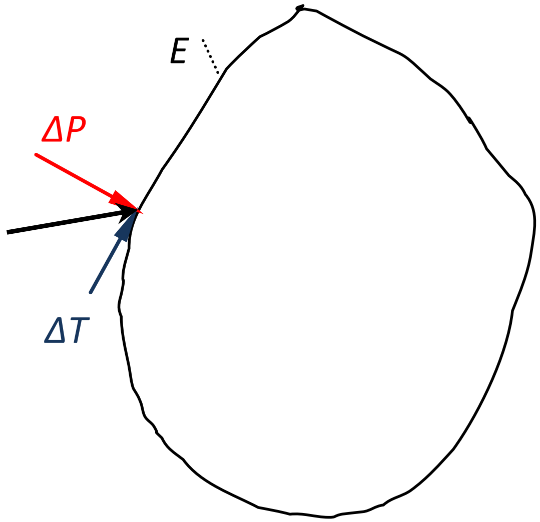
Επιφανειακές δυνάμεις

Έστω ο όγκος ρευστού V Που περικλείεται από επιφάνεια Ε. Το περιβάλλον ρευστό ασκεί στην κάθε στοιχειώδη επιφάνεια ΔΕ που μπορεί να αναλυθεί σε μία κάθετη και μία εφαπτομενική δύναμη. Ορίζεται:

$\sigma = \lim_{\Delta E \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta E}$ και $\tau = \lim_{\Delta E \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta E}$

Όταν το νερό είναι ακίνητο τότε δεν υπάρχει διατμητική τάση και η ορθή τάση ταυτίζεται με τη πίεση. Η πίεση είναι βαθμωτό μέγεθος κάθετη στην επιφάνεια με θετική φορά τη θλιπτική φορά.

Μονάδες (N/m^2 = Pa)



Πίεση

- Θλιπτική, ορίζεται με βάση την ορθή τάση
- Βαθμωτή συνάρτηση, καθορισμένη φορά (π.χ. θερμοκρασία είναι βαθμωτό μέγεθος)
- Ηρεμούν ρευστό: υδροστατική κατανομή πιέσεων οι ορθές τάσεις ταυτίζονται με την πίεση
- Κινούμενο ρευστό: Πίεση, ο μέσος όρος των ορθών τάσεων

  $p(x,x,y) = 1/3\ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$
- Μονοδιάστατη ανάλυση, όγκος ελέγχου, θεώρηση πιέσεων, κατά τη διεύθυνση τη ροής, ορθή τάση μόνο υπό πίεση

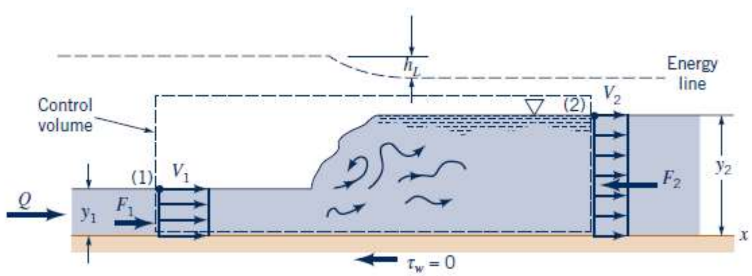
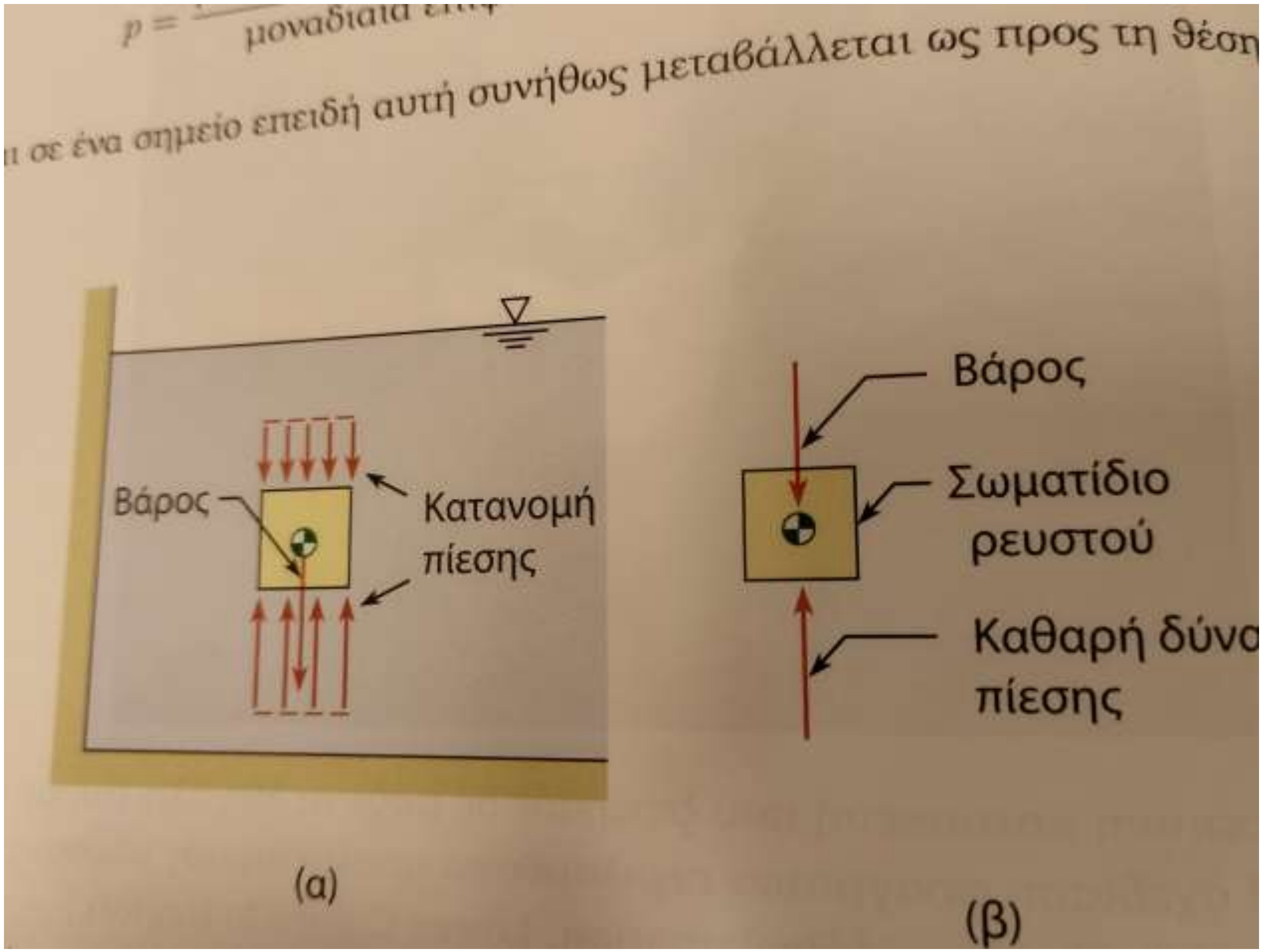


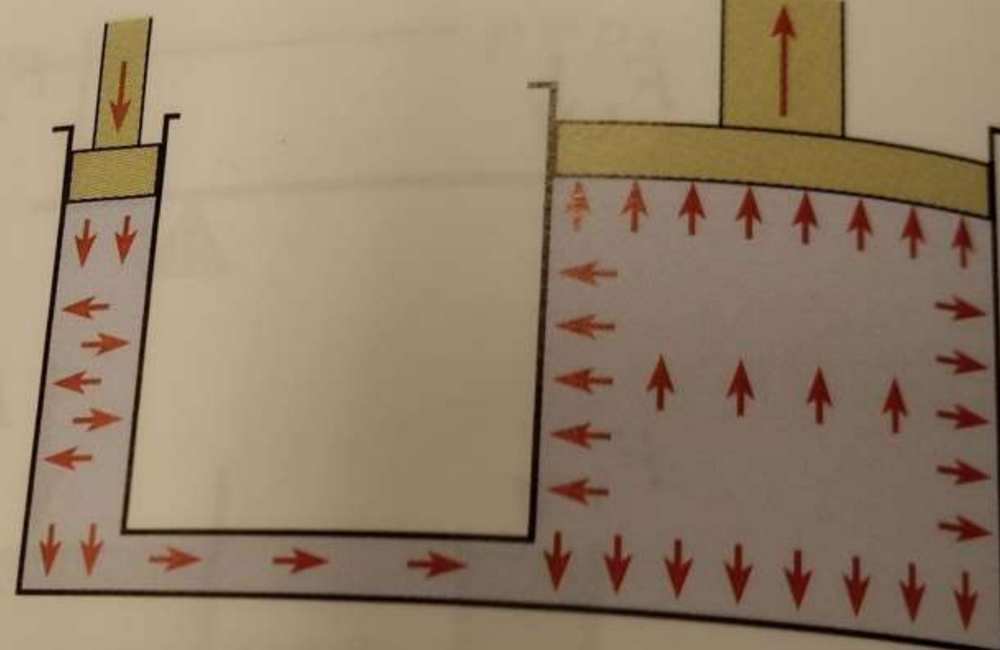
Figure 10.15 Hydraulic jump geometry.

Πίεση: επιφανειακά -θλιπτικά

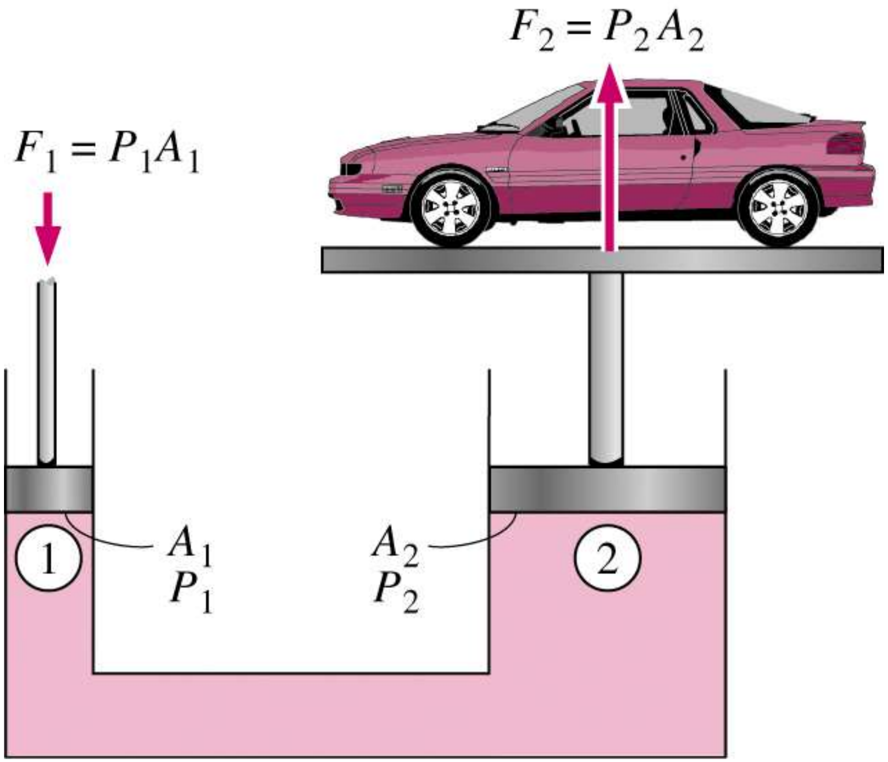


Αρχή του PASCAL

Αρχή του Pascal. Μία εφαρμοζόμενη δύναμη δημιουργεί μία μεταβολή πίεσης που μεταδίδεται σε κάθε σημείο στο ρευστό και στα τοιχώματα του δοχείου.



Νόμος τουPascal



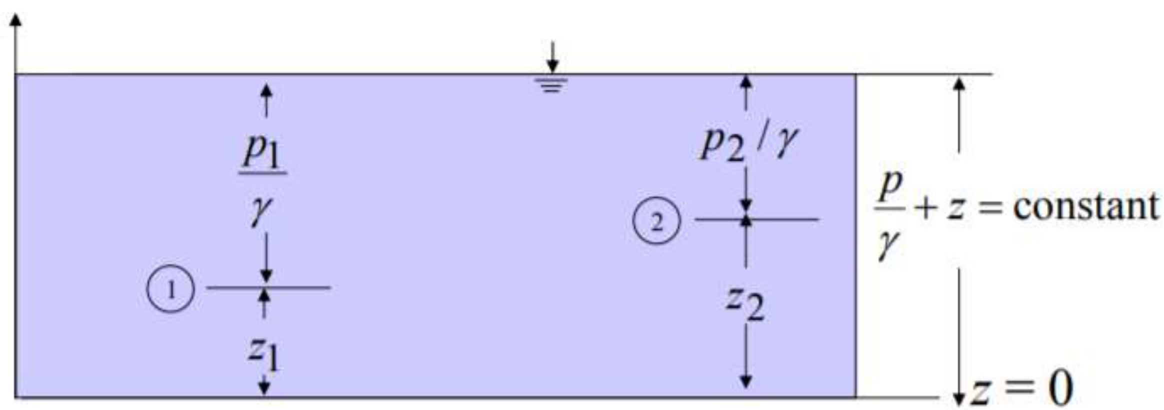
- Η εφαρμοζόμενη Δύναμη F1 μεταδίδει μεταβολής πίεσης P1.
- Οριακά ισχύει

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

- Μεγάλη επιφάνεια A2 σε σχέση με A1 προκαλεί πολλαπλάσια δύναμη, οπότε ο λόγος A_2/A_1 ονομάζεται μηχανικό πλεονέκτημα

Πίεση σε υγρό ακίνητο αλλά και σε με ελεύθερη επιφάνεια (πολλές περιπτώσεις)

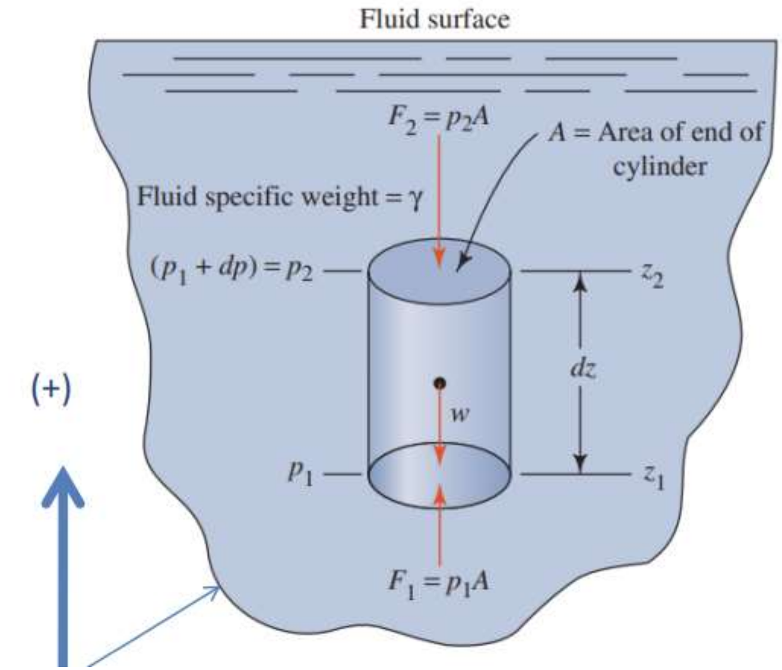
Πιεζομετρικό φορτίο



Ανοικτό δοχείο

Υδροστατική κατανομή της πίεσης

Υδροστατική κατανομή της πίεσης



- Ηρεμούν ρευστό

Όγκος ελέγχου

-(Δύναμη λόγω βάρους)

W=γ*V(όγκος)(κατακόρυφη)

--δεν υπάρχουν διατμητικές τάσεις

--- πίεση στο (2) στη γειτονιά του z_1 , $dp=p_1+dp$

---Ισορροπία δυνάμεων:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_1 - F_2 - W = 0 \Leftrightarrow pA - (p+dp)A - \gamma(\mathrm{A}dz) = 0 \Leftrightarrow$$

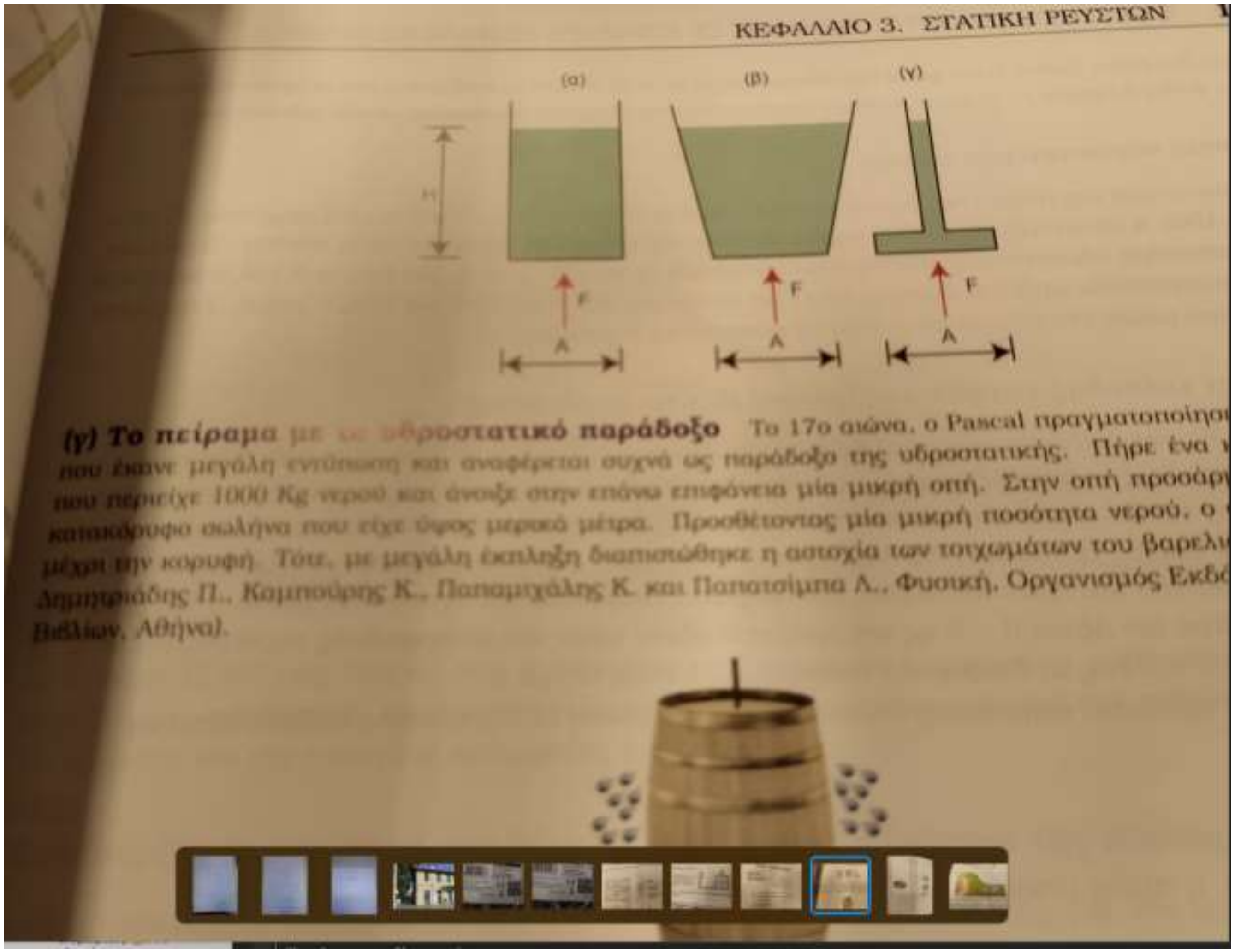
$$\cancel{A}dp = -\gamma(\cancel{A}dz) \Leftrightarrow \left(\frac{dp}{dz} = -\gamma\right) \Leftrightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz =$$

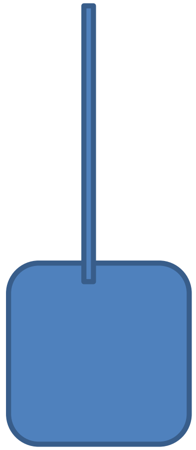
$$\Leftrightarrow p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$$

$$p_{\beta\alpha\theta\acute{\upsilon}\varepsilon\rho\alpha} = p_{\upsilon\psi\eta\lambda\acute{\alpha}\pi\rho o\sigma\tau\eta\nu\varepsilon\varepsilon} + \gamma\Delta Z$$

Mott and Untener, 2016

Υδροστατικό παράδοξο





ΦΥΣΙΚΗ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Φυσική και Ιστορία

Ποιος ήταν ο Πασκάλ; Πότε και πού έζησε; Ποιο ήταν το έργο του;

Το υδροστατικό παράδοξο

Τον 17ο αιώνα ο Πασκάλ (Pascal) πραγματοποίησε ένα πείραμα που έκανε μεγάλη εντύπωση και αναφέρεται συχνά ως παράδοξο της υδροστατικής.

Πήρε ένα κλειστό βαρέλι που περιείχε 1000 kg νερού και άνοιξε στην πάνω επιφάνεια μια μικρή τρύπα. Στην τρύπα προσάρμοσε ένα λεπτό κατακόρυφο σωλήνα που είχε ύψος μερικά μέτρα. Προσθέτοντας μια μικρή ποσότητα νερού, ο σωλήνας γέμισε μέχρι την κορυφή. Τότε με μεγάλη έκπληξη είδε τα τοιχώματα του βαρελιού να ανοίγουν και το νερό να χύνεται έξω.

