

**ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΞΑΝΘΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ**

ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ με συνοπτική θεωρία και
μεθοδολογία**

Πρόχειρες σημειώσεις

ΑΝΟΙΚΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ. 1

5^ο Εξάμηνο

Δρ Μ. Σπηλιώτης



Ξάνθη, 2015

Ανοικοί Αγωγοί (Αγωγοί με ελεύθερη επιφάνεια)

Εισαγωγή

Σε αντίθεση με τη ροή στους κλειστούς αγωγούς, η ροή στους ανοικτούς αγωγούς γίνεται με ελεύθερη επιφάνεια, στην οποία επικρατεί η ατμοσφαιρική πίεση. Τέτοιοι αγωγοί είναι οι φυσικοί αγωγοί (ποταμοί, ρέματα) και τεχνητοί αγωγοί (διώρυγες, τάφροι, υπόνομοι).

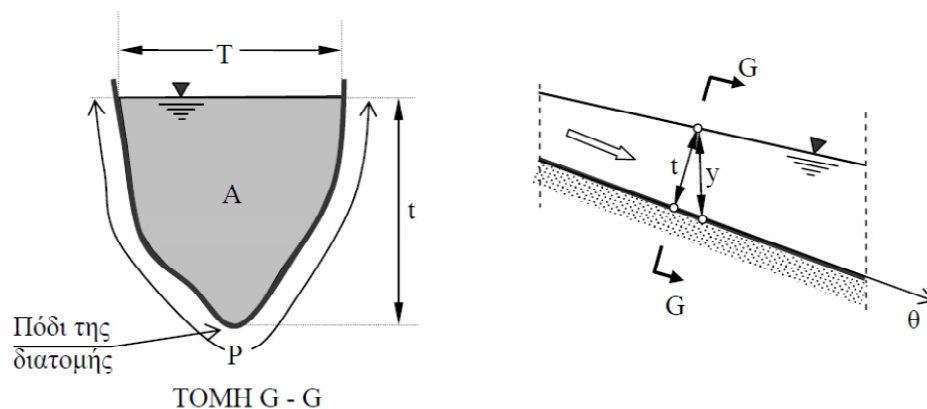
Η ροή στους ανοικτούς αγωγούς, ή αγωγούς με ελεύθερη επιφάνεια, ονομάζεται μόνιμη όταν το βάθος ροής δεν μεταβάλλεται με το χρόνο σε κάθε διατομή του αγωγού, αλλιώς καλείται μη μόνιμη.

Ομοιόμορφη ροή είναι εκείνη στην οποία το βάθος ροής είναι το ίδιο σε όλο το μήκος του αγωγού. Το σταθερό αυτό βάθος ονομάζεται ομοιόμορφο βάθος και συμβολίζεται με y_0 . Στην περίπτωση αυτή η ροή είναι παράλληλη και ισχύει η υδροστατική κατανομή των πιέσεων.

Όταν το βάθος ροής μεταβάλλεται, αυξάνεται ή μειώνεται, η ροή ονομάζεται ανομοιόμορφη. Αν η μεταβολή του βάθους γίνεται βαθμιαία, μικρές κατά μήκος μεταβολές, τότε καλείται βαθμιαία μεταβαλλόμενη, αλλιώς ταχέως μεταβαλλόμενη.

(Τσακίρης, 2010)

Συνήθως οι ανοικτοί αγωγοί (ιδιαίτερα στα περισσότερα τεχνικά έργα) έχουν μικρές κλίσεις, επομένως το βάθος ροής (ύψος νερού κάθετο στη μέση ταχύτητα, t) είναι περίπου ταυτόσημο με την κατακόρυφη απόσταση από τον πυθμένα έως την ελεύθερη επιφάνεια, y .



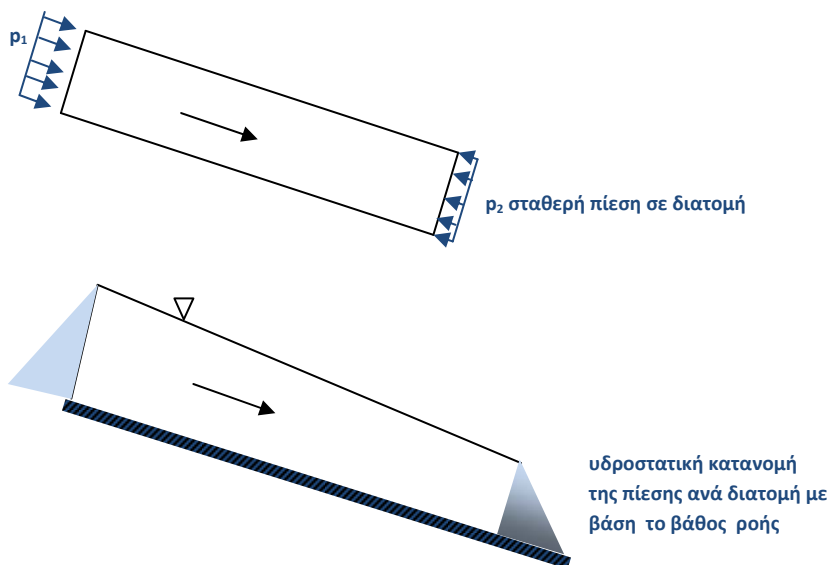
(Παπαϊωάννου, 2010)

Κυριότερες διαφορές ανοικτών και κλειστών Αγωγών

1. Κατά την ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση το ρευστό καταλαμβάνει όλη την διατομή ενώ σε ανοικτούς αγωγούς το ρευστό σχηματίζει ελεύθερη επιφάνεια.
2. Η πίεση σε μία διατομή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση θεωρείται σταθερή για τη συγκεκριμένη θέση, ενώ στους ανοικτούς αγωγούς αν δεν υπάρχουν ιδιαίτερες καμπυλώσεις ακολουθεί υδροστατική κατανομή με την πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια να είναι ίση με την ατμοσφαιρική (δουλεύω με τη σχετική πίεση).

3. Στους κλειστούς αγωγούς είναι δυνατή η ροή και σε ανωφέρεις αγωγών (αρκεί η αρχική και η τελική θέση να εξασφαλίζουν επαρκές ύψος πίεσης σε κάθε σημείο του δικτύου) ενώ σε ανοικτούς αγωγούς οι ανωφέρειες είναι δυνατές μόνο σε μικρά τμήματα της ροής (π.χ. εκχειλιστές).
4. Κατά τη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση, αγνοώντας τις τοπικές απώλειες ενέργειας και τις συνακόλουθες δευτερεύουσες ροές, ομοιόμορφη ροή (σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του αγωγού), επιτυγχάνεται σχετικά εύκολα με την ύπαρξη σταθερής διαμέτρου σε ένα μήκος αγωγού. Η συνθήκη ομοιόμορφης ροής σε ανοικτούς αγωγούς είναι πιο δυσχερής, προϋποθέτει σημαντικό μήκος ενώ μεσολαβούν μεταβατικές περιοχές ταχέως μεταβαλλόμενης ροής και βραδέως μεταβαλλόμενης ροής όπως στο σχήμα.
5. Σε κλειστούς αγωγούς μπορούν σχετικά εύκολα να κατασκευασθούν σημαντικές ανωφέρειες με τη χρήση αντλιών
6. Στους κλειστούς αγωγούς υπό πίεση συνήθως χρησιμοποιείται μόνο κυκλικός αγωγός ενώ σε ανοικτούς αγωγούς μία ποικιλία διατομών.

Υπάρχουν προφανώς και άλλες διαφορές όπως η μεταβλητότητα της τραχύτητας σε πλημμυρικές κοίτες ανοικτών αγωγών κ.ά που δεν κρίνεται σκόπιμο σε αυτή τη φάση να αναπτυχθούν επαρκώς.



Σχ. Κατανομή της πίεσης σε διατομή σε κλειστούς και ανοικτούς αγωγούς

Ομοιόμορφη Ροή – Εξίσωση Manning

Ομοιόμορφη ροή: σταθερή ταχύτητα και

συνεπώς σταθερό βάθος ροής

σε πρισματικό αγωγό

Συνήθως, επιλύεται με την εξίσωση του Manning,

προσοχή στις περιπτώσεις που χρειάζονται

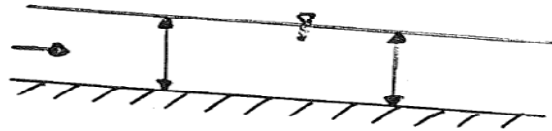
δοκιμές για τον προσδιορισμό του βάθους ροής