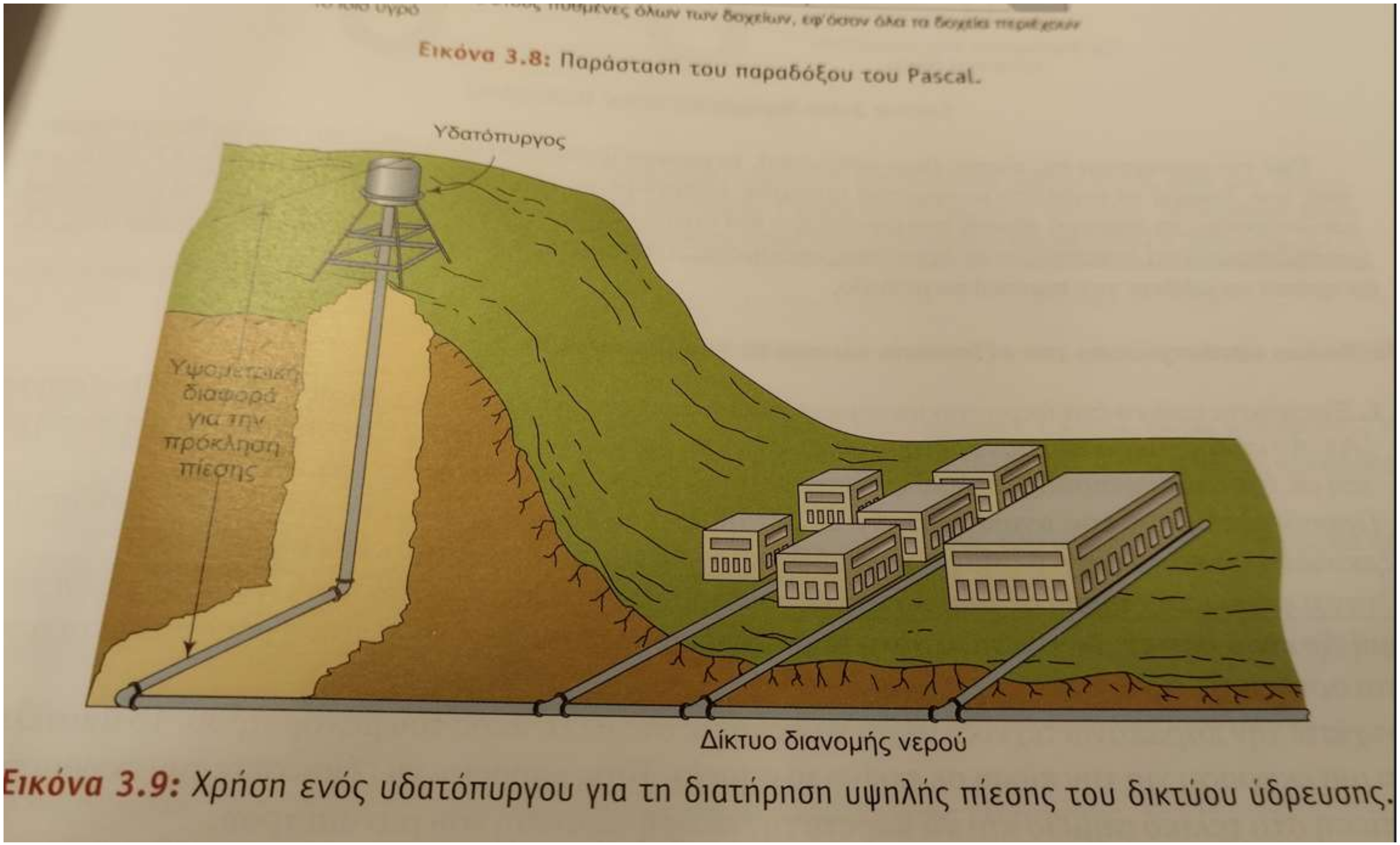
Πώς συνέβη αυτό;

Ας θεωρήσουμε μια μικρή επιφάνεια εμβαδού A = 1 cm^2 του πλευρικού τοιχώματος του βαρελιού που βρίσκεται σε απόσταση h = 0,5 m από το πάνω μέρος του βαρελιού. Πριν από την τοποθέτηση του νερού στο σωλήνα, η πίεση του νερού στο τοίχωμα ήταν:

$p = \rho \cdot g \cdot h = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5\ m = 5.000 \frac{N}{m^2}$ και η δύναμη σ'αυτό

$F = p \cdot A = 5.000 \frac{N}{m^2} \cdot 10^{-4}\ m^2 = 0{,}5\ N$. Όταν ο σωλήνας, μήκους 9,5 m, γεμίσει με νερό, η πίεση γίνεται:

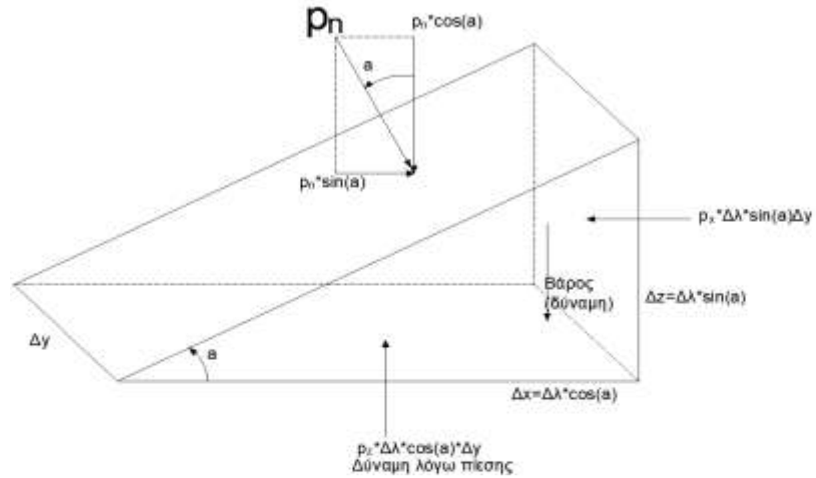
$p' = \rho \cdot g \cdot h' = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 9{,}5\ m = 100.000 \frac{N}{m^2}$ και η δύναμη $F' = p' \cdot A = 100.000 \frac{N}{m^2} \cdot 10^{-4}\ m^2 = 10\ N$ δηλαδή, είκοσι φορές μεγαλύτερη.

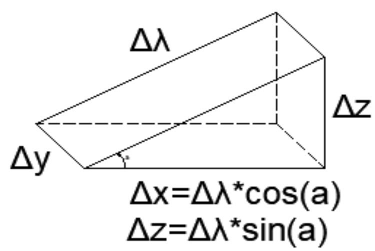


Εικόνα 3.9: *Χρήση ενός υδατόπυργου για τη διατήρηση υψηλής πίεσης του δικτύου ύδρευσης.*

Mott and Untener, 2016

Αρχή Pascal: η πίεση σε οποιαδήποτε σημείο ρευστού σε ηρεμία είναι η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις, δηλ. δεν εξαρτάται από η διεύθυνση της επιφανείας.





$$\sum F_x = 0 = p_x \Delta y\,(\Delta\lambda \sin a) - p_n(\Delta y \Delta\lambda)\sin a \Longrightarrow p_n = p_x$$

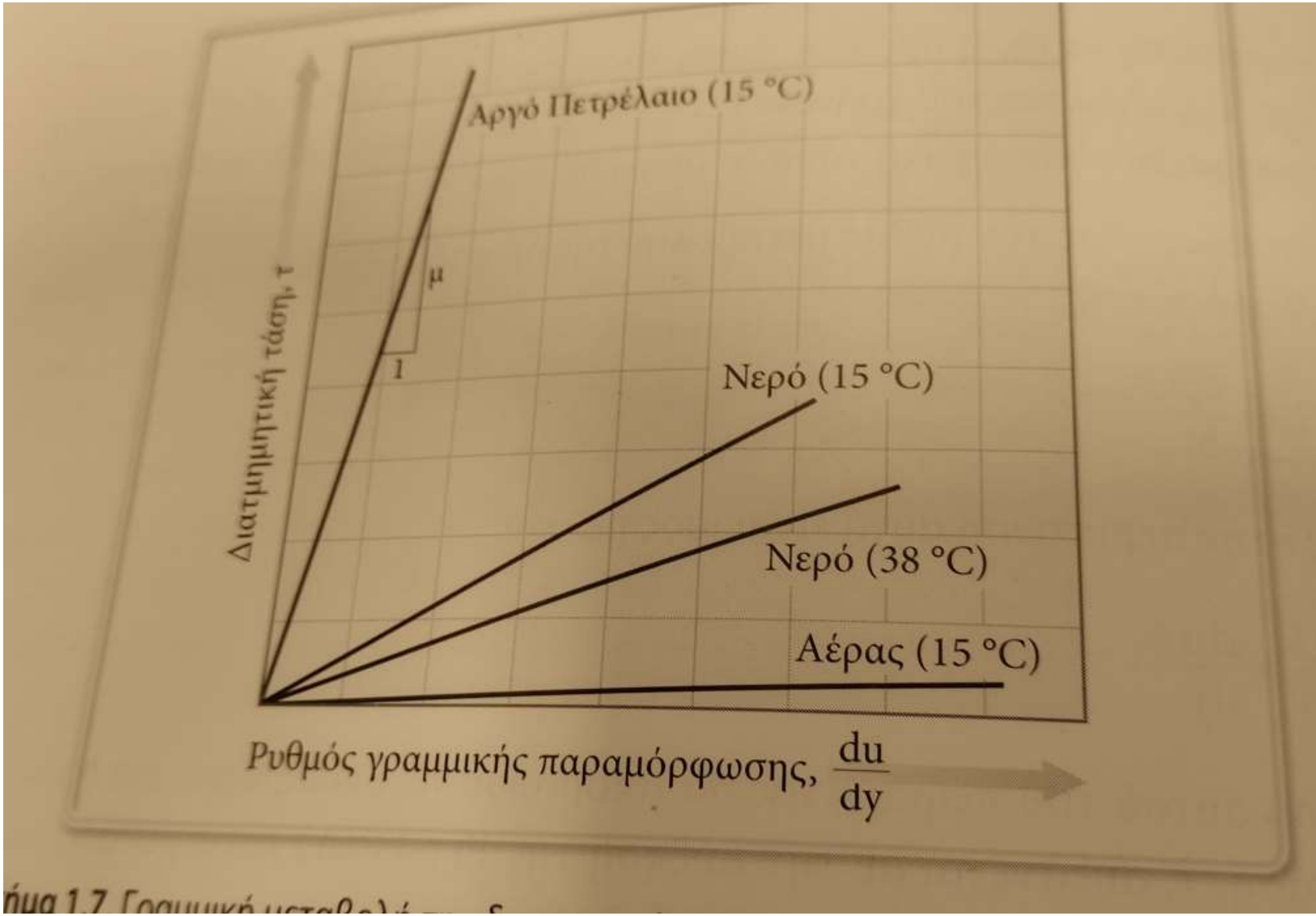
$$\sum F_z = 0 = p_z \Delta y\,(\Delta\lambda \cos a) - p_n(\Delta y \Delta\lambda)\cos a - \frac{1}{2}\gamma(\Delta\lambda \cos a)(\Delta\lambda \sin a)\Delta y \Longrightarrow p_n = p_z$$

$\underline{(\Delta l \cos a)(\Delta l \sin a)\ \tau\varepsilon\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\ \sigma\tau o\ 0}$

$$p_n = p_x = p_z = p$$

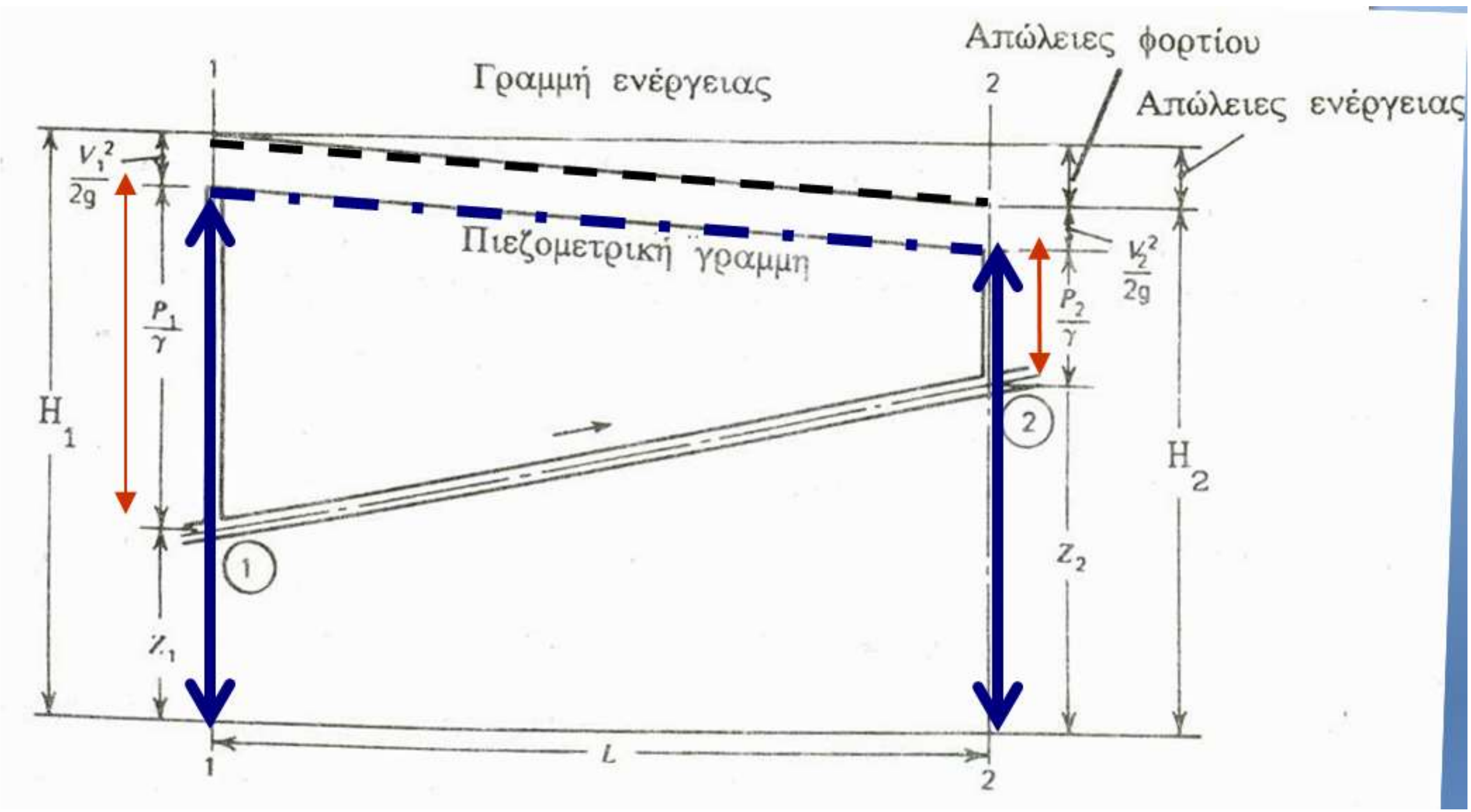
Ιξώδες

- Ιξώδες, διάχυση μάζας, διάχυση θερμότητας: μοριακή φύση των ρευστών που γίνονται αντιληπτές στο μακρόκοσμο
- Νευτώνεια ρευστά: Σταθερή σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και κλίση ταχύτητας
- Εερμηνεία οριακού στρώματος


Αργό Πετρέλαιο (15 °C)
μ
1
Νερό (15 °C)
Νερό (38 °C)
Αέρας (15 °C)
Διατμητική τάση, τ
Ρυθμός γραμμικής παραμόρφωσης, $\frac{du}{dy}$

Πρίνος

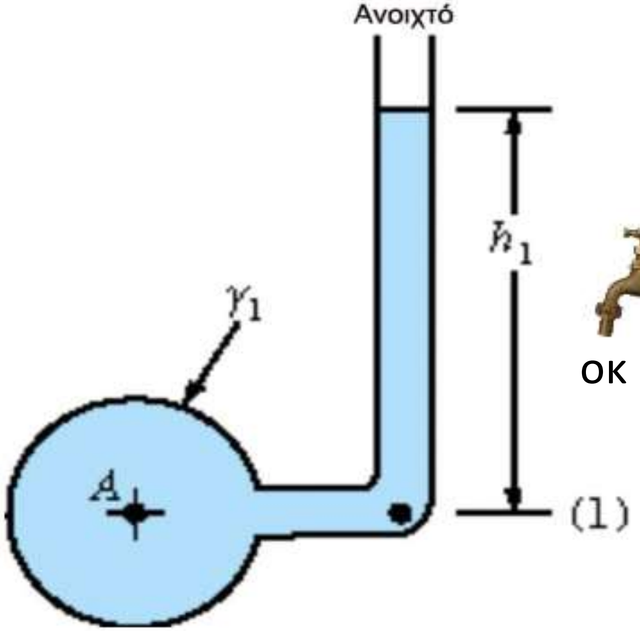
Πίεση σε κινούμενο υγρό, κλειστοί αγωγοί



Πίεση σχετική στο σωλήνα

2.4 ΜΑΝΟΜΕΤΡΑ

Π. ΠΡΙΝΟΣ



ΟΚ

ΠΙΕΖΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΣΩΛΗΝΑΣ

$P=\gamma h+P_0$

$P_A=\gamma_1 h_1$ ($P_0=0$,σχετική πίεση)

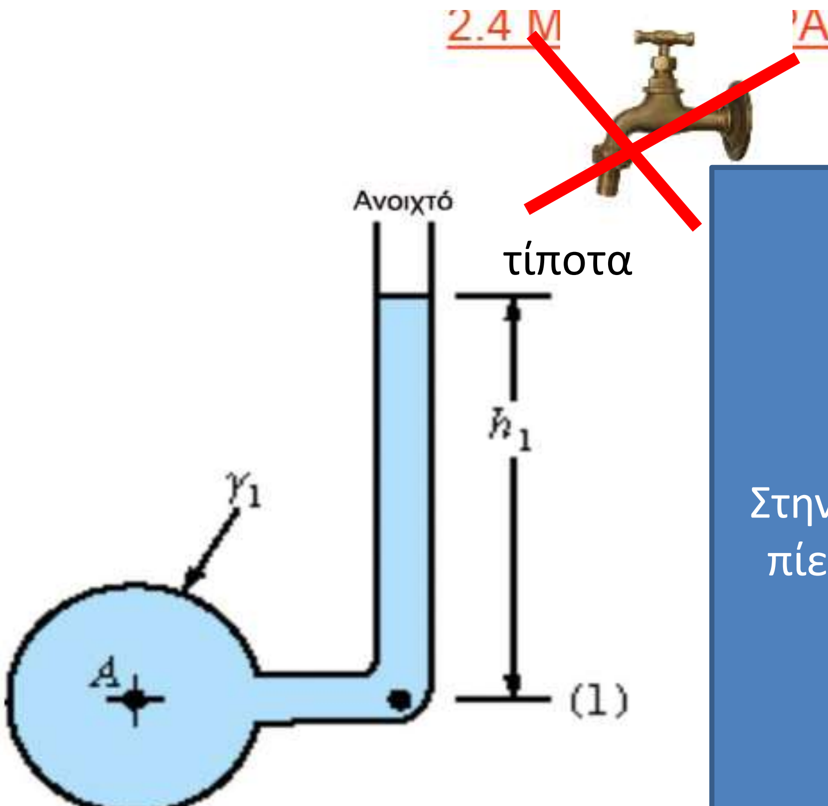
$P_A=P_1$

Μειονεκτήματα

α) $P_A > P_{atm}$

β) Σχετικά μεγάλη πίεση για την ακριβή μέτρηση του h_1

Πίεση σχετική στο σωλήνα



Ανεπαρκής πίεση ……
Στην αστική υδραυλική, η απαιτούμενη πίεση εξαρτάται από τον αριθμό των ορόφων

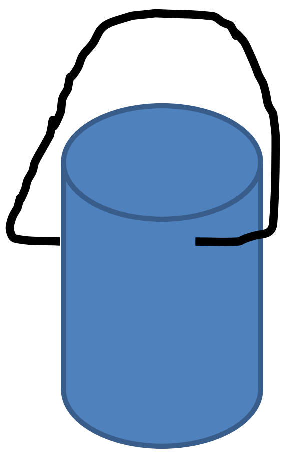
ασκησιολογικά

- Ηρεμούν ρευστό: Υδροστατική κατανομή της πίεσης
- Ανοικτοί αγωγοί: υδροστατική κατανομή της πίεσης (χωρίς καμπυλότητες ο πυθμένας κλπ). Αλλαγή με την αλλαγή του βάθους ροής
- Κλειστοί αγωγοί: Σταθερή από διατομή σε διατομή, αλλάζει από θέση σε θέση, ΑΔΕ

(Ογκομετρική παροχή)

- Όγκος στη μονάδα του χρόνου
- Πόσο γρήγορα γεμίζει ένας κουβάς?
- Παροχή = όγκος κουβά (που πληρώθηκε με νερό) / χρόνος για να γεμίσει