Ειδική μεθοδολογία για σύνθετες διατομές

μεταβλητού n

Ομοιόμορφη Ροή - Εξίσωση Manning

Ομοιόμορφη : Ταχύτητα του νερού σταθερή,
βάθος νερού σταθερό
από διατομή σε διατομή \Rightarrow
Επιφάνεια νερού παράλληλη προς τον
πυθμένα



Λόγω της συσσωρευμένης εμπειρίας όμως, περισσότερο δημοφιλής είναι η απλοποιημένη σχέση, η οποία αποδίδεται στον R. Manning και γι' αυτό ονομάζεται και τύπος του Manning:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S_0^{1/2} \quad (3.9)$$

όπου: n = ο συντελεστής τραχύτητας γνωστός ως συντελεστής Manning, με διαστάσεις $(s/m^{1/3})$, ο οποίος αποτελεί έκφραση της τραχύτητας του στερεού ορίου και συνδέεται με το συντελεστή f των Darcy-Weisbach με τη σχέση:

$$f = (8gn^2)/R^{1/3} \quad (3.10)$$

Οι τιμές του συντελεστή n λαμβάνονται από πίνακες που έχουν δημοσιευθεί σε πληθώρα βιβλίων. Ο Πίνακας 3.2 παρουσιάζει τις τιμές του συντελεστή n για μια σειρά υλικά από τα οποία αποτελείται ο ανοικτός αγωγός. Σημειώνεται ότι επειδή ο συντελεστής n δεν είναι αδιάστατος αριθμός, κατά τη χρήση του τύπου Manning η ταχύτητα πρέπει να εκφράζεται σε m/s , η υδραυλική ακτίνα σε m και η παροχή σε m^3/s .

Το γεγονός ότι εδώ η ροή πραγματοποιείται με ελεύθερη επιφάνεια έχει ως αποτέλεσμα η υγρή διατομή, A , να εξαρτάται εκτός από τη γεωμετρία της διατομής και από τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας, δηλαδή σε σχέση με τη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση υπάρχει ένα επιπλέον άγνωστο μέγεθος που πρέπει να υπολογιστεί.

Ο υπολογισμός του ομοιομόρφου βήθους, y_0 , γίνεται με χρήση της εξίσωσης Manning και της εξίσωσης συνέχειας, άρα:

$$Q = (1/n) AR^{2/3} S_0^{1/2} \quad (3.11)$$

Αν είναι γνωστά: η παροχή Q (m^3/s), η γεωμετρία του αγωγού, ο συντελεστής n και η κατά μήκος κλίση S_0 , τότε:

$$AR^{2/3} = (nQ)/S_0^{1/2} = \text{γνωστό} \quad (3.12)$$

(Τσακίρης, 2010)

Πίν. 3.2: Συντελεστές Manning n για διάφορα υλικά

Μέταλλο λείο	0.011 - 0.015
Μέταλλο, αυλακωτό	0.023 - 0.025
Ξύλο, κατεργασμένο	0.010 - 0.015
Ξύλο, ακατέργαστο	0.011 - 0.015
Τσιμέντο λείο	0.010 - 0.013
Σκυρόδεμα	0.014 - 0.016
Τσιμεντοχάλικο	0.017 - 0.030
Γρασίδι	$0 > 0.020$

Σε φυσικά υδατορέματα ο συντελεστής Manning έχει πιο μεγάλες τιμές ενώ είναι πιο επίπονος ο προσδιορισμός του.

Προϋποθέσεις Ομοιόμορφης ροής σε ανοικτούς αγωγούς

- Ισορροπία δυνάμεων
- Μη μεταβολή της διατομής
- Μη μεταβολή της τραχύτητας των στερεών ορίων

Σχόλιο: Η εξίσωση Manning εδράζεται σε θεώρηση ισορροπίας δυνάμεων τριβής με την οριζόντια συνιστώσα του βάρους. Σε ομοιόμορφη ροή η κλίση του πυθμένα είναι ίση με την κλίση της γραμμής ενέργειας:

Μεταβολή της γραμμής ενέργειας σε ομοιόμορφη ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Ομοιόμορφη ροή:

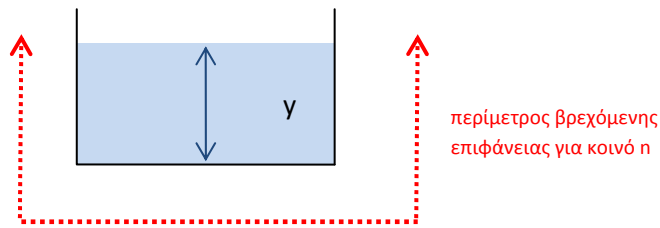
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Παραγώγιση όρων ενέργειας κατά τη διεύθυνση της ροής, x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} + z + y \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -S_0 < 0$$

Ομοιόμορφη ροή \rightarrow κλίση γραμμής ενέργειας = κλίση πυθμένα = κλίση ελεύθερης επιφάνειας

- Ομοιόμορφη ροή σε Ορθογωνική διατομή



Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A = b \cdot y ,$$

$$\Pi = b + 2y \text{ (βρεχόμενη περίμετρος)}$$

$$R = \frac{A}{\Pi} = \frac{by}{b+2y} \text{ (υδραυλική ακτίνα)}$$

(βρεχόμενη περίμετρος)

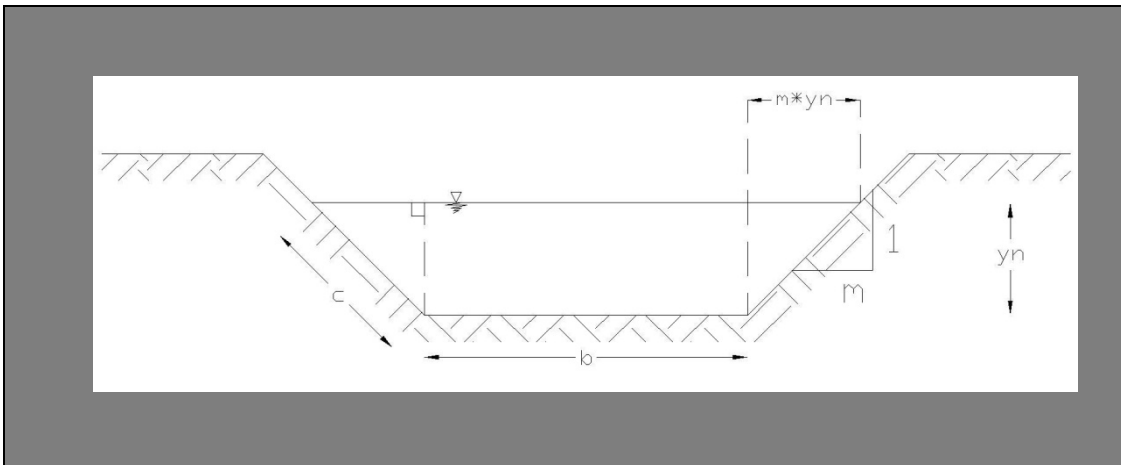
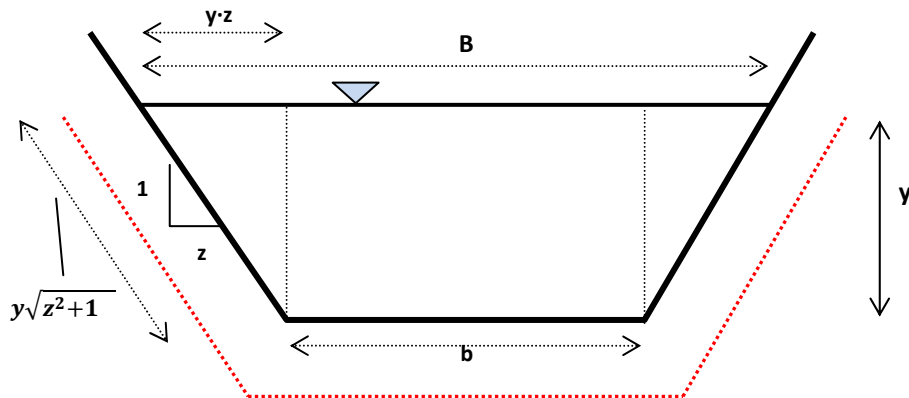
Εξίσωση Manning:

$$V = \frac{1}{n} \left(\frac{by}{b+2y} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \Leftrightarrow Q = (by) \frac{1}{n} \left(\frac{by}{b+2y} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot Q}{S_0^{1/2}} = (by) \left(\frac{by}{b+2y} \right)^{2/3} = f(y) \rightarrow \text{εύρεση βάθους ομοιομόρφου ροής με δοκιμές}$$