  (m^3/s)

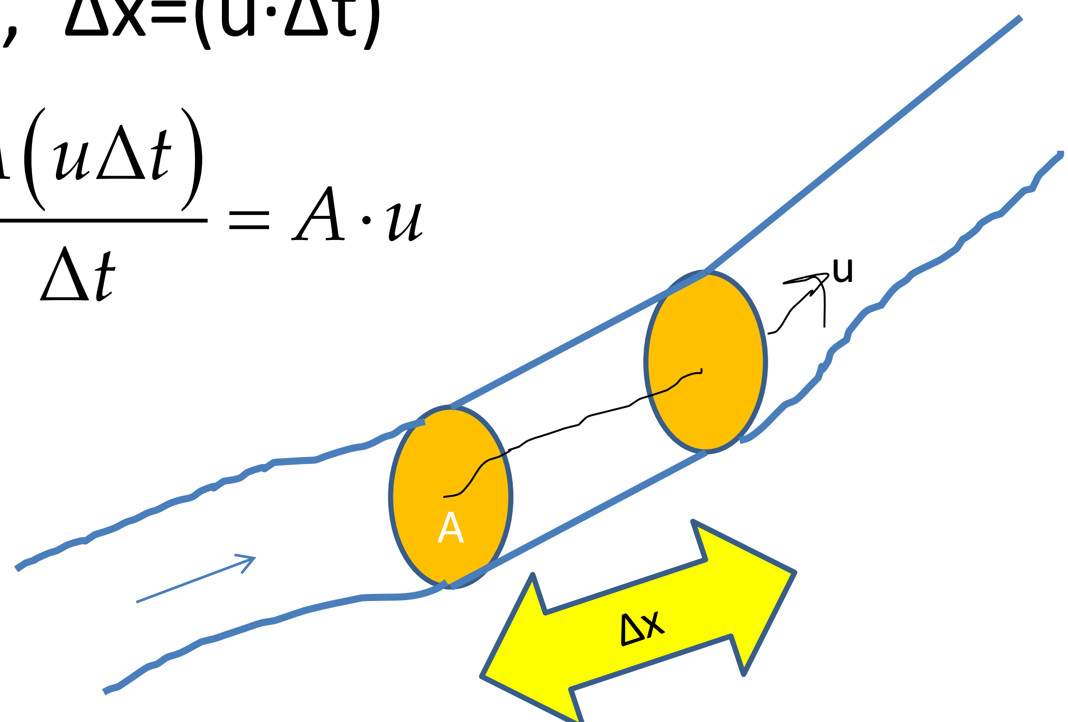


Παροχή (ογκομετρική, σωληνοειδής ροή)/φυσική ερμηνεια

- Αν η διατομή του ρευστού σε ένα σημείο είναι A και η ταχύτητα u, τότε σε μικρό χρόνο Δt , τότε ο όγκος το κυλίνδρου είναι

ΔV= (u·Δt)A, Δx=(u·Δt)

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\left(u\Delta t\right)}{\Delta t} = A \cdot u$$



Μέση ταχύτητα γιατί υπάρχει μη ενιαία ταχύτητα σε όλη τη διατομή

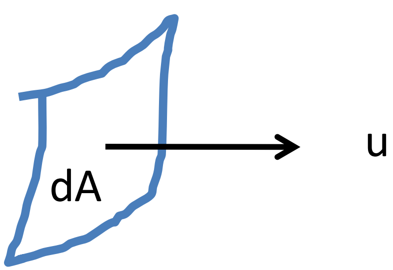
- Ορισμός με βάση την παροχή

μονάδα του χρόνου

V: Μέση ταχύτητα είναι η παροχή που διέρχεται ανά μονάδα επιφανείας

διατομής $\overline{V}=Q/A=\dfrac{1}{A}\iint_A u\,dA$ όπου u σημειακή ταχύτητα

dQ



$$Q=\iint_A u\cdot dA$$

$$\underset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{\Leftrightarrow}\ \overline{V}=\frac{Q}{A}$$

Συνέχεια (διατήρηση της μάζας)

- Μόνιμη ροή:
  - Εισροές =Εκροές

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3 Σύμφωνες μονάδες

Διάσταση	**Σύστημα SI**
μήκος	μέτρο (m)
μάζα	κιλό (kg)
χρόνος	δευτερόλεπτο (sec)
δύναμη	newton (m)
πίεση	pascal (m)
πυκνότητα	κιλό ανά m^3 (kg/m^3)
όγκος	κυβικό μέτρο (m^3)
ισχύς	watt (W)

ΑΝΟΙΚΤΟΙ - ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ
ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ

Μεταφορά νερού με αγωγούς

- **Ανοικτοί αγωγοί:** το νερό ρέει με ελεύθερη επιφάνεια (όπου η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική) ενώ η κύρια δύναμη ροής είναι η βαρύτητα
- **Κλειστοί αγωγοί:** Δεν υπάρχει ελεύθερη επιφάνεια ενώ η κίνηση μπορεί να ερμηνευθεί σε διαφορά πιέσεως
- Ανοικτοί αγωγοί: Τεχνητοί και φυσικοί
- Ανοικτοί αγωγοί:
  - φυσικοί αγωγοί, ακανόνιστη μεταβλητή διατομή
  - Πρισματικοί: διώρυγες σε αρδεύσεις και στο εξωτερικό υδραγωγείο, αποχετεύσεις, σταθερή διατομή για μεγάλα μήκη, ποικιλία διατομών
- Κλειστοί αγωγοί: αγωγοί διανομής, αγωγοί με άντληση για κατανίκηση υψομετρικών διαφορών, συνήθως κυκλικοί αγωγοί.

Ανοικτοί αγωγοί

Σε αντίθεση με τη ροή στους κλειστούς αγωγούς, η ροή στους ανοικτούς αγωγούς γίνεται με ελεύθερη επιφάνεια, στην οποία επικρατεί η ατμοσφαιρική πίεση. Τέτοιοι αγωγοί είναι οι φυσικοί αγωγοί (ποταμοί, ρέματα) και τεχνητοί αγωγοί (διώρυγες, τάφροι, υπόνομοι).

Η ροή στους ανοικτούς αγωγούς, ή αγωγούς με ελεύθερη επιφάνεια, ονομάζεται μόνιμη όταν το βάθος ροής δεν μεταβάλλεται με το χρόνο σε κάθε διατομή του αγωγού, αλλιώς καλείται μη μόνιμη.

Ομοιόμορφη ροή είναι εκείνη στην οποία το βάθος ροής είναι το ίδιο σε όλο το μήκος του αγωγού. Το σταθερό αυτό βάθος ονομάζεται ομοιόμορφο βάθος και συμβολίζεται με y_0. Στην περίπτωση αυτή η ροή είναι παράλληλη και ισχύει η υδροστατική κατανομή των πιέσεων.

Όταν το βάθος ροής μεταβάλλεται, αυξάνεται ή μειώνεται, η ροή ονομάζεται ανομοιόμορφη. Αν η μεταβολή του βάθους γίνεται βαθμιαία, μικρές κατά μήκος μεταβολές, τότε καλείται βαθμιαία μεταβαλλόμενη, αλλιώς ταχέως μεταβαλλόμενη.

1. ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΑ ΠΟΤΑΜΩΝ

Διαφορές μεταξύ τεχνητών και φυσικών ανοικτών αγωγών

Τεχνητοί ανοικτοί αγωγοί

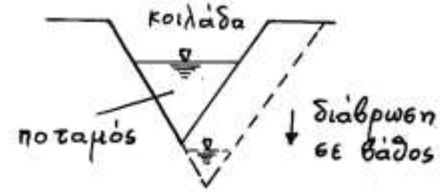
- Σταθερότητα γεωμετρίας της διατομής
- Σταθερότητα τραχύτητας παρειών
- Δεν υπόκεινται σε προσχώσεις και διαβρώσεις
- Δεν υπάρχει υδρόβια βλάστηση

Φυσικοί ανοικτοί αγωγοί

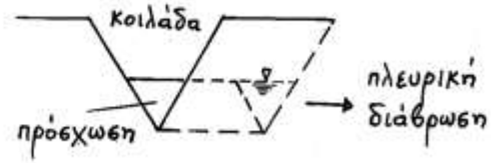
- Ο πυθμένας δεν είναι σταθερός, υπόκειται σε διαβρώσεις και εναποθέσεις φερτών υλών
- Η ροή μεταφέρει σημαντική ποσότητα στερεών υλών σε αιώρηση και ως φορτίο κοίτης

Χρυσάνθου, 2014

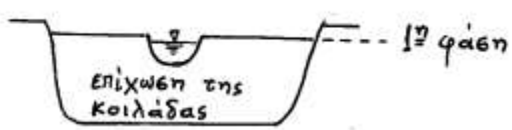
Σχηματισμός ποταμού (σε εγκάρσια τομή)



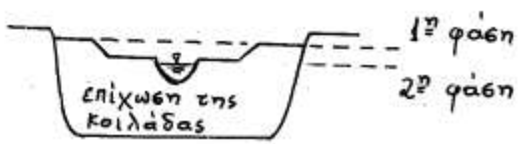
1ο στάδιο



2ο στάδιο



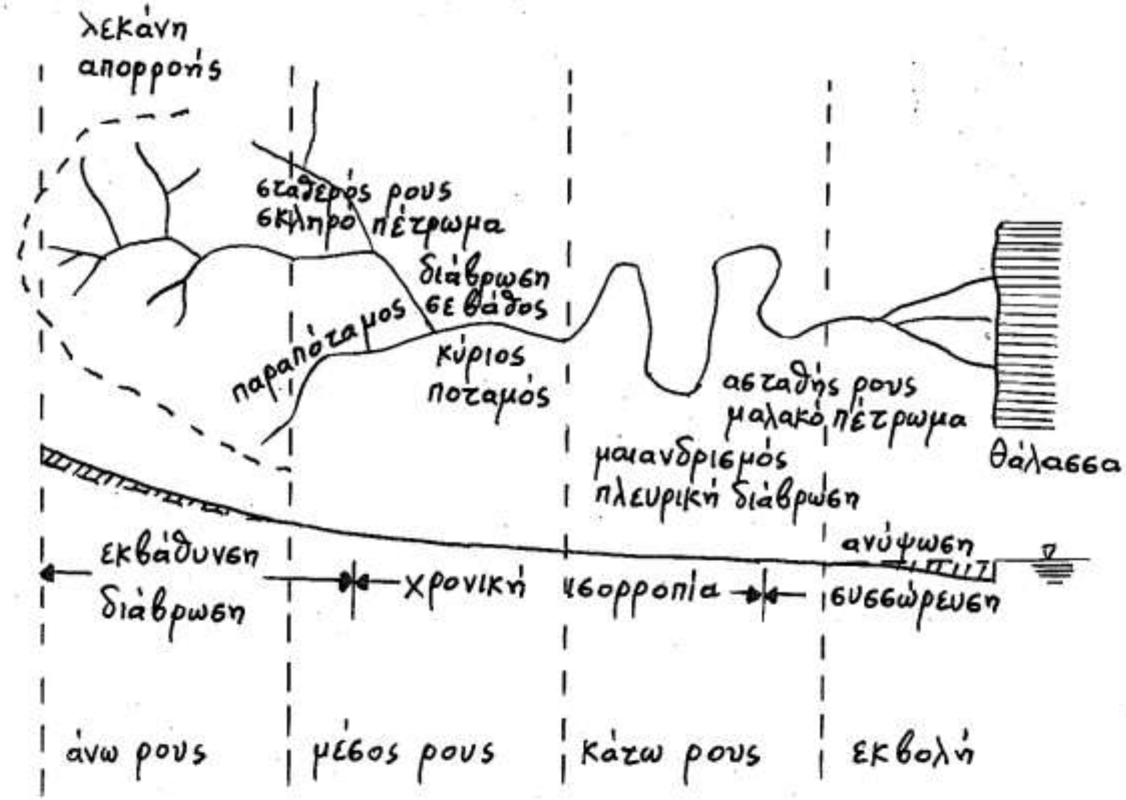
3ο στάδιο



3ο στάδιο

Χρυσάνθου, 2014

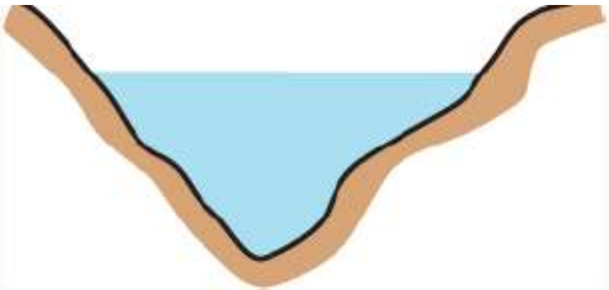
Ρους ενός ποταμού

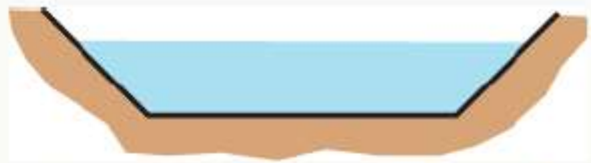


Χρυσάνθου, 2014

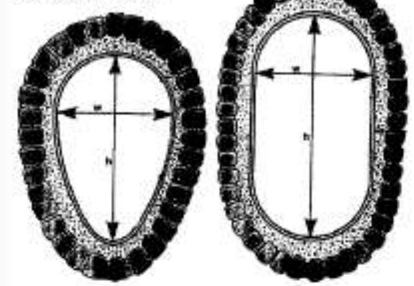
Πολυπλοκότητες σε ποτάμια υδραυλική

- Μεταβολή της διατομής
- Ανεπάρκεια επίλυσης μόνο με την κλασσική υδραυλική ανοικτών αγωγών
- Αλληλεπίδραση με τη λεκάνη απορροής
- **Ποτάμι: ζωντανός οργανισμός**
- Απαραίτητα γνωστικά παιδεία: υδραυλική και ειδικευμένη υδραυλική, υδρολογία, ιδιαίτερη αναφορά στο υποσύνολο των φερτών υλικών, παράμετροι ποιότητας νερού, οικολογικές παράμετροι και τελικά τεχνικές λήψης απόφασης

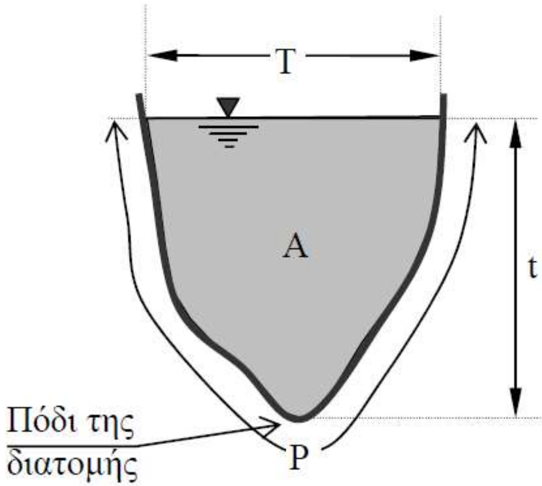




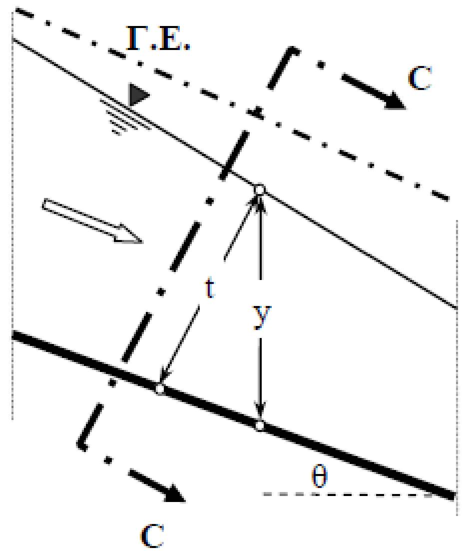
Early sewer designs. Best "capacity" for combined use was the oval shape (right) and best hydraulic combination was the egg shape (below). (Illustrations from WPC library)



t : βάθος ροής



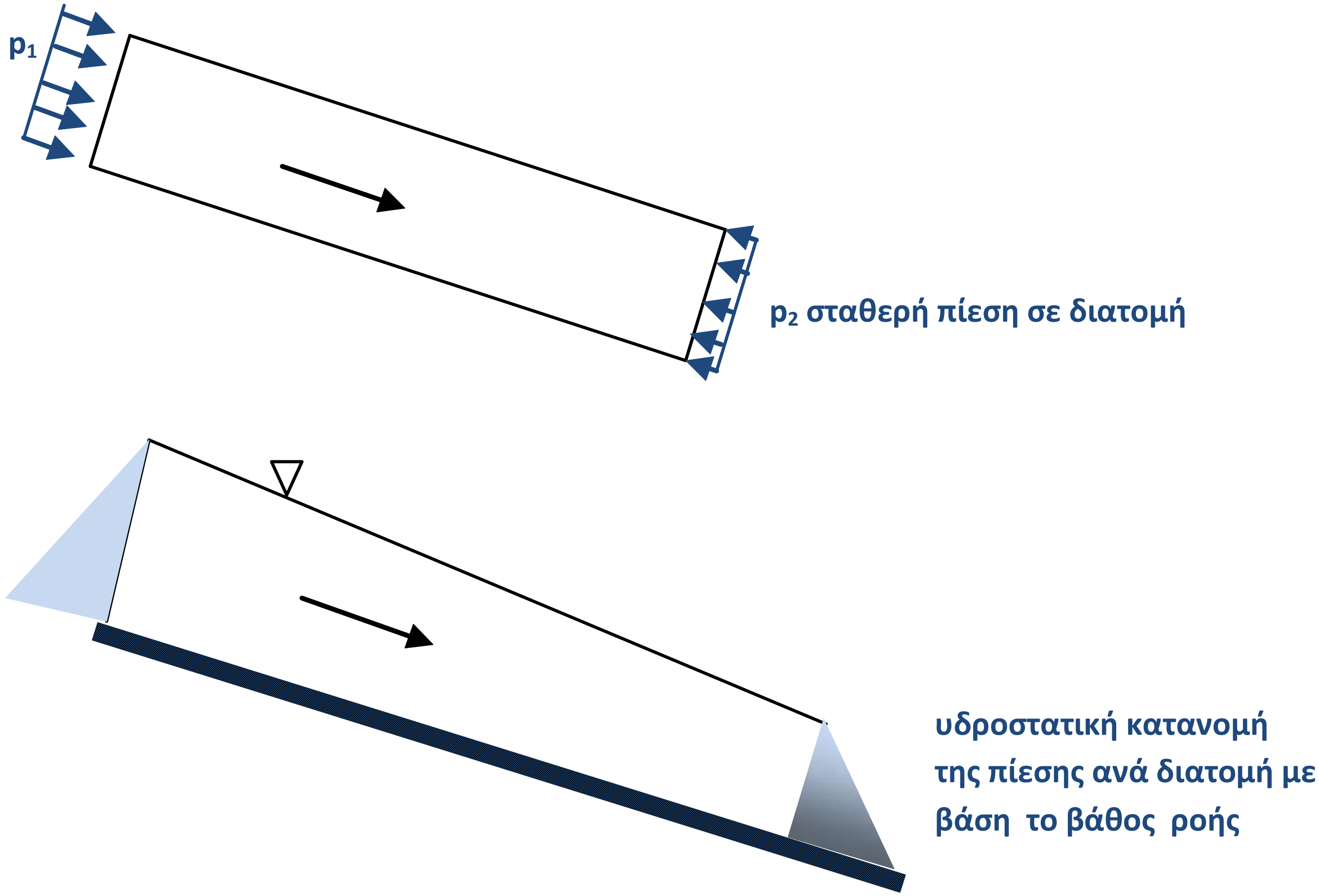
ΤΟΜΗ G - G



(Παπαϊωάννου, 2010)

Συνήθως οι ανοικτοί αγωγοί (ιδιαίτερα στα περισσότερα τεχνικά έργα) έχουν μικρές κλίσεις, επομένως το βάθος ροής (ύψος νερού κάθετο στη μέση ταχύτητα, t) είναι περίπου ταυτόσημο με την κατακόρυφη απόσταση από τον πυθμένα έως την ελεύθερη επιφάνεια, y.

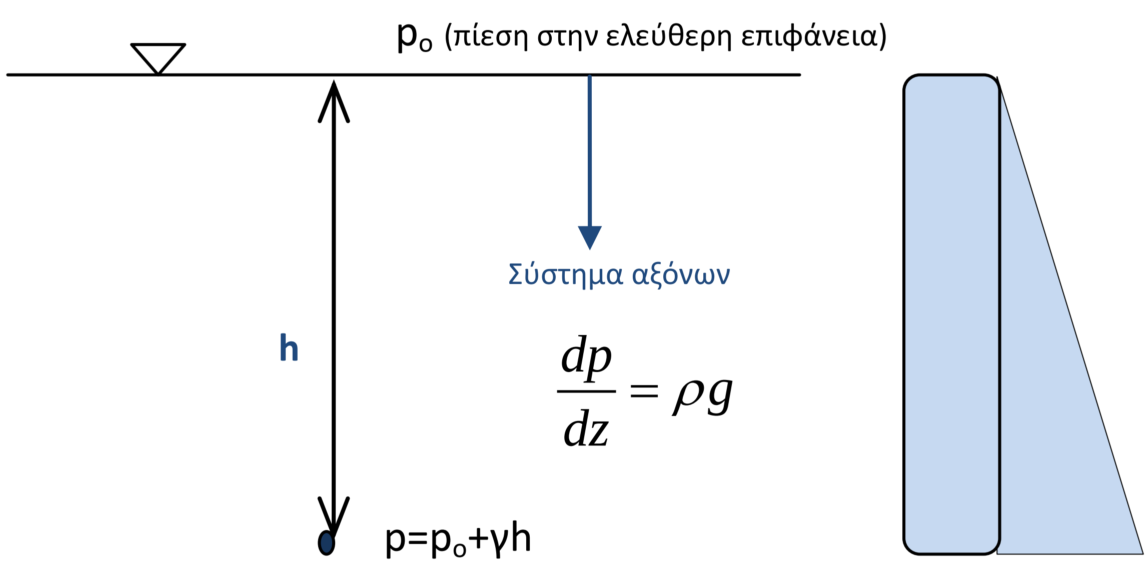
Έργα μηχανικού, ήπιες κλίσεις, t(βάθος ροής) και y περίπου ταυτίζονται



Σχ. Κατανομή της πίεσης σε διατομή σε κλειστούς και ανοικτούς αγωγούς

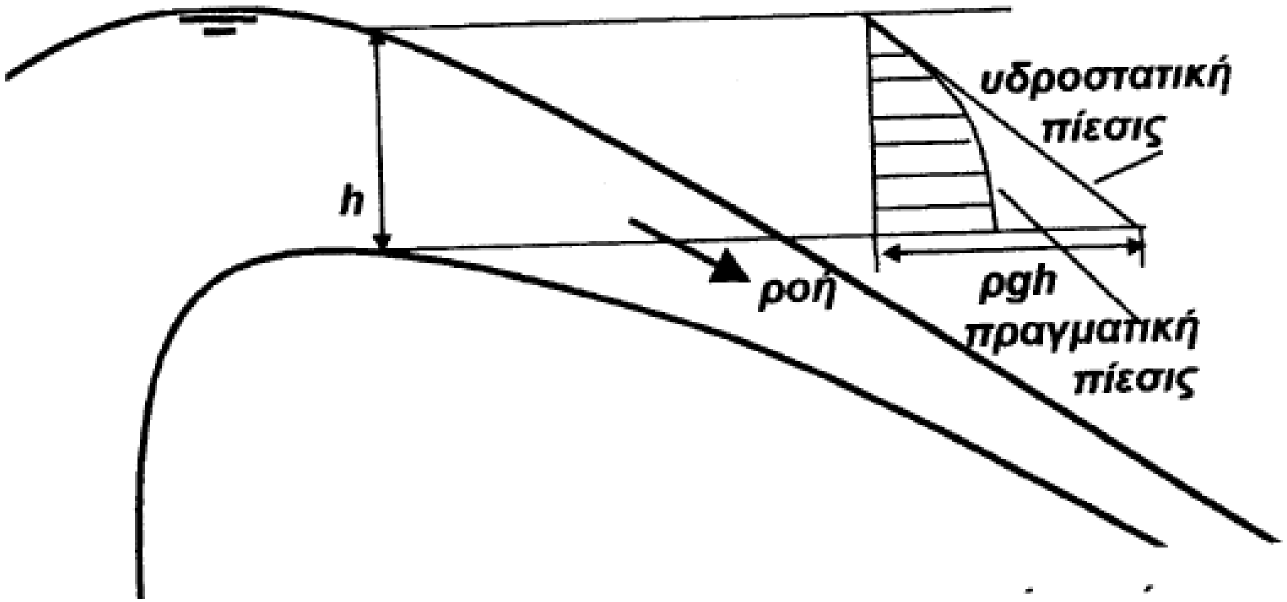
Ανοικτοί αγωγοί: Υδροστατική κατανομή της πίεσης σε κάθε διατομή

Συγκεκριμένα, η πίεση σε τυχαίο σημείο ομογενούς υγρού σε βάθος h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια ισούται με την πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια αυξημένη κατά το γινόμενο του ειδικού βάρους του υγρού επί την κατακόρυφη απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια h.

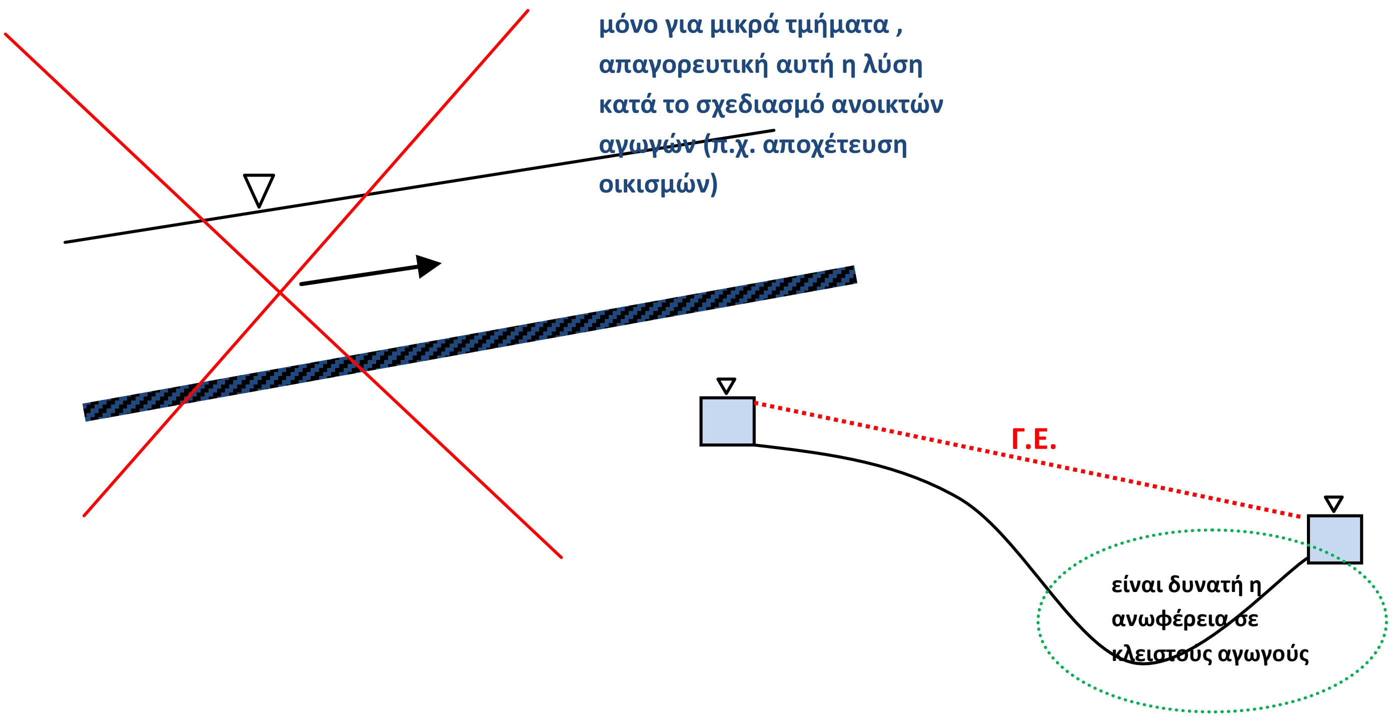


$$\frac{dp}{dz} = \rho g$$

Μη υδροστατική κατανομή της πίεσης σε κυρτές επιφάνειες ανοικτών αγωγών

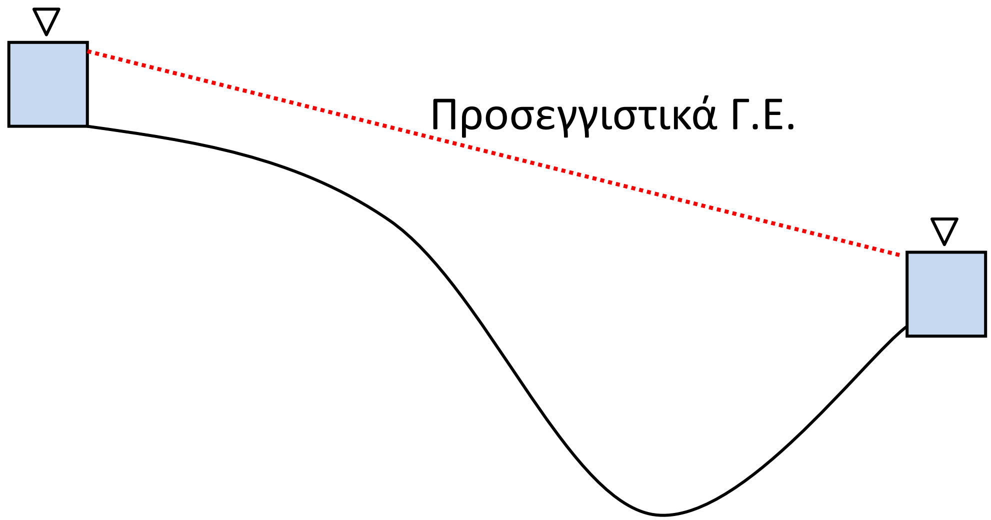


Σχήμα 3.5 Κατανομή πιέσεως της ροής επί κυρτής επιφανείας



Σχ. Ανωφέρειες σε κλειστούς και ανοικτούς αγωγούς

Κλειστοί αγωγοί, εύκολα επιτεύξιμη η ομοιόμορφη ροή για σταθερή διατομή



Μόνιμη ροή, Q = ΣΤΑΘ

D= ΣΤΑΘ → V=ΣΤΑΘ

Q= A V

Σχ. Ομοιόμορφη ροή σε κλειστούς και ανοικτούς αγωγούς

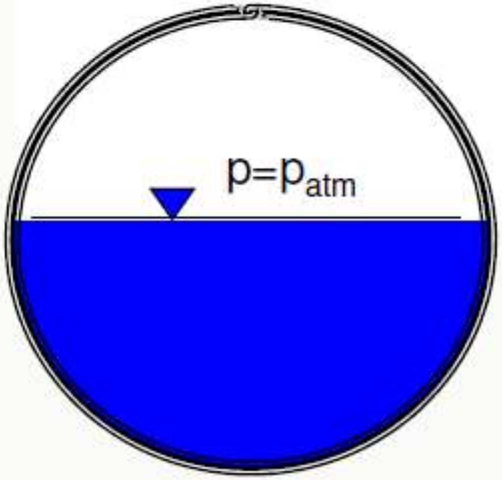
Ανοικτοί αγωγοί	Κλειστοί αγωγοί
Σχηματίζουν ελεύθερη επιφάνεια	**δε σχηματίζουν ελεύθερη επιφάνεια**
Ήπιες κλίσεις, άνοδος πυθμένα μόνο σε τοπικές συναρμογές	Ευκολία προσαρμογής στο ανάγλυφο
Η ροή μεταβάλλεται χωρικά με τη διαφορά αναγλύφου	Για σταθερή διάμετρο η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται (πλην τοπικών διαταραχών) με τη διαφορά αναγλύφου
Ποικιλία διατομών	Συνήθως κυκλικοί
Συνήθως υδροστατική κατανομή των πιέσεων σε μία διατομή (π.χ. πλην καμπύλων διατομών)	Συνήθως θεωρείται σταθερή πίεση σε μία διατομή
Μόνιμη Ομοιόμορφη ροή, σταθερή ταχύτητα, ισορροπία δυνάμεων	
Ομοιόμορφη ροή, εξίσωση Manning, ισορροπία δυνάμεων βάρους με την αντίσταση στη ροή από τον πυθμένα και τις όχθες του ανοικτού αγωγού, επίπεδος πυθμένας	Εύκολα επιτεύξιμη ομοιόμορφη ροή για σταθερή διάμετρο, ισορροπία μεταξύ δυνάμεων πίεσης και βάρους με την αντίσταση λόγω τριβών τριβές του τοιχωμάτων του αγωγού
Η κλίση του πυθμένα ταυτίζεται με την κλίση της γραμμής ενέργειας στην ομοιόμορφη ροή	Η κλίση ενέργειας καθορίζεται από την κλίση των γραμμικών απωλειών δεν ισχύει ότι και στους ανοικτούς αγωγούς
Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται η **ειδική ενέργεια**	Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται η **πιεζομετρική γραμμή**
Μεθοδολογικά , συνήθως χρησιμοποιείται ο **αριθμός Fr (προσοχή στον τύπο της διατομής)**	Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται ο **αριθμός Re**
Χρήση: Αποχετεύσεις ομβρίων και ακαθάρτων, αρδεύσεις για μεγάλες παροχές κλπ.	Χρήση: Δυσκολία αναγλύφου, δίκτυα διανομής, υποχρεωτικά σε δίκτυα διανομής οικισμών.

Ανοικτοί αγωγοί: σχηματίζουν ελεύθερη επιφάνεια:

- φυσικοί
- τεχνικές κατασκευές

- Natural flows: rivers, creeks, floods, etc.

- Human-made systems: fresh-water aquaducts, irrigation, sewers, drainage ditches, etc.



Μόνιμη ροή

Για το σχεδιασμό των υδραυλικών έργων τις περισσότερες φορές γίνεται η υπόθεση της μόνιμης ροής μολονότι στην πράξη η ροή δεν είναι μόνιμη. Για το σχεδιασμό των υδραυλικών έργων η μόνιμη (στατική) κατάσταση στην οποία εδράζεται η επίλυση είναι συνήθως η δυσμενέστερη.

Στη μόνιμη ροή ισχύει:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

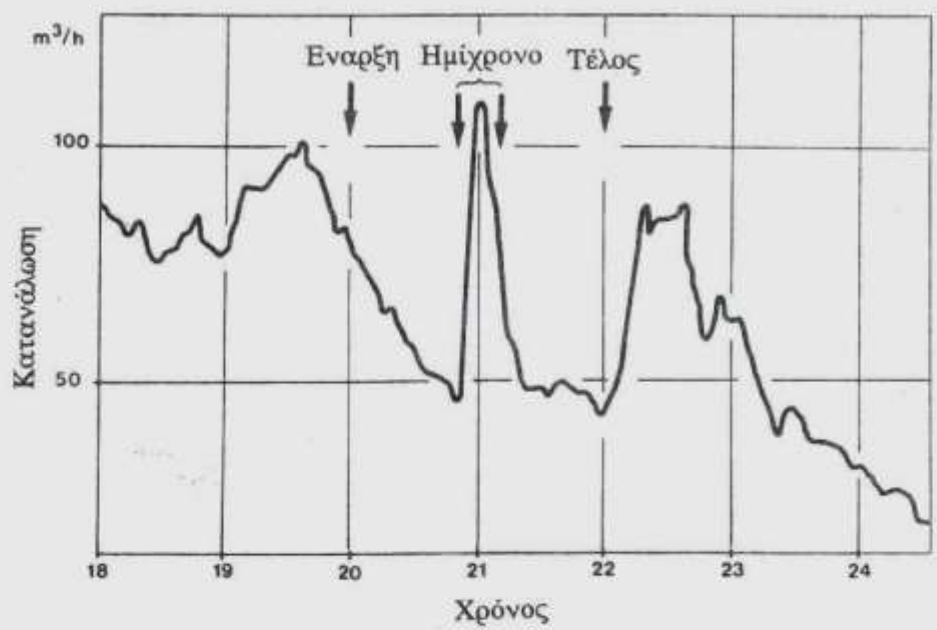
Όπου α οποιαδήποτε μέγεθος της ροής.

Πρακτικά η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι ο χρόνος δεν εμφανίζεται πουθενά ως μεταβλητή. Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι στην τυρβώδη ροή, που συνήθως συναντάται σε πραγματικά προβλήματα, ακόμη και όταν προσεγγίζεται ως μόνιμη ροή στην πραγματικότητα συμβαίνουν μικρές σύντομες διακυμάνσεις για όλα τα μεγέθη της ροής εκατέρωθεν της μέσης τιμής.

Σωληνοειδής ροή: Ο κύριος άξονας της ροής είναι σημαντικά μεγαλύτερος από την εγκάρσια διατομή. Εφαρμογές: Κλειστοί ανοικτοί και Ανοικτοί αγωγοί

Διαστασιολόγηση έργων: (demand driven)

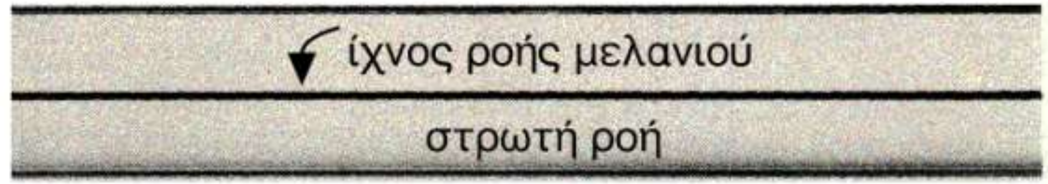
Δυσμενέστερη περίπτωση, π.χ. υδρεύσεις στο εσωτερικό υδραγωγείο διαστασιολογώ με βάση τη μέγιστη ωριαία παροχή, προφανώς όμως η παροχή δεν είναι μόνιμη



Σχήμα 2.9. Κατανάλωση μιας περιοχής της πόλης του Dortmund κατά τη διάρκεια του τελικού αγώνα του παγκόσμιου κυπέλου ποδοσφαίρου μεταξύ Ιταλίας Γερμανίας την 11.7.1982 [10].

ΣΤΡΩΤΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

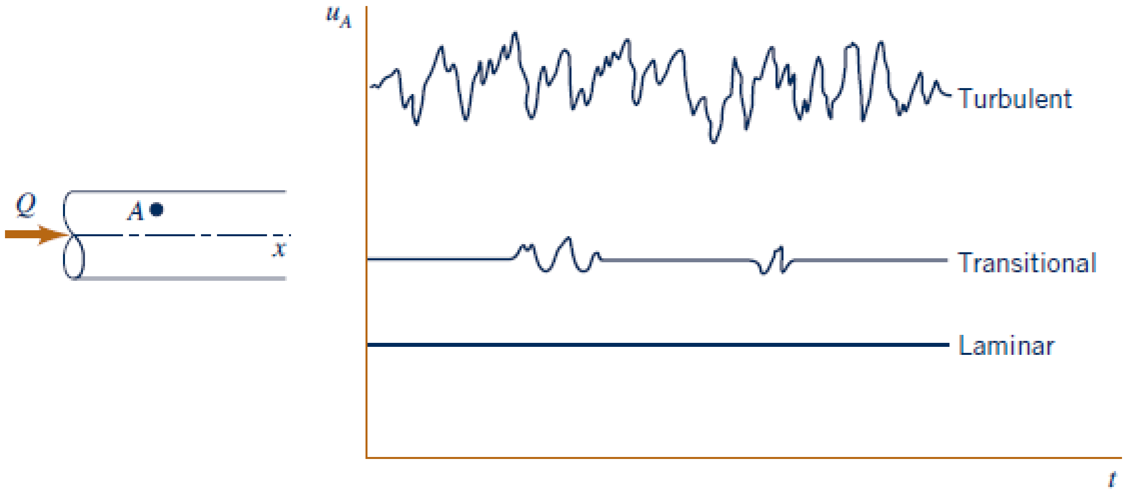
Φωτογραφία των πειραμάτων της διοχέτευσης από λεπτό ακροφύσιο μελάνης μέσα σε γυάλινο κυλινδρικό σωλήνα.



Η στρωτή ροή (laminar flow) χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το μελάνι εμφανίζεται σαν τεντωμένο νήμα.

Με την αύξηση της παροχής και την εμφάνιση αριθμού Reynolds πάνω από 2000, εμφανίζεται αστάθεια και μετάπτωση της ροής σε τυρβώδη

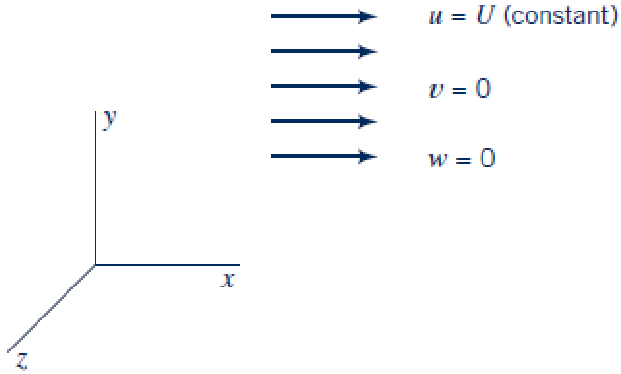
Στην τυρβώδη ροή μπορεί να υπάρξει μόνιμη ροή???

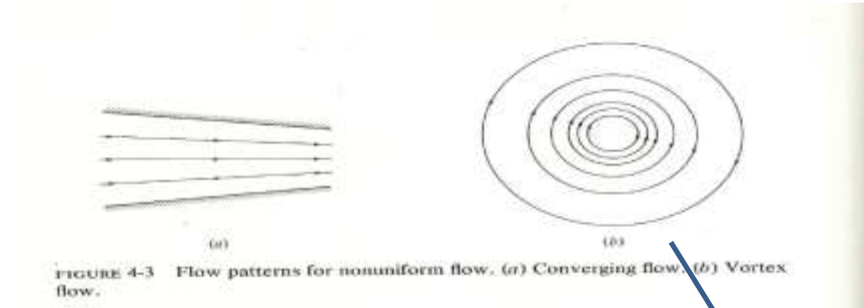


■ Figure 8.4 Time dependence of fluid velocity at a point.