για γνωστή παροχή και κλίση (επιλογή n από πίνακες)

- Ομοιόμορφη ροή για Τραπεζοειδής (συμμετρική) διατομή



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΡΑΠΕΖΟΕΙΔΟΥΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Έχουμε διαδοχικά

$$c^2 = y_n^2 + (m \cdot y_n)^2 \Rightarrow c = \sqrt{y_n^2 \cdot (1 + m^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = y_n \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A = \frac{b + (b + 2 \cdot m \cdot y_n)}{2} \cdot y_n = \frac{2 \cdot b + 2 \cdot m \cdot y_n}{2} \cdot y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = b \cdot y_n + m \cdot y_n^2$$

Εξίσωση Manning:

$$V = \frac{1}{n} \left(\frac{(b + my)y}{b + 2y\sqrt{1+m^2}} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \Leftrightarrow Q = ((b + my)y) \frac{1}{n} \left(\frac{(b + my)y}{b + 2y\sqrt{1+m^2}} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot Q}{S_0^{1/2}} = ((b + my) y) \left(\frac{(b + my) y}{b + 2y\sqrt{1 + m^2}} \right)^{2/3} = f(y) \rightarrow \text{εύρεση βάθους ομοιομόρφου ροής}$$

με **δοκιμές** για γνωστή παροχή και κλίση (επιλογή η από πίνακες)

Μεθοδολογικές παρατηρήσεις

Συνήθης περίπτωση ασκήσεων σε αυτή την περίπτωση είναι ο προσδιορισμός του βάθους ομοιομόρφου ροής για δεδομένη παροχή, υλικό αγωγών και κλίση αγωγών.

Χρησιμοποιείται η εξίσωση **Manning** για την παροχή.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (εμβαδόν, υδραυλική ακτίνα) διαφέρουν από διατομή σε διατομή και μπορούν να προσδιορισθούν ή να χρησιμοποιηθούν σχετικούς πίνακες για κάθε είδους διατομής.

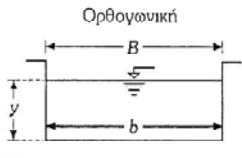
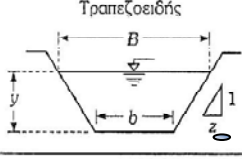
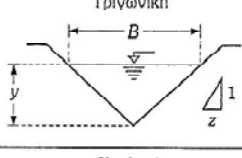
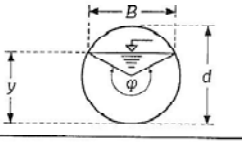
Τελικά, για δεδομένη παροχή και κλίση και ζητούμενο το βάθος ροής η λύση επιτυγχάνεται με **δοκιμές**.

Διαφορετικά απλά προσδιορίζεται είτε η κλίση είτε η παροχή με απλή αντικατάσταση.

Χρησιμοποίηση πινάκων για συνήθης διατομές

Παρατίθενται δύο ασκήσεις μία για ορθογωνική και μία για τραπεζοειδής διατομή.