Στη τυρβώδη ροή υπάρχει μόνιμη τιμή ενός μεγέθους κατά μέσο όρο, υπάρχει σίγουρα διακύμανση των τιμών της ταχύτητας από στιγμή σε στιγμή. Η θεώρηση μόνιμης ροής για τυρβώδη ροή οδηγεί στη συνακόλουθη θεώρηση τάσεων τύρβης.

Ομοιόμορφη ροή





Μη ομοιόμορφη ροή

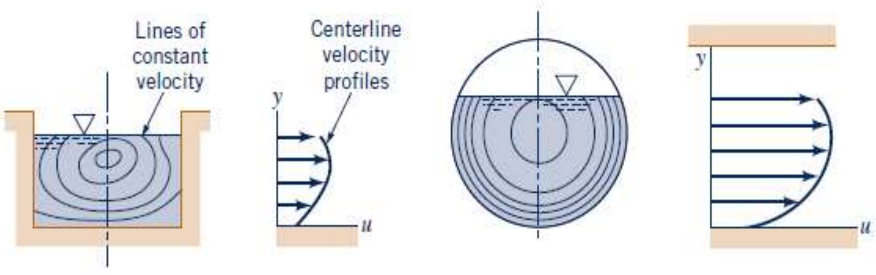
Ομοιόμορφη ροή: όταν η μεταβολή της ταχύτητας ίδια σε οποιαδήποτε επιλεχθείσα διεύθυνση, s

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

Στους αγωγούς (επαφή με στερεά τοιχώματα) μπορεί να επεκταθεί θεωρώντας μόνο αν η **μέση ταχύτητα** για ίδιες διατομές παραμένει η ίδια .
(Streeter et al., 2010)

Αλλά...μεταβολής της ταχύτητας καθ΄ ύψος και μονοδιάστατη ομοιόμορφη ροή

- Με βάση τις οριακές συνθήκες η ταχύτητα στα τοιχώματα των αγωγών είναι μηδέν, επομένως το προφίλ ταχυτήτων αλλάζει καθ΄ ύψος ακόμη και στην ομοιόμορφη ροή



(a)

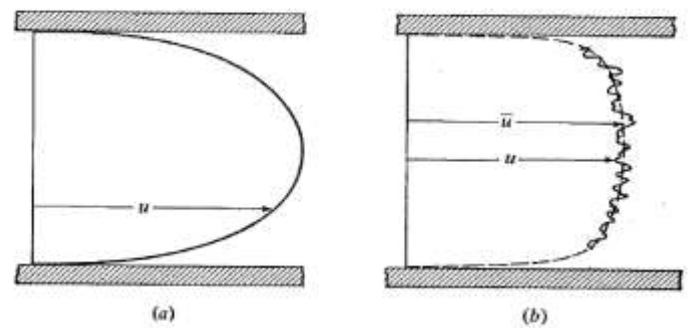
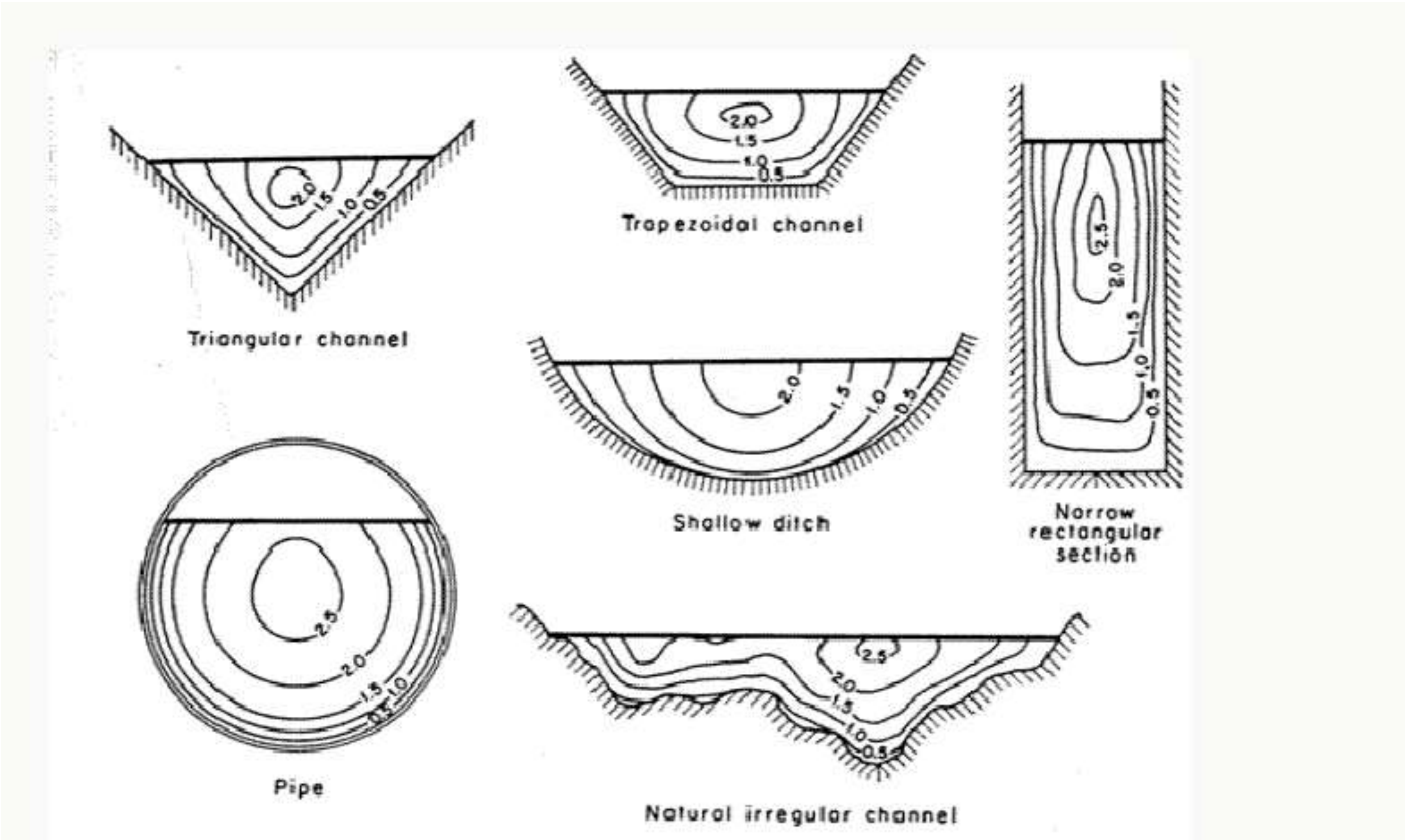


FIGURE 4-4 Laminar and turbulent flow in a pipe. (a) Laminar flow, (b) Turbulent flow.

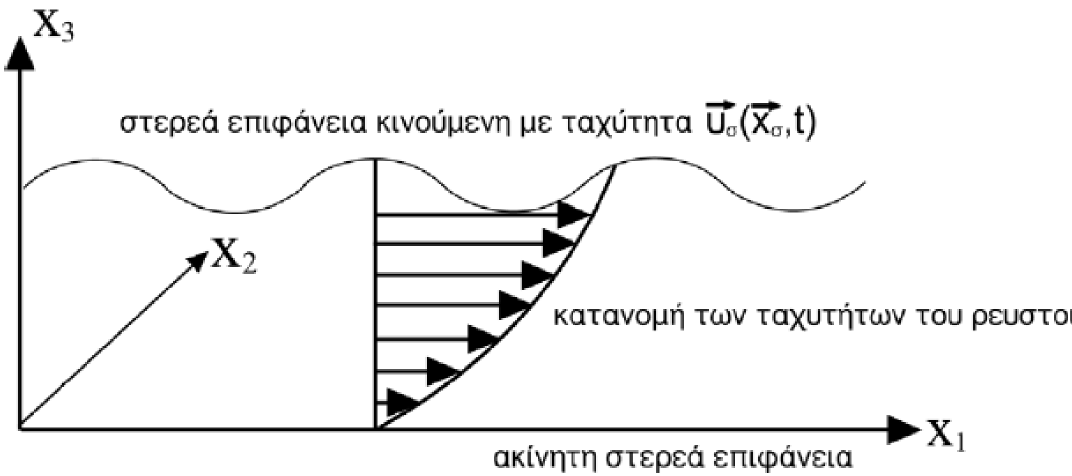
- απλοποίηση, θεωρούμενο προφίλ ταχυτήτων (μη πραγματικό)

Πραγματικό προφίλ ταχυτήτων



ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ ΤΗΣ ΡΟΗΣ – ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οριακές συνθήκες



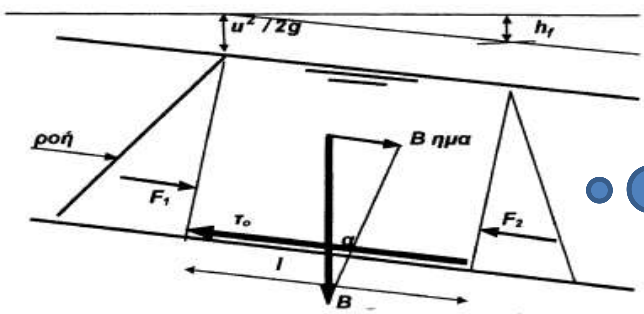
Το ρευστό προσφύεται πάντα στις στερεές επιφάνειες με τις οποίες έρχεται σε επαφή. Η ταχύτητα του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή με μια στερεά επιφάνεια είναι ίση με την ταχύτητα της στερεάς επιφάνειας, ανεξάρτητα από το πόσο λεία ή τραχεία είναι η στερεά επιφάνεια.

Συνθήκη της μη ολίσθησης (non-slip condition)

Πραγματικό προφίλ ταχύτητας: Στο στερεό όριο ακολουθείται η ταχύτητα του στερεού ορίου.

Αγγελίδης, 2015

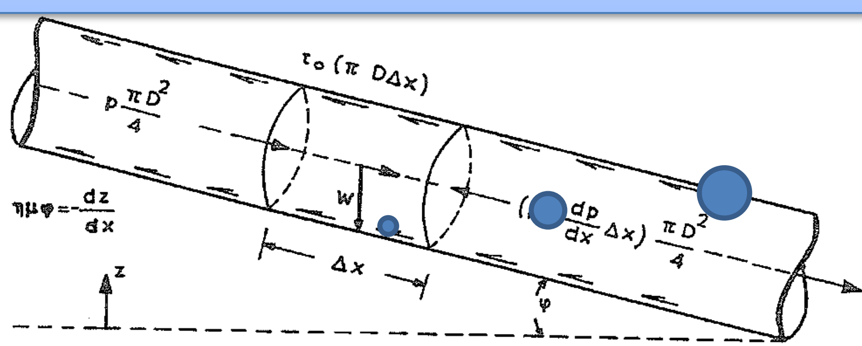
Μόνιμη Ομοιόμορφη ροή, ανοικτοί αγωγοί: Ομοιόμορφη ροή όταν το ύψος ροής παραμένει σταθερό που είναι ταυτόσημο με τη θεώρηση σταθερής ταχύτητας → β’ νόμος του Νέυτωνα → άθροισμα δυνάμεων μηδέν, ισορροπία της οριζόντιας συνιστώσας του βάρους με τη δύναμη αντίσταση στη ροή λόγω τριβής



Σχήμα 4.1 Όγκος ελέγχου διά την απόδειξιν της εξισώσεως της ομοιομόρφου ροής

Εφόσον το ύψος ροής παραμένει το ίδιο (κανονικό βάθος ροής) και για υδροστατική κατανομή της πίεσης , οι δυνάμεις πίεσης στον όγκο ελέγχου αλληλοεξουδετερώνονται

Μόνιμη Ομοιόμορφη ροή, κλειστοί αγωγοί: Διατήρηση της ορμής σε κυκλικό αγωγό υπό πίεση με μόνιμη ροή, σταθερή διατομή → **σταθερή ταχύτητα (άρα για σταθερή διατομή έχω ομοιόμορφη ροή)**, β’ νόμος του Νέυτωνα → άθροισμα δυνάμεων μηδέν, ισορροπία μεταξύ των δυνάμεων πιέσεως και βάρους με τη δύναμη αντίσταση λόγω τριβής (για οριζόντιο αγωγό ισορροπία μεταξύ δυνάμεων τριβής και πιέσεως

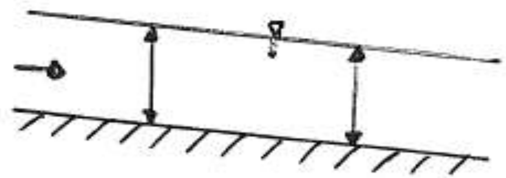


Απειροστός όγκος ελέγχου, η πίεση σταθερή σε όλο το ύψος της διατομής , διαφέρει κατά τον άξονα της ροής από θέση σε θέση

Μεταβολή διατομής και ταχύτητα

- Διατήρηση της μάζας
- Μονοδιάστατη μόνιμη ροή: $Q = V \cdot A$
- Κλειστοί αγωγοί υπό πίεση, σταθερή διατομή (συνήθως κυκλική Α= σταθ)→ σταθερή ταχύτητα
  - (αλλάζει όπου υπάρχουν διαφορές συναρμογής τις λαμβάνουμε έμμεσα υπόψη με τις τοπικές απώλειες)
- Ανοικτοί αγωγοί: Σε μη ομοιόμορφη ροή αλλάζει το ύψος επομένως $Q = V \cdot A(y)$ → αλλάζει και η ταχύτητα. Μόνο στην ομοιόμορφη ροή, y, A = σταθερά από διατομή σε διατομή.

Ομοιόμορφη: Ταχύτητα του νερού σταθερή,
Βάθος νερού σταθερό
από διατομή σε διατομή ⇒
Επιφάνεια νερού παράλληλη προς τον
πυθμένα



Ανομοιόμορφη: Μεταβαλλόμενο βάθος από διατομή
σε διατομή ⇒
Επιφάνεια νερού μη παράλληλη προς
τον πυθμένα

Βαθμιαία μεταβολή

Ταχεία (απότομη μεταβολή)

Ακόμη και αν η ροή είναι μόνιμη υπάρχει συνισταμένη δύναμη που προκαλεί χωρική διαφοροποίηση της ροής

Επιτάχυνση

ΡΟΗ ΠΡΟΕΡΧΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΙΝΗΣΗ ΠΛΑΚΑΣ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟ ΧΩΡΟ (1ο πρόβλημα του Stokes)

Εξίσωση συνεχείας

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)=0$$

Εξισώσεις Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)=\rho f_1-\frac{\partial P}{\partial x_1}+\mu\nabla^2 U_1$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)=\rho f_2-\frac{\partial P}{\partial x_2}+\mu\nabla^2 U_2$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}+U_1\frac{\partial U_3}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)=\rho f_3-\frac{\partial P}{\partial x_3}+\mu\nabla^2 U_3$$

Επιτάχυνση: $\frac{D\mathbf{U}}{Dt}$

Όταν έχω μεταβαλλόμενη ροή, υπάρχει συνισταμένη δύναμη διάφορη του μηδενός ακόμη και αν η ροή είναι μόνιμη

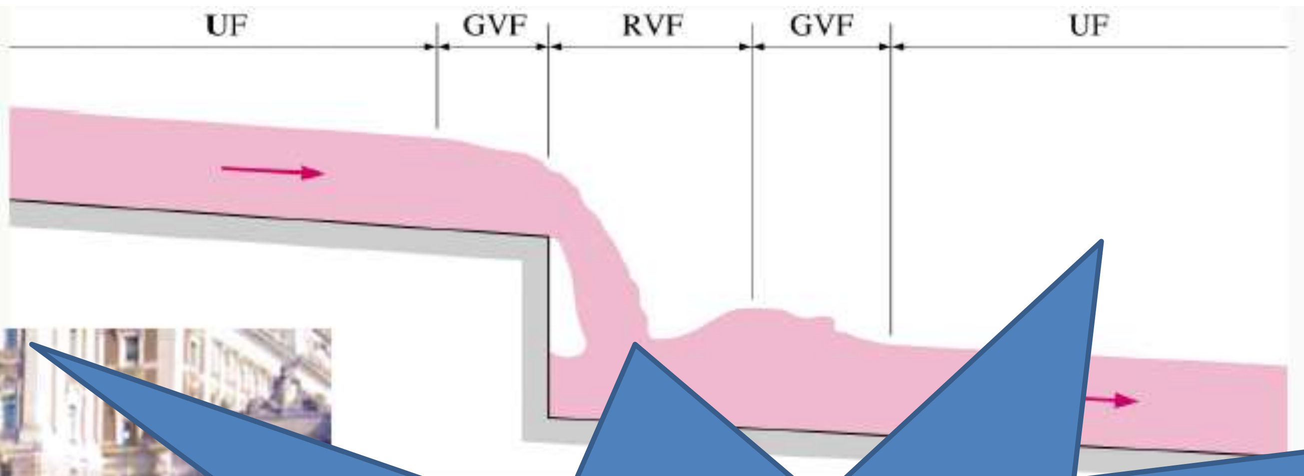
Τοπική επιτάχυνση $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$

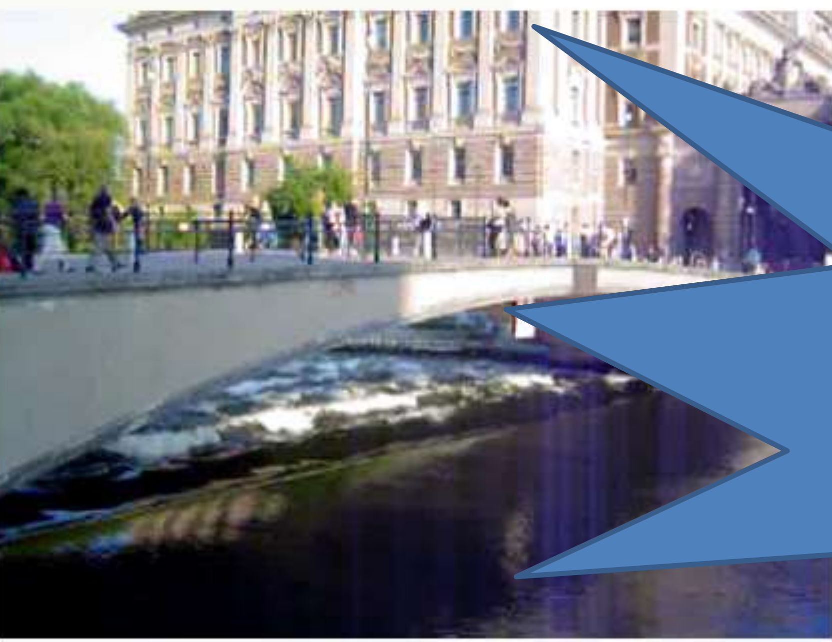
Μεταθετικοί όροι επιτάχυνσης $U_1\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_3}$

Στο παρακάτω σχήμα λαμβάνει χώρα:

1. Ομοιόμορφη ροή
2. Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή
3. Ταχέως μεταβαλλόμενη ροή
4. Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή
5. Ομοιόμορφη ροή

Η ροή είναι μόνιμη





Ομοιόμορφη ροή: σταθερό βάθος ροής (άρα και ταχύτητα)
Βραδέως μεταβαλλόμενη ροή: χαρακτηρίζεται από αργή μεταβολή προφίλ («ημί-ομοιόμορφη ροή»)
Ταχέως μεταβαλλόμενο προφίλ της ελεύθερης επιφανείας στη ταχέως μεταβαλλόμενη ροή

Κυριότερες διαφορές ανοικτών και κλειστών Αγωγών

- Κατά την ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση το ρευστό καταλαμβάνει όλη την διατομή ενώ σε ανοικτούς αγωγούς το ρευστό σχηματίζει ελεύθερη επιφάνεια.
- Η πίεση σε μία διατομή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση θεωρείται σταθερή, ενώ στους ανοικτούς αγωγούς αν δεν υπάρχουν ιδιαίτερες καμπυλώσεις ακολουθεί υδροστατική κατανομή.
- Στους κλειστούς αγωγούς είναι δυνατή η ροή και σε ανωφέρειες αγωγών (αρκεί η αρχική και η τελική θέση να εξασφαλίζουν επαρκές ύψος πίεσης σε κάθε σημείο του δικτύου) ενώ σε ανοικτούς αγωγούς οι ανωφέρειες είναι δυνατές μόνο σε μικρά τμήματα της ροής (π.χ. εκχειλιστές).
  - Κατά τη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση, αγνοώντας τις τοπικές απώλειες ενέργειας και τις συνακόλουθες δευτερεύουσες ροές, ομοιόμορφη ροή (σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του αγωγού), επιτυγχάνεται σχετικά εύκολα: σταθερή διαμέτρος σε ένα μήκος αγωγού.
  - Η συνθήκη ομοιόμορφης ροής σε ανοικτούς αγωγούς είναι πιο δυσχερής, προϋποθέτει σημαντικό μήκος ενώ μεσολαβούν μεταβατικές περιοχές ταχέως μεταβαλλόμενης ροής και βραδέως μεταβαλλόμενης ροής όπως στο σχήμα.
- Σε κλειστούς αγωγούς μπορούν σχετικά εύκολα να κατανικηθούν σημαντικές ανωφέρειες με τη χρήση αντλιών
- Στους κλειστούς αγωγούς υπό πίεση συνήθως χρησιμοποιείται μόνο κυκλικός αγωγός ενώ σε ανοικτούς αγωγούς μία ποικιλία διατομών.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ