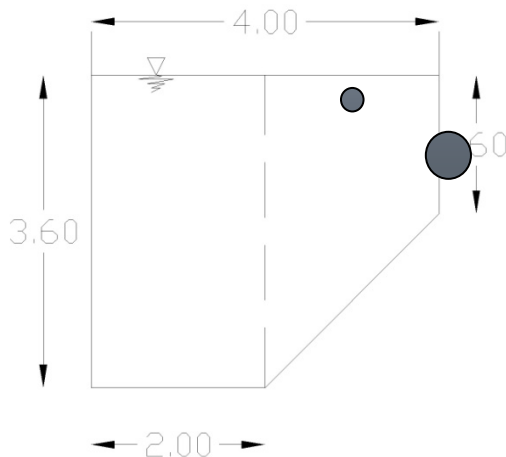
Πίν. 3.1: Γεωμετρικά στοιχεία αγωγών

Διατομή	Επιφάνεια A	Βρεχ. περίμετρος P	Υδραυλική ακτίνα $R = A/P$	Πλάτος ελεύθερης επιφάνειας B	Υδραυλικό βάθος $y_{\mu} = A/B$	Αριθμός Froude F
 <p>Ορθογωνική</p>	by	$b + 2y$	$\frac{by}{b + 2y}$	b	y	$\sqrt{\frac{Q^2}{b^2 y^3 g}}$
 <p>Τραπεζοειδής</p>	$(b + zy)y$	$b + 2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{(b + zy)y}{b + 2y\sqrt{1 + z^2}}$	$b + 2zy$	$\frac{(b + zy)y}{b + 2zy}$	$\sqrt{\frac{(b + 2zy)Q^2}{(b + zy)^3 y^3 g}}$
 <p>Τριγωνική</p>	zy^2	$2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1 + z^2}}$	$2zy$	$\frac{y}{2}$	$\sqrt{\frac{2Q^2}{z^2 y^5 g}}$
 <p>Κυκλική</p>	$\frac{d^2}{8} (\varphi - \sin \varphi)$	$d \frac{\varphi}{2}$	$\frac{d}{4} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}\right)$	$d \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)$ ή $2\sqrt{y(d-y)}$	$\frac{d}{8} \left\{ \frac{\varphi - \sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right\}$	$\sqrt{\frac{512 Q^2 \sin^3 \left(\frac{\varphi}{2}\right)}{gd^5 (\varphi - \sin \varphi)^3}}$

$z=m$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίδεται ο αγωγός του παρακάτω σχήματος με τις αναγραφόμενες διαστάσεις. Για $n=0.013 \text{ s/m}^{1/3}$ και $Q=30 \text{ m}^3/\text{s}$ να υπολογιστεί η αναγκαία κλίση S_0 . Τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής και το βάθος ροής φαίνονται στο σχήμα.



ΕΠΙΛΥΣΗ

Η εξίσωση του Manning :

$$Q = \frac{1}{n} * A * R^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}}$$

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A = \frac{1.6 + 3.6}{2} * 2 + 2 * 3.6 = 12.40 \text{ m}^2$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι:

$$P = 3.6 + 2 + 1.6 + \sqrt{(4 - 2)^2 + (3.6 - 1.6)^2} = 10.03 \text{ m}$$

Η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{12.40}{10.03} = 1.24 \text{ m}$$

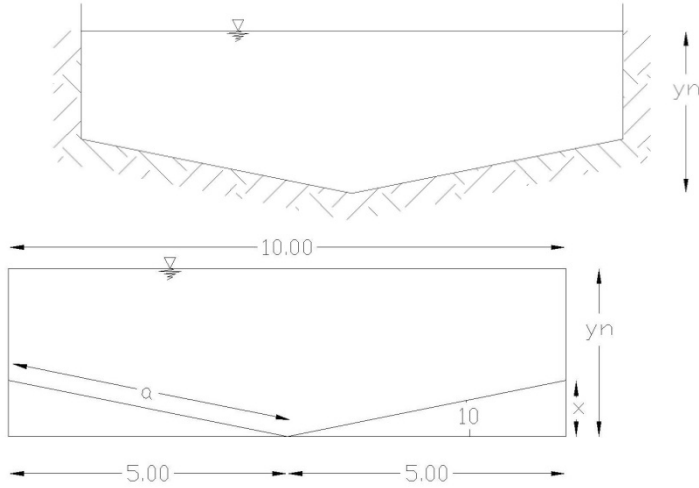
Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q = \frac{1}{n} * A * R^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_0 = \left(\frac{Q * n}{A * R^{\frac{2}{3}}} \right)^2 = \left(\frac{30 * 0.013}{12.4 * 1.24^{\frac{2}{3}}} \right)^2 = 0.000746 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_0 = 0.000746$$

Σχόλιο: Ομοιόμορφη ροή, γνωστό βάθος ροής και παροχή απλά από Manning προσδιορίζω την κλίση πυθμένα.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ο ανοικτός αγωγός του σχήματος με συντελεστή Manning $n=0.015 \text{ s/m}^{1/3}$, γωνία $\varphi=10^\circ$ και επιμήκη κλίση $S_0=0.0018$ μεταφέρει παροχή $Q=57 \text{ m}^3/\text{s}$. Να υπολογιστεί το βάθος ροής y_n .