Βασικές εξισώσεις στην υδραυλική

- 1) Συνέχειας (μάζας)
  – Σε μόνιμη ροή το άθροισμα των παροχών που εισρέουν σε ένα όγκο ελέγχου είναι ίσο με το άθροισμα των παροχών που εκρέουν:

$$\sum Q_{\mathrm{in}} = \sum Q_{\mathrm{out}}$$

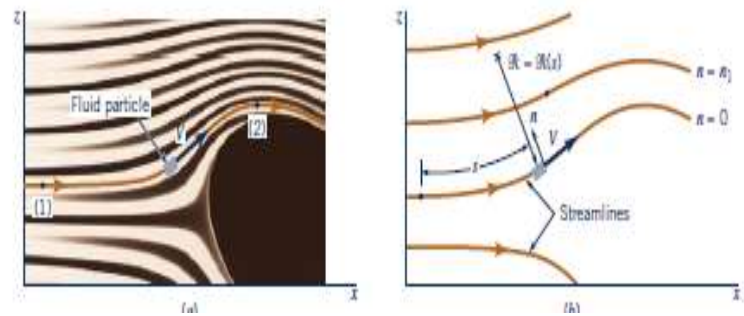
Εξίσωση συνέχειας σε κλειστούς αγωγούς

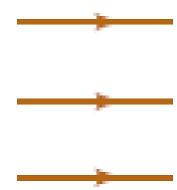
- ***Ομοιόμορφη ροή σε κλειστούς αγωγούς***
- Για μόνιμη μονοδιάστατη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση με ένα κλάδο αγωγού)δεν συμβάλλουν άλλοι αγωγοί) τότε για σταθερή διάμετρο θεωρείται σταθερή ταχύτητα (ομοιόμορφη ροή), ανεξάρτητα από το ανάγλυφο.
- Πράγματι:

$$\left.\begin{aligned} &Q = A \cdot V = \sigma\tau\alpha\theta \\ &A = \frac{\pi D^2}{4}, D = \sigma\tau\alpha\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow V = \sigma\tau\alpha\theta$$

Γραμμές ροής

- Η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στις γραμμές ροής (φωτογραφία πεδίου ταχυτήτων)
- Στη μόνιμη ροή οι τροχιές συμπίπτουν με τις γραμμές ροής
- Απλοποίηση επιτάχυνσης: (συνάρτηση της διεύθυνσης s των γραμμών ροής και του καθέτου μοναδιαίου διανύσματος σε αυτές)





$a_s = a_n = 0$

$$a_s = V\frac{\partial V}{\partial s}, \qquad a_n = \frac{V^2}{\Re}$$

Εξίσωση Bernoulli

- Κλίμακα έργων Πολιτικού μηχανικού: μεγάλες αποστάσεις γραμμικές απώλειες τριβής
- Για μικρές αποστάσεις , προσεγγιστικά σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να υποθέσουμε μηδενικές απώλειες ενέργειας (εξίσωση Bernoulli)
- Συμπεράσματα: π.χ. για οριζόντιο αγωγό, η μείωση της διαμέτρου οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας (εξ. Συνέχειας) και κατά συνέπεια σε μείωση της πίεσης (εξ. Bernoulli)
- Απότομη αύξηση υψομέτρου σε κλειστό αγωγό σταθερής διατομής οδηγεί σε πτώση της πίεσης

Νόμος Bernoulli, ολοκλήρωση κατά μήκος των γραμμών ροής στις εξισώσεις Euler (άτριβη ροή)
εφαρμογή, κατά μήκους μίας γραμμής ροής

$$-\frac{d}{ds}(p + \gamma z) = \rho V_s \frac{dV_s}{ds}$$

or

$$-\frac{d}{ds}(p + \gamma z) = \rho \frac{d}{ds}\left(\frac{V_s^2}{2}\right) \tag{5-10}$$

When Eq. (5-10) is integrated with respect to s for incompressible flow, we get

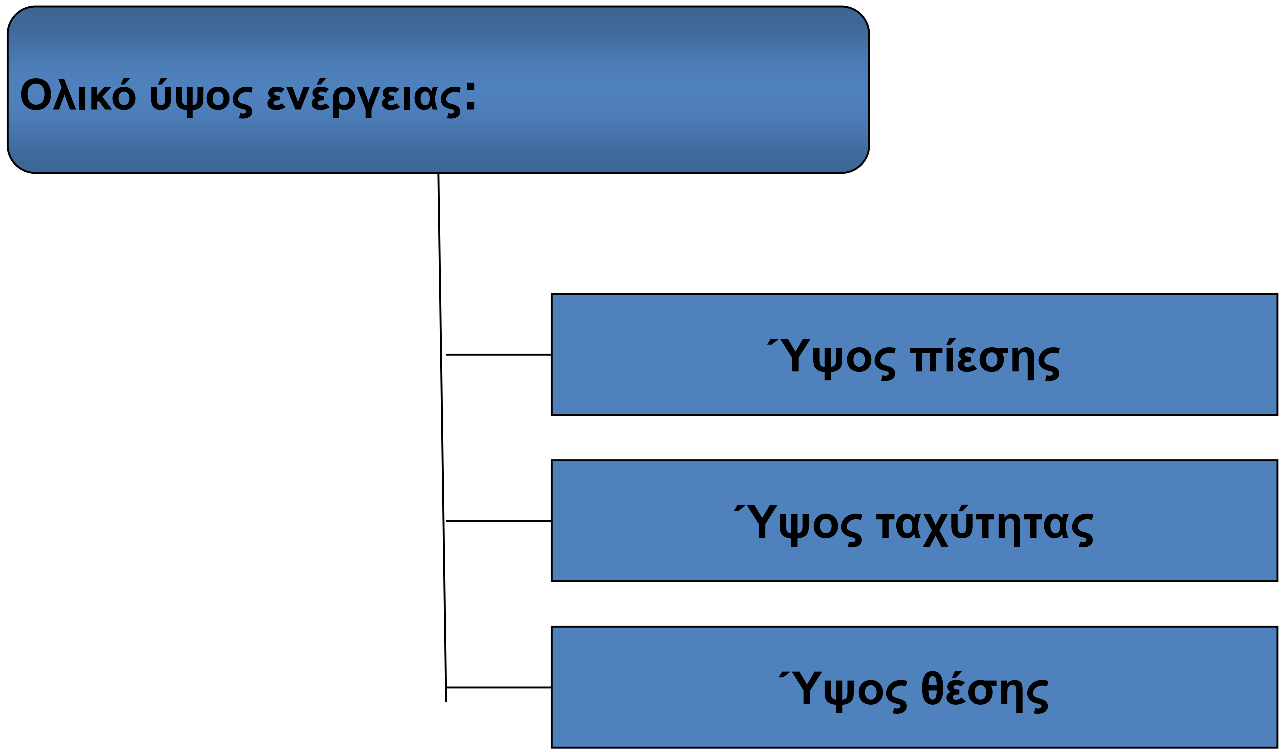
$$p + \gamma z + \rho \frac{V_s^2}{2} = C \tag{5-11}$$

Equation (5-11) is Bernoulli's equation, which can also be written as

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{V_s^2}{2g} = C_1 \tag{5-12}$$

Here p/γ, z, and $V_s^2/2g$ are called pressure head, elevation, and velocity head, respectively.

Αστρόβιλη ροή →η εξίσωση ισχύει σε κάθε σημείο του πεδίου ροής


Ολικό ύψος ενέργειας:
Ύψος πίεσης
Ύψος ταχύτητας
Ύψος θέσης

Αρχή της διατήρησης της ενέργειας. Το ύψος της γραμμής ενέργειας σε μία θέση *1* (H_1) είναι ίσο με το ύψος ενέργειας σε μία κατάντη θέση *2* (H_2) μαζί με τις απώλειες στη διαδρομή 1-2 $(\Sigma h)_{f,1\rightarrow 2}$:

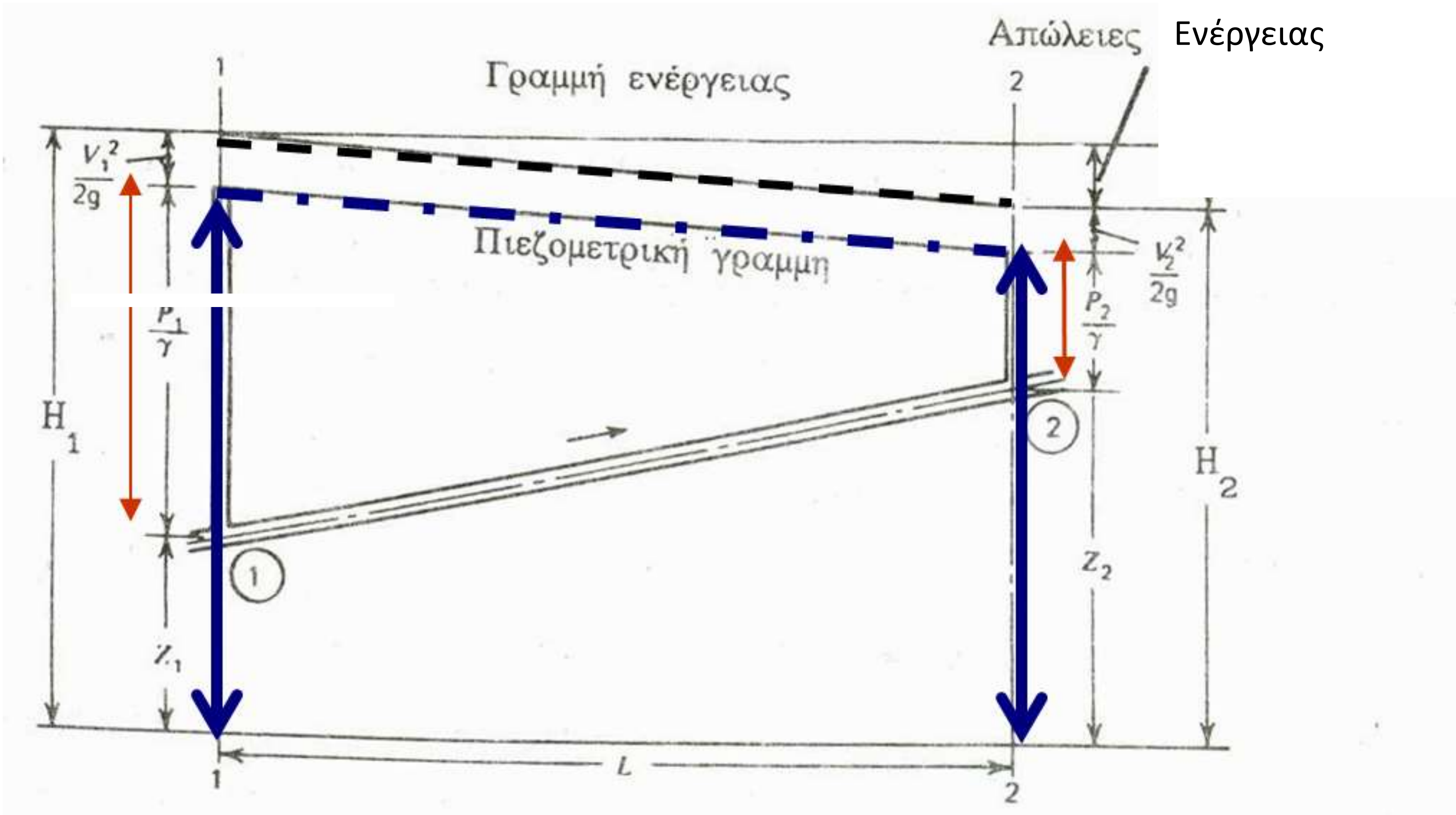
$$H_1=H_2+\Sigma h_{f,\,1\rightarrow 2}$$

Σημειώνεται ότι σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση για μόνιμη ροή το ύψος ενεργείας H_1 σε μονάδες μήκους στη θέση (1) αποτελείται:

- Από την υψομετρική στάθμη (z_1)
- Το ύψος πίεσης $\frac{p_1}{\rho g}$
- Το ύψος κινητικής ενέργειας $\frac{{V_1}^2}{2g}$

Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{{V_1}^2}{2g} \\ H_2 &= z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{{V_2}^2}{2g} \end{aligned}\right\}$$



Γραμμή ενέργειας: Πτωτική, ακολουθώντας την κίνηση του νερού, εκτός αν υπάρχει αντλία

Πιεζομετρική γραμμή = ύψος πίεσης +ύψος θέσης

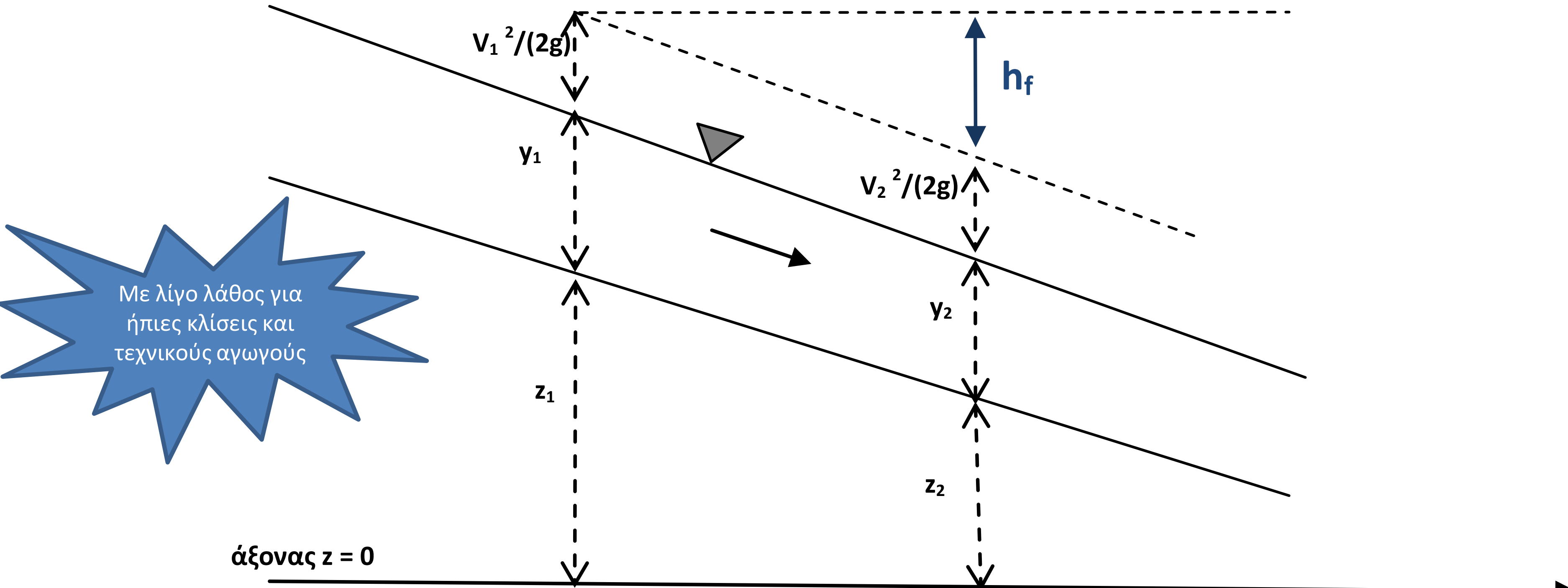
Η πίεση σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή για μία διατομή. Αντίθετα στους ανοικτούς αγωγούς η πίεση σε μία διατομή δεν είναι σταθερή αλλά ακολουθεί την υδροστατική κατανομή καθ΄ ύψος (εξαιρείται ο καμπύλος πυθμένας). Κατά συνέπεια το ύψος πίεσης και το ύψος θέσης ταυτίζονται από τη στάθμη της ελεύθερης επιφανείας από τον άξονα αναφοράς

Οπότε σε ανοικτούς αγωγούς ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= z_1 + y_1\ (\beta\acute{\alpha}\theta o\varsigma\ \rho o\acute{\eta}\varsigma) + \frac{{V_1}^2}{2g} \\ H_2 &= z_2 + y_2\ (\beta\acute{\alpha}\theta o\varsigma\ \rho o\acute{\eta}\varsigma) + \frac{{V_2}^2}{2g} \end{aligned}\right\}$$

$H_1 = H_2 + \Sigma h_{f,\,1\rightarrow 2}$

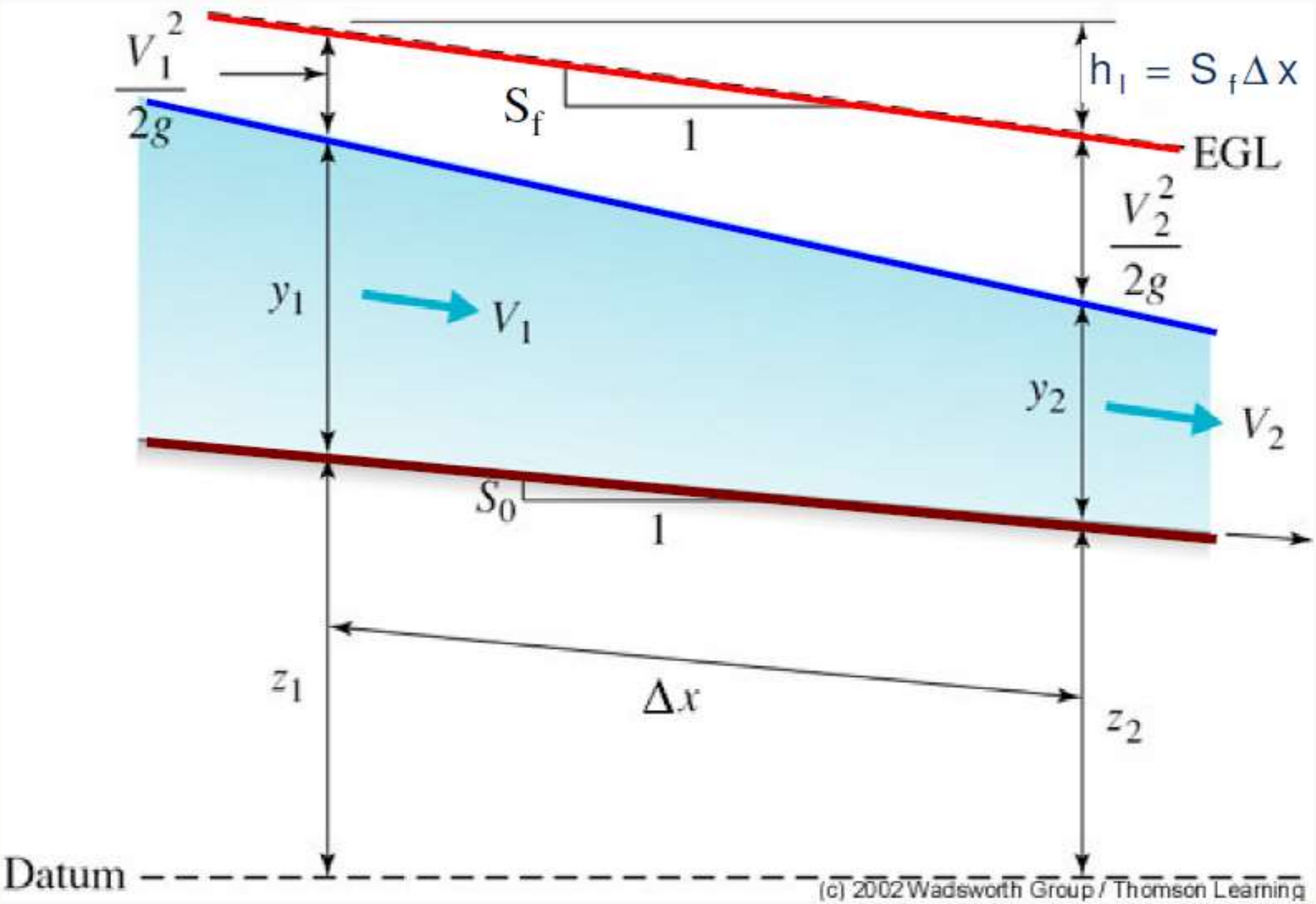
Σχόλιο: Προφανώς, το βάθος ροής είναι άμεσα ορατό ενώ το ύψος πίεσης σε αγωγούς υπό πίεση μπορεί να μετρηθεί μόνο με τη βοήθεια μανομέτρου.



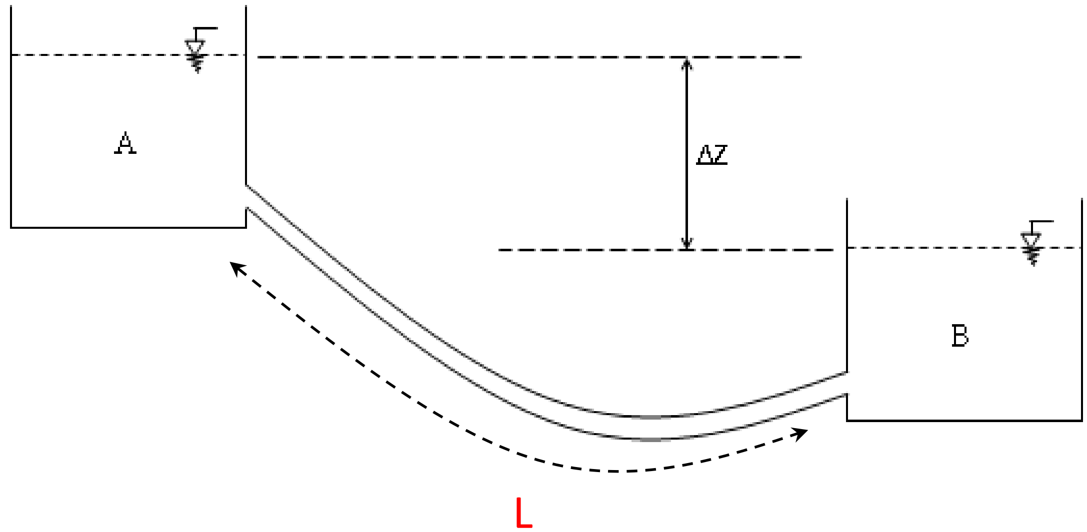
Σχ. Σκαρίφημα που δείχνει την αρχή διατήρησης της ενέργειας για ένα τμήμα του ανοικτού αγωγού αγωγού 1- 2.

Ειδική ενέργεια= βάθος ροής + κινητική ενέργεια

Non-uniform gradually varied flow. $S_f \neq S_w \neq S_o$



Άτοπο!!!
Ανάγκη συμπερίληψης των απωλειών ενέργειας σε μεγάλη μήκη



Αν δεν λάβω υπόψη τις απώλειες ενέργειας ισχύει:

$$\frac{\cancel{p}_A}{\rho g}+\frac{\cancel{V}_A^{\,2}}{2g}+z_A=\frac{\cancel{p}_B}{\rho g}+\frac{\cancel{V}_B^{\,2}}{2g}+z_B \Leftrightarrow z_A=z_B\ \left(\acute{\alpha}\tau o\pi o\right)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις απώλειες ενέργειας ισχύει:

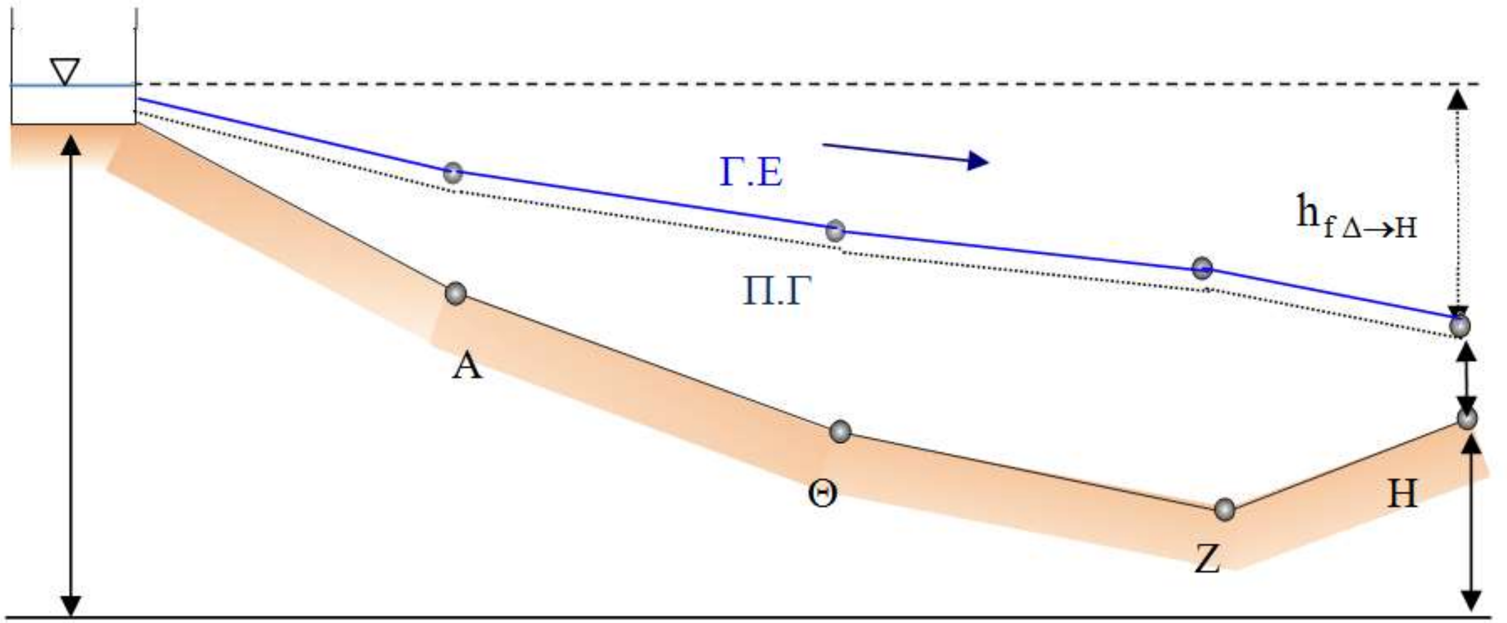
$$\frac{\cancel{p}_A}{\rho g}+\frac{\cancel{V}_A^{\,2}}{2g}+z_A=\frac{\cancel{p}_B}{\rho g}+\frac{\cancel{V}_B^{\,2}}{2g}+z_B+\Sigma h_f \Leftrightarrow$$

$$z_A-z_B=\Delta z=\Sigma h_f$$

- Οι συνολικές απώλειες ενέργειας είναι ίσες με την υψομετρική διαφορά των στάθμεων των ελευθέρων επιφανειών (μεταξύ των δύο δεξαμενών)
- Το νερό έχει μνήμη προσμετρά τις απώλειες για όλο το μήκος του αγωγού L

Γραμμή ενέργειας σε ένα αγωγό (χωρίς αντλία)

- Γραμμή ενεργείας: ο γεωμετρικός τόπος του ύψος θέσης, του ύψους πίεσης και του ύψους κινητικής ενέργειας
- Πάντοτε πτωτική από τη διατήρηση της ενέργειας
- Δεν ισχύει πάντα το ίδιο για την Π.Γ. (βλπ. Επ. μάθημα)



Σχ Ενεργειακή διαδρομή από την υψομετρική θέση της δεξαμενής, στο Η

«στριφνό θέμα»
Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας, α

- Μη ομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας καθ΄ ύψος, συντελεστής ώστε $\alpha V^2/2g$ να δίνει τη μέση κινητική ανά μονάδα βάρους. Για μόνιμη ροής με βάση την κινητικής ενέργεια που διέρχεται στη μονάδα του χρόνου:

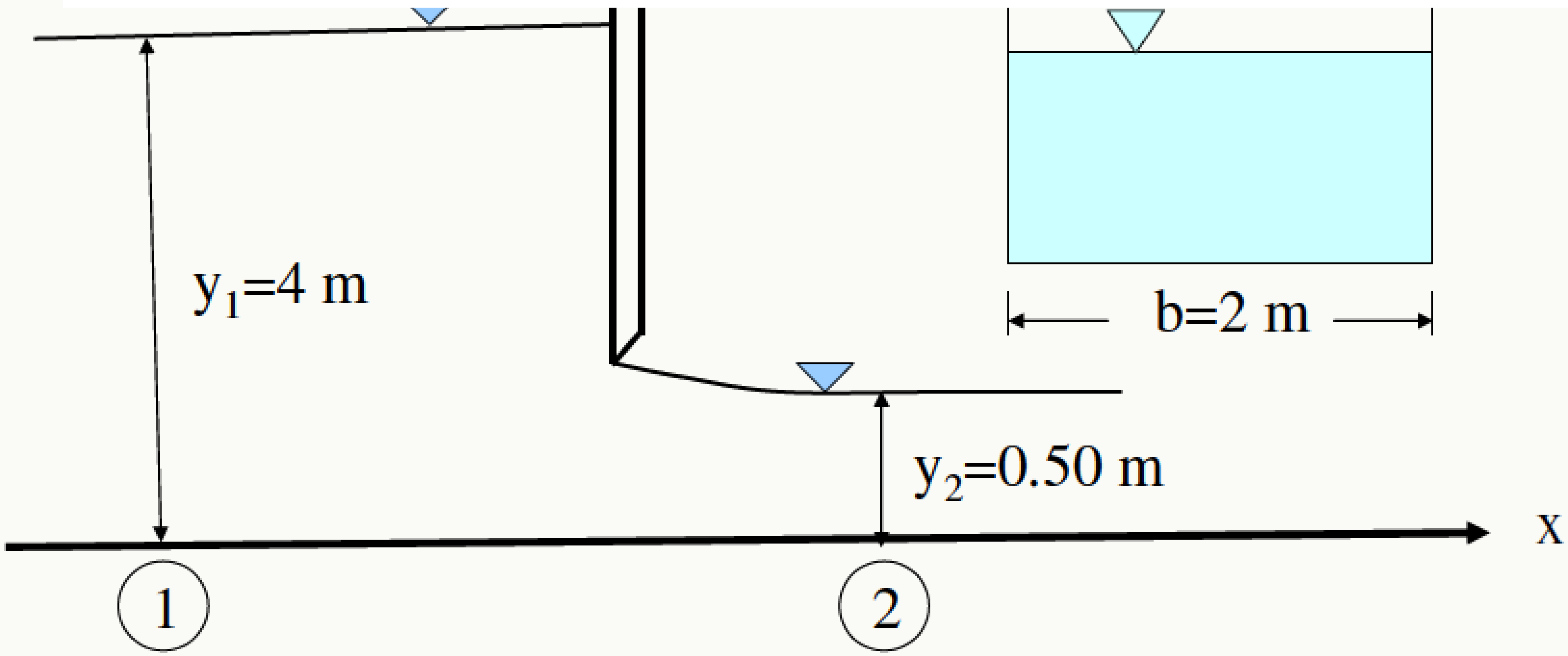
$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathrm{E}}_\kappa &= \alpha\frac{V^2}{2g}\left(\gamma\cdot A\cdot V\right)=\alpha\frac{V^3}{2g}\gamma A\\
\dot{\mathrm{E}}_\kappa' &= \int_{\mathrm{A}}\frac{u^2}{2g}\left(\gamma\cdot dA\cdot u\right)=\gamma\int_{\mathrm{A}}\frac{u^3}{2g}dA
\end{aligned}\right\}\underset{\dot{\mathrm{E}}_\kappa=\dot{\mathrm{E}}_\kappa'}{\Rightarrow}\alpha\frac{V^3}{2\cancel{g}}\cancel{\gamma}A=\cancel{\gamma}\int_{\mathrm{A}}\frac{u^3}{2\cancel{g}}dA\Rightarrow a=\frac{1}{A}\int_{\mathrm{A}}\left(\frac{u}{V}\right)^3 dA$$

- **Τυρβώδης ροή: α=1.01-1.10, συνήθης εφαρμογές: α=1**

Εφαρμογή

Σε ανοικτό αγωγό πριν το θυρόφραγμα το βάθος ροής είναι 4m μετά το θυρόφραγμα 0.50 m. Ο αγωγός είναι ορθογωνικής διατομής πλάτους 2 m. Να αγνοηθούν οι απώλειες ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων και η υψομετρική διαφορά.

Σχόλιο: Σε άλλη ενότητα θα αναφερθούμε για το υδραυλικό άλμα κατάντη της (2) για τη συνήθη περίπτωση της υποκρίσιμης και υπερκρίσιμης ροής στις θέσεις (1) και (2) αντίστοιχα.



Λύση

Από τη διατήρηση της ενέργειας θεωρώντας αμελητέες απώλειες ενέργειας ισχύει:

$H_1=H_2$

- Therefore:

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

Για μικρά μήκη έχω και αμελητέες υψομετρικές διαφορές σε αυτές τις περιπτώσεις:

$$z_1=z_2=0, \;\; \alpha=1$$

Από την εξίσωση της συνέχειας ισχύει: $Q = V_1\, b\, y_1 = V_2\, b\, y_2$

$$y_1 + \frac{Q^2}{2g(b^2 y_1^2)} = y_2 + \frac{Q^2}{2g(b^2 y_2^2)}$$

$$\frac{Q^2}{2gb^2}\left(\frac{1}{y_2^2} - \frac{1}{y_1^2}\right) = y_1 - y_2$$

$$\frac{Q^2}{2g*4}\left(\frac{1}{0.50^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 3.5$$

$$\text{solving for } Q = 8.352\ m^3/s$$

Γενικό διάγραμμα υπολογισμού της γραμμής ενέργειας στους κλειστούς αγωγούς

- Ξεκινώ από το ανάντη σημείο (π.χ. δεξαμενή)
- Ακολουθώντας την κίνηση του νερού αφαιρώ τις απώλειες ενέργειας → γραμμή ενέργειας
- Αφαιρώντας από τη γραμμή ενέργειας το ύψος κινητικής ενέργειας → ύψος πιεζομετρικής γραμμής
- Από την πιεζομετρικής γραμμή αφαιρώ το ύψος θέσης → ύψος πίεσης

Το ύψος της γραμμής ενεργείας σε μία θέση δίνεται από την εξίσωση:

$$\Gamma.\mathrm{E}_i = H_i = \left(h_{pi} + z_i\right) + \frac{V_i^2}{2g},$$

$$h_{pi} = \frac{p_i}{\gamma}$$

Ενώ το ύψος της πιεζομετρικής γραμμής δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\Pi.\Gamma_i = h_{pi} + z_i$$

Συνεπώς η γραμμή ενεργείας αποτελείται από το άθροισμα της πιεζομετρικής γραμμής και του ύψους κινητικής ενεργείας:

$$\Gamma.\mathrm{E}_i = \Pi.\Gamma_i + \frac{V_i^2}{2g}$$

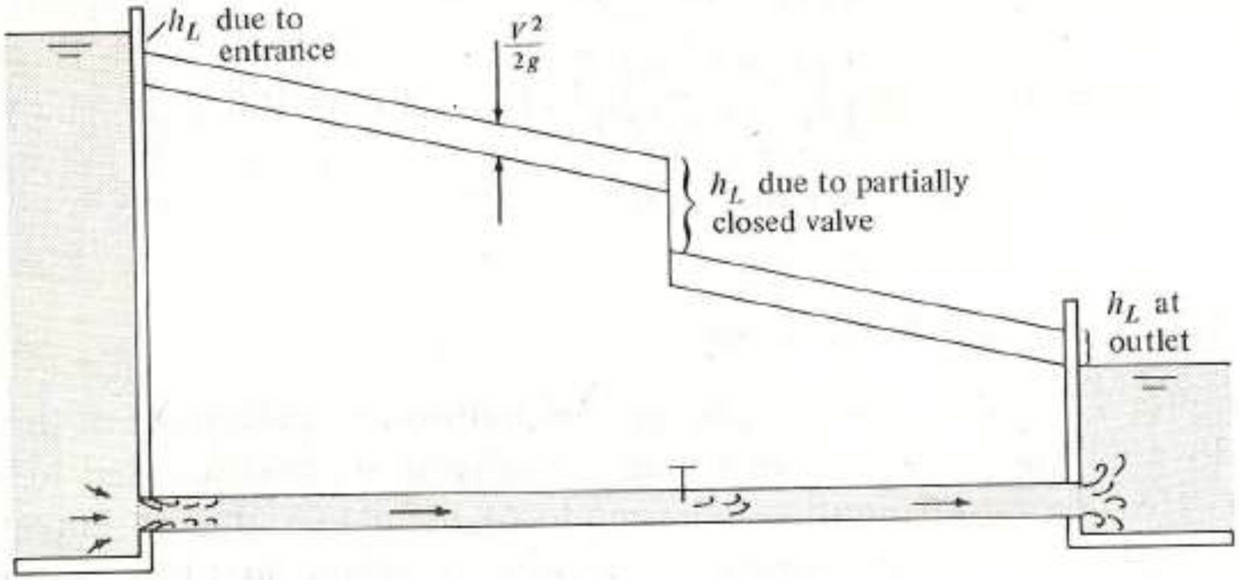
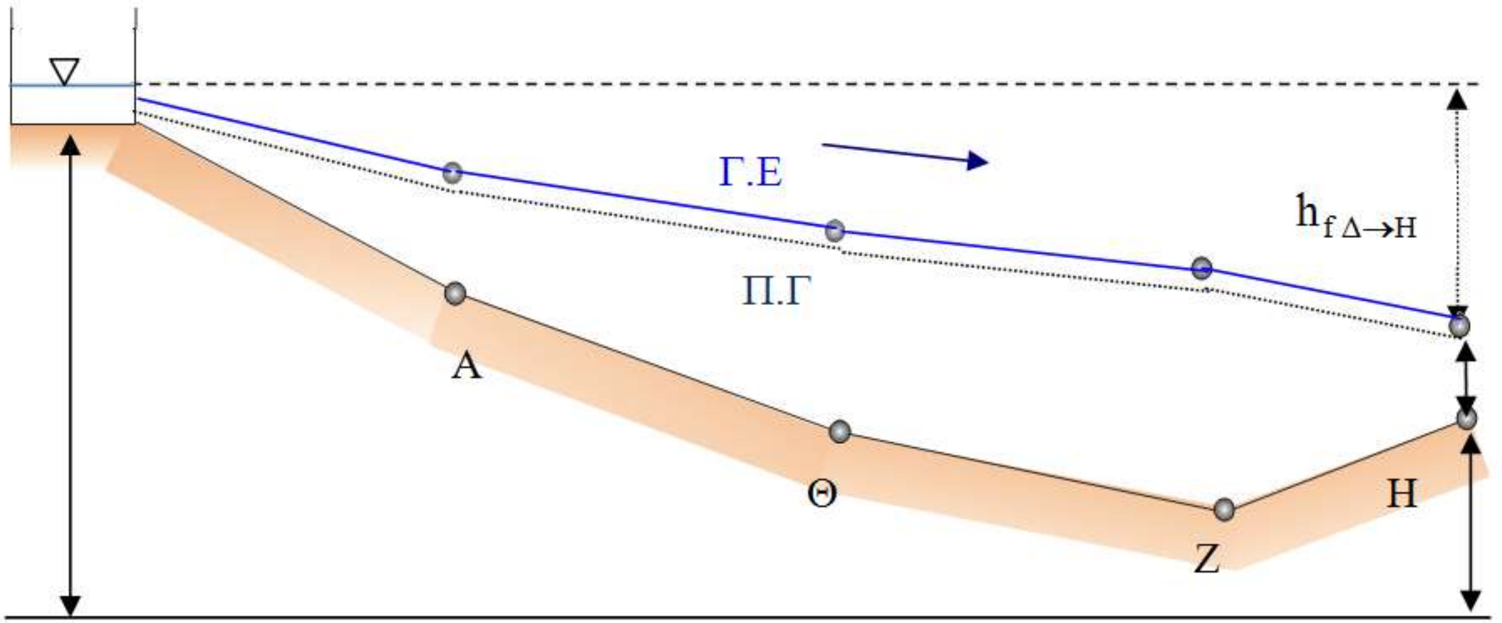


FIGURE 10-15 Head losses in a pipe.

Γραμμή ενέργειας σε ένα αγωγό (χωρίς αντλία)

- Γραμμή ενεργείας: ο γεωμετρικός τόπος του ύψος θέσης, του ύψους πίεσης και του ύψους κινητικής ενέργειας
- **Πάντοτε πτωτική από τη διατήρηση της ενέργειας**
- Δεν ισχύει πάντα το ίδιο για την Π.Γ. (βλπ. Επ. μάθημα)



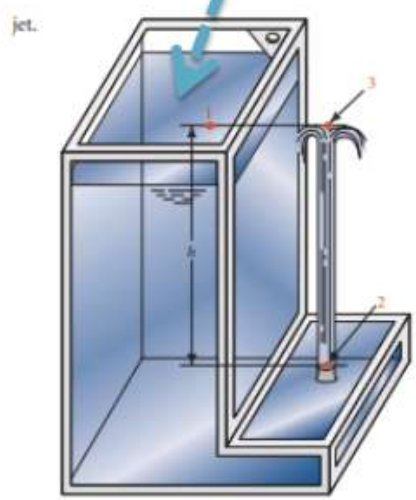
Σχ Ενεργειακή διαδρομή από την υψομετρική θέση της δεξαμενής, στο Η

Παγίδα

- Η γραμμή ενέργειας είναι πάντα πτωτική
- Η διατήρηση της ενέργειας είναι η βασική αρχή και ισχύει πάντοτε
- Η πιεζομετρική γραμμή των κλειστών αγωγών και η ειδική ενέργεια στους ανοικτούς αγωγούς διατηρείτε κάτω από ειδικές προϋποθέσεις.

Αρχική σημείο

- Δεξαμενή ή υδατόπυργος ή φράγμα ή λιμνοδεξάμενή. H_0=z
- Πιο ψηλά η δεξαμενή, πιο ψηλά η ενέργεια και άρα οι πιέσεις σε κλειστούς αγωγούς



Για αμελητέες τριβές

Εξίσωση ενέργειας

Ιδανικό ρευστό (1)σε (2)

$$\cancelto{0}{\frac{p_1}{\gamma}} + z_1 + \cancelto{0}{\frac{v_1^2}{2g}} = \cancelto{0}{\frac{p_2}{\gamma}} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh} \quad (\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha\ Torricelli)$$

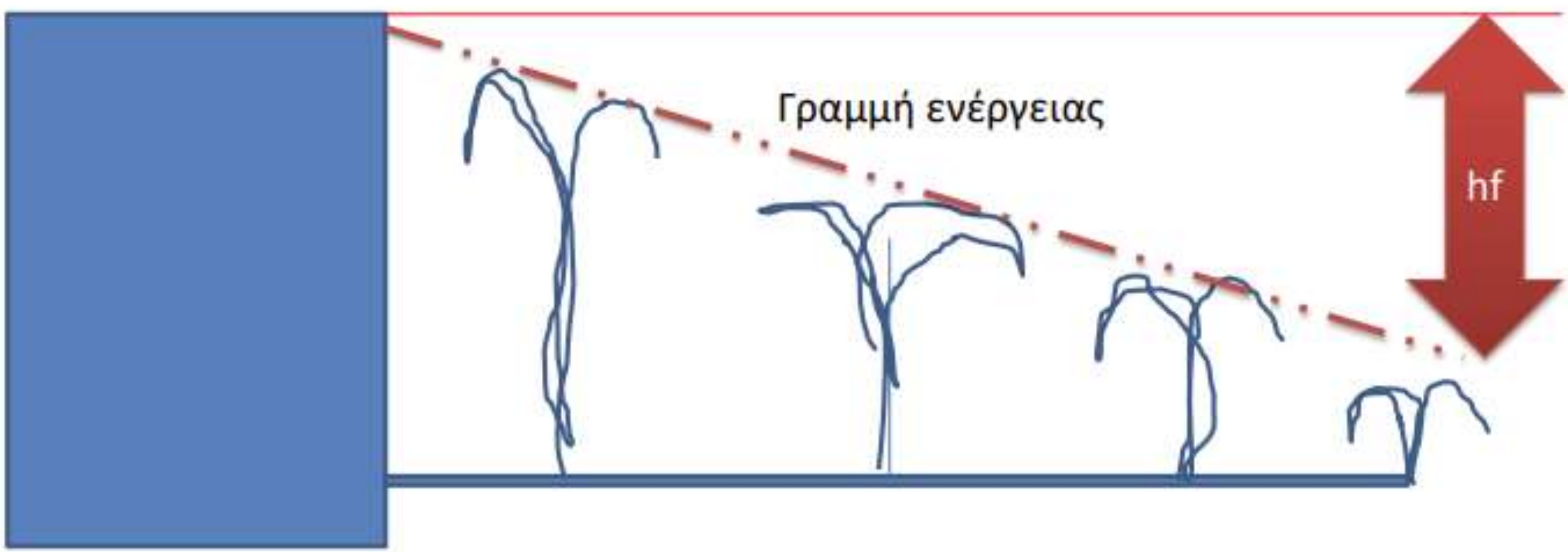
Ιδανικό ρευστό (1)σε (3) (z_1=z_3)

$$\cancelto{0}{\frac{p_2}{\gamma}} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = \cancelto{0}{\frac{p_3}{\gamma}} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

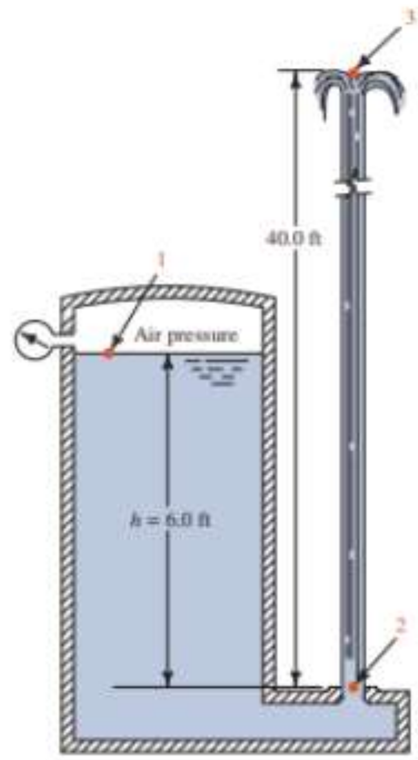
$$v_3 = \sqrt{2gh + 2g(-h)} = 0 \quad \textit{επαλήθευση}$$

Mott and Untener, 2016 Εφηρμοσμένη μηχανική ρευστών

Τριβές



Σιντριβάνι



3)

Αρχή διατήρησης της ορμής:

Αν υπάρχει ένας μόνο σωλήνας με ομοιόμορφη μόνιμη ροή η εξίσωση της ορμής γράφεται:

$$\sum F_x = \rho Q\left(V_x^{\text{εκροής}} - V_x^{\text{εισοής}}\right)$$

$$\sum F_y = \rho Q\left(V_y^{\text{εκροής}} - V_y^{\text{εισοής}}\right)$$

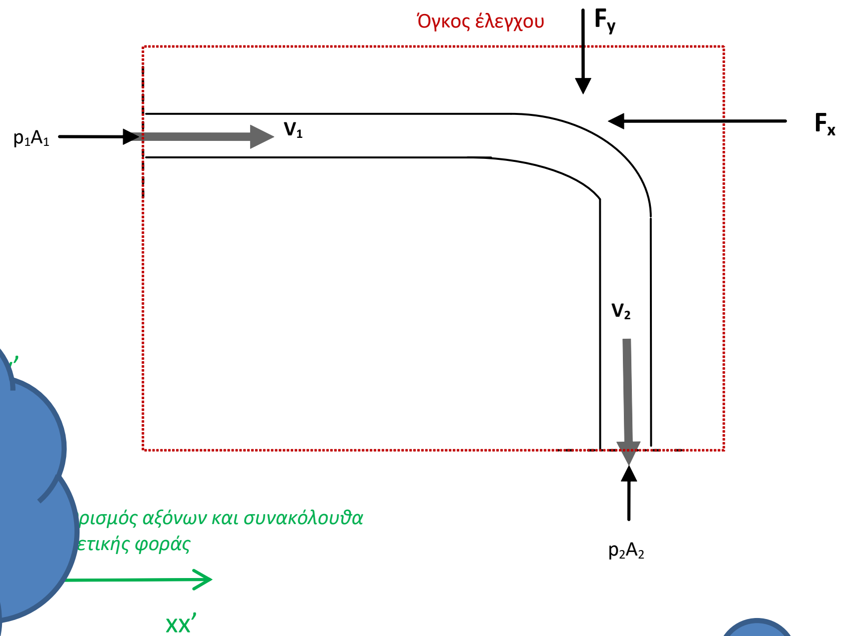
Οι δυνάμεις μπορεί να είναι δυνάμεις που δρουν στις επιφάνειες του όγκου έλεγχου, όπως η συνισταμένη των πιέσεων σε κάθε διατομή και η τριβή (επιφανειακές δυνάμεις) ή μαζικές δυνάμεις (βάρος).

Θα αναλυθεί στους κλειστούς αγωγούς

Έστω $\vec{F}=\left(F_x,F_y\right)$ η άγνωστη δύναμη που ασκείται στον σωλήνα (από τη στήριξη του σωλήνα) όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα 2.4.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση ορμής σημειώνοντας αυθαίρετα τις δυνάμεις αντίδρασης κατά x και y και επιλέγοντας αυθαίρετα ένα σύστημα αξόνων ισχύει:

$$\sum F_x = p_1A_1 - F_x = 0 - \rho Q V_1 \qquad (xx')$$
$$\sum F_y = p_2A_2 - F_y = \rho Q\left(-V_2\right) - 0 \qquad (yy')$$



Σχ. 2.4 Διατήρηση της ορμής σε κυκλικό αγωγό με γωνία 90°

Θα αναλυθεί στους κλειστούς αγωγούς

Ίδια διατομή Bernoulli, p1=p2

Επομένως:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= p_1A_1 + \rho Q V_1 \\ F_y &= p_2A_2 + \rho Q V_2 \end{aligned}\right\}$$

Συνεπώς η δύναμη αντίστασης θα πρέπει να εξισορροπεί όχι μόνο τις δυνάμεις που οφείλονται στην πίεση αλλά και την μεταβολή της ορμής.

Μεθοδολογική παρατήρηση

Διατήρηση ενέργειας μεταξύ δύο θέσεων λαμβάνοντας υπόψη όμως τις απώλειες ενέργειας

Διατήρηση ορμής: όγκος ελέγχου

Αριθμός Froude $= Fr = \dfrac{\text{δυνάμεις αδρανείας}}{\text{δυνάμεις βαρύτητας}}$

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g\ell}} \qquad \left(\text{μερικές φορές } Fr = \frac{u^2}{g\ell}\right)$$

g : επιτάχυνση βαρύτητας

<u>ποτάμια (ήρεμη) ροή</u>
<u>χειμαρρώδης (ταχεία) ροή</u> } αναλόγως των τιμών του Fr

για $Fr < 1$ ποτάμια (υποκρίσιμη ροή)
(κίνηση μιας μικρής διαταραχής και προς τα ανάντη)

για $Fr > 1$ χειμαρρώδης (υπερκρίσιμη) ροή
(κίνηση μιας μικρής διαταραχής μόνο προς τα κατάντη)

για $Fr = 1$ κρίσιμη ροή

Κύρια σε ανοικτούς αγωγούς
Κρίσιμη ροή: Βέλτιστη ειδική ενέργεια

<u>Στην πράξη</u> :
- συνήθως ανομοιόμορφη ροή
(σε μικρού μήκους ανοικτούς αγωγούς κατά προσέγγιση ομοιόμορφη ροή)
- συνήθως τυρβώδη ροή
- κατά προσέγγιση σταθερή ροή
(ασταθής ροή : κύματα)

Αριθμός Reynolds $= Re = \dfrac{\text{δυνάμεις αδρανείας}}{\text{δυνάμεις ιξώδους}}$

$$Re = \frac{u\ell}{\nu}$$

u : ταχύτητα του υγρού

ℓ : χαρακτηριστικό μέγεθος με διαστάσεις μήκους
συνήθως μέσο βάθος ροής

$$\ell = \frac{A}{b}$$

A : υγρή διατομή

b : πλάτος υγρής επιφάνειας

ν : κινηματικός συντελεστής συνεκτικότητας ή ιξώδους

$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{Στρωτή ροή}}\\ \underline{\text{Τυρβώδης ροή}}\end{array}\right\}$ Αναλόγως των τιμών του Re

π.χ. για $Re < 600 \Rightarrow$ στρωτή ροή

Μεθοδολογικά, εφαρμογή κύρια σε κλειστούς αγωγούς
Συνήθως τυρβώδη ροή,
Προσδιορισμός *f*

«στριφνό θέμα»
Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας, α

- Μη ομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας καθ΄ ύψος, συντελεστής ώστε $\alpha V^2/2g$ να δίνει τη μέση κινητική ανά μονάδα βάρους. Για μόνιμη ροής με βάση την κινητικής ενέργεια που διέρχεται στη μονάδα του χρόνου:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathrm{E}}_{\kappa} &= \alpha\frac{V^2}{2g}\left(\gamma\cdot A\cdot V\right)=\alpha\frac{V^3}{2g}\gamma A\\ \dot{\mathrm{E}}_{\kappa}' &= \int_{\mathrm{A}}\frac{u^2}{2g}\left(\gamma\cdot dA\cdot u\right)=\gamma\int_{\mathrm{A}}\frac{u^3}{2g}dA\end{aligned}\right\}\underset{\dot{\mathrm{E}}_{\kappa}=\dot{\mathrm{E}}_{\kappa}'}{\Rightarrow}\alpha\frac{V^3}{2\cancel{g}}\cancel{\gamma}A=\cancel{\gamma}\int_{\mathrm{A}}\frac{u^3}{2\cancel{g}}dA\Rightarrow a=\frac{1}{A}\int_{\mathrm{A}}\left(\frac{u}{V}\right)^3 dA$$

- **Τυρβώδης ροή: α=1.01-1.10, συνήθης εφαρμογές: α=1**

Εγκάρσια διαφοροποίηση ταχύτητας

$$a = \frac{1}{A}\int_{\mathrm{A}}\left(\frac{u}{\overline{V}}\right)^3 dA = \frac{1}{A\overline{V}^3}\int_{\mathrm{A}}(u)^3 dA \approx \frac{1}{A\overline{V}^3}\left(\sum_{i=1}^{N} A_i V_i^3\right) =$$

$$\frac{1}{Q\overline{V}^2}\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i^2\right)$$

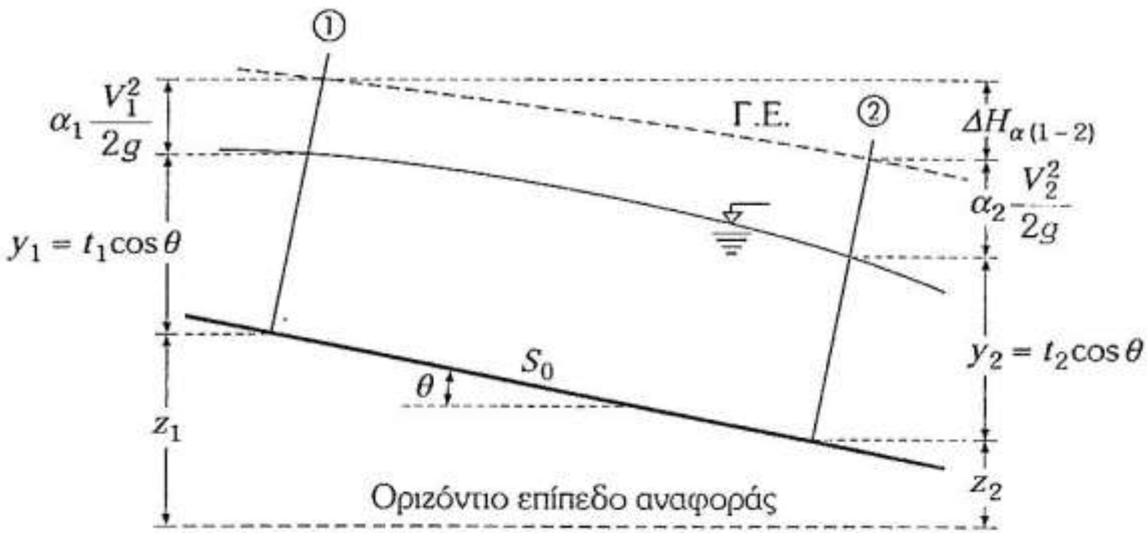
Εξίσωση Ενέργειας

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας, εφόσον η κατά μήκος κλίση, S_0, του πυθμένα του αγωγού είναι μικρή, ώστε να θεωρηθεί $\cos\theta = 1$, οδηγεί στην εξίσωση:

$$z_1 + y_1 + a_1(V_1^2/2g) = z_2 + y_2 + a_2(V_2^2/2g) + \Delta H_{a(1-2)} \qquad (3.5)$$

όπου: z_i = το υψόμετρο του πυθμένα και a ο συντελεστής συνόρθωσης της κινητικής ενέργειας ο οποίος ορίζεται ως:

$$a = \frac{\int_A V^3 dA}{V^3 A} = \frac{\int_A V^3 dA}{QV^2} \qquad (3.6)$$



Σχ. 3.3: *Η εξίσωση ενέργειας σε επιλεγμένο όγκο αναφοράς.*

Μόνο για ομοιόμορφη ροή
$y_1=y_2$
$V_1=V_2$
$S_0=S_f$

Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας
Πρισματικοί αγωγοί, συνήθως μονάδα

Πίνακας 1.1

Ενδεικτικές τιμές των συντελεστών α και β

Είδος διατομής	α	β
Γεωμετρικού σχήματος	1.10 - 1.20	1.03 - 1.07
Φυσική	1.15 - 1.50	1.05 - 1.17
Ακανόνιστη	1.50 – 2.00	1.17 – 1.33

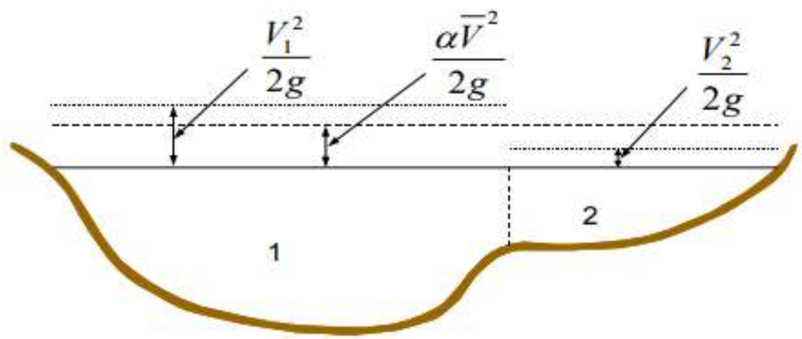
Κινητικη ενεργεια   ορμή

Σε φυσικές και ακανόνιστες διατομές οι συντελεστές αυξάνουν, σε τεχνικούς αγωγούς μικρότερη τιμή. Στο μάθημα αν δεν δίνεται διευκρίνιση α = 1

Στο HEC-RAS

Evaluation of the Mean Kinetic Energy Head

Within the 1D river reach segments, only a single water surface and therefore a single mean energy are computed at each cross section. For a given water surface elevation, the mean energy is obtained by computing a flow weighted energy from the three subsections of a cross section (left overbank, main channel, and right overbank). Figure 2-5 below shows how the mean energy would be obtained for a cross section with a main channel and a right overbank (no left overbank area).



V_1 = mean velocity for subarea 1

V_2 = mean velocity for subarea 2

Figure 2-5 Example of How Mean Energy is Obtained

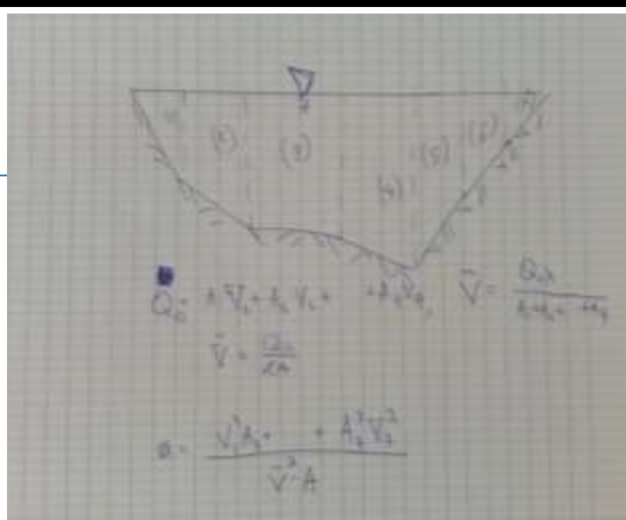
To compute the mean kinetic energy it is necessary to obtain the velocity head weighting coefficient alpha. Alpha is calculated as follows:

Mean Kinetic Energy Head = Discharge-Weighted Velocity Head

$$\alpha \frac{\overline{V}^2}{2g} = \frac{Q_1 \frac{V_1^2}{2g} + Q_2 \frac{V_2^2}{2g}}{Q_1 + Q_2} \qquad (2\text{-}7)$$

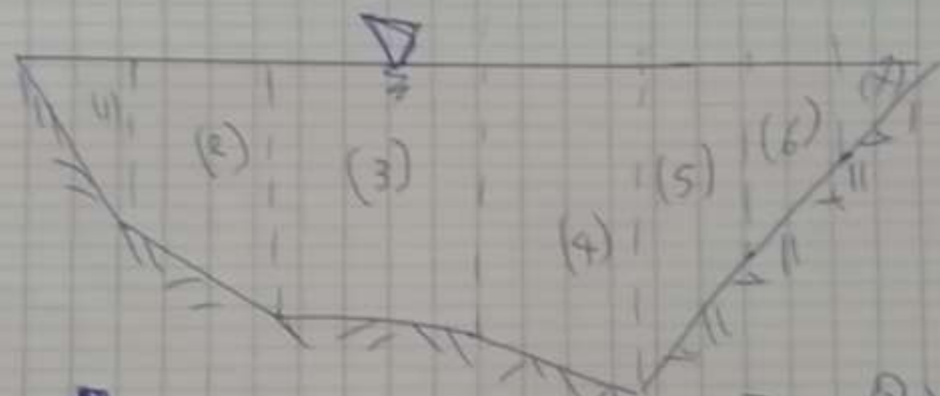
Εφαρμογή

	Διατομή		ταχύτητα		παροχή		
	A		V		V*A		V^3*A
1	11,15		0,37		4,08		0,55
2	50,17		0,44		21,87		4,15
3	81,75		0,70		57,31		28,17
4	85,47		0,74		63,04		34,30
5	74,32		0,77		57,09		33,68
6	44,59		0,59		26,10		8,94
7	7,43		0,29		2,15	VMEAN	0,18
Aολ	***354,89***			***Q***	***231,64***	***0,65***	***109,97***



ΣV^3*A/(V

a	1,11



$$Q_{\omega} = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots + A_7 V_7, \qquad \bar{V} = \frac{Q_{\omega}}{A_1 + A_2 + \dots + A_7}$$

$$\bar{V} = \frac{Q_{\omega}}{\Sigma A}$$

$$\alpha = \frac{V_1^3 A_1 + \dots + A_7^3 V_7^3}{\bar{V}^3 \cdot A}$$