ΕΠΙΛΥΣΗ

Η εξίσωση του Manning :

$$Q = \frac{1}{n} * A * R^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}}$$

Έχουμε διαδοχικά

$$\tan \varphi = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5 * \tan 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0.882 \text{ m}$$

και

$$\cos \varphi = \frac{5}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{\cos 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 5.077 \text{ m}$$

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A = 10 * y_n - 2 * \frac{5 * x}{2} = 10 * y_n - 2 * \frac{5 * 0.8816}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 10 * y_n - 4.408$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι:

$$P = 2[y_n - x + a] = 2[y_n - 0.8816 + 5.077] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2 * y_n + 8.391$$

Η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{10 * y_n - 4.408}{2 * y_n + 8.391}$$

Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q = \frac{1}{n} * A * R^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 57 = \frac{1}{0.015} * (10y_n - 4.408) * \left(\frac{10y_n - 4.408}{2 * y_n + 8.391} \right)^{\frac{2}{3}} * 0.0018^{\frac{1}{2}}$$

Με τη μέθοδο των δοκιμών βρίσκουμε:

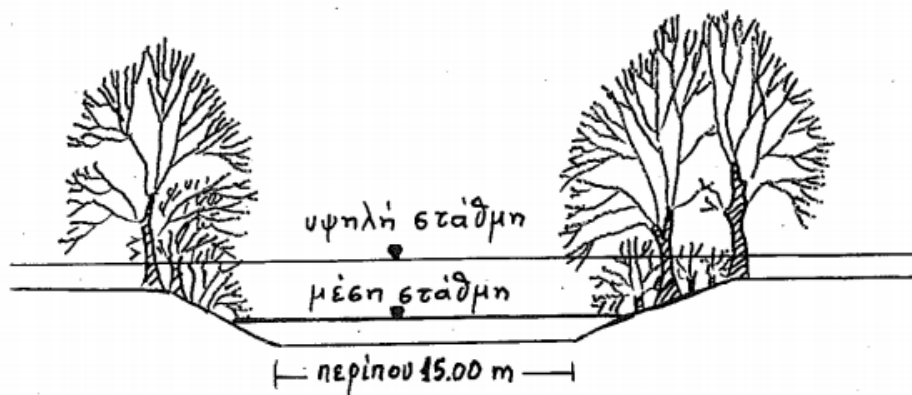
$$y_n = 2.11m$$

Σύνθετες διατομές, Ομοιόμορφη ροή

Γενικά:

- Πλημμύρες σε φυσικά υδατορεύματα: κύρια κοίτη δεν επαρκεί για τη διερχόμενη παροχή, επομένως διαμορφώνεται μια κοίτη με μεταβλητό συντελεστής n
- Οι πλημμύριες κοίτες χαρακτηρίζονται από μεγάλη τραχύτητα n , μεγαλύτερο πλάτος, μικρότερο βάθος σε σχέση με την κύρια κοίτη.
- Έχουμε την ανάπτυξη σημαντικών δυνάμεων εσωτερικής τριβής στις διεπιφάνειες μεταξύ των τμημάτων με μεταφορά ορμής που επιταχύνει τις ακραίες διατομές και επιβραδύνει την κύρια κοίτη. Συνακόλουθα αναπτύσσονται στροβιλισμοί και υπάρχει απώλεια ενέργειας.
- Χρησιμοποιημένο μονοδιάστατο μοντέλο ομοιόμορφης ροής επαρκεί μόνο για μία πρώτη εκτίμηση, ενώ η πλήρης απάντηση προϋποθέτει πείραμα και τρισδιάστατο μοντέλο με ενσωματωμένη την τύρβη.

Φυτοκάλυψη πρανών και οχθών ενός ποταμού



Μεθοδολογίες κλασικής υδραυλικής:

- Α' μέθοδος, «ισοδύναμος n » ενιαία (φανταστική) διατομή, λύση που οδηγεί σε υποεκτίμηση της παροχής. Θεωρείται από πολλούς συγγραφείς ότι η μέθοδος του ενιαίου n που θεωρεί κοινή ταχύτητα σε όλα τα τμήματα της διατομής εξάγει καλύτερα αποτελέσματα από τις άλλες τεχνικές της α' μεθόδου (βλπ. απόδειξη).

- **Β' Μέθοδος:** Μέθοδοι σύνθετων διατομών, εφαρμογή της εξίσωσης Manning τμηματικά ενώ οι υγρές διεπιφάνειες δεν προσμετρώνται στη βρεχόμενη περίμετρο. Κατά Πρίνο, 2014, ποιο κοντά στα πραγματικά δεδομένα οδηγεί ο οριζόντιος διαχωρισμός. Γενικά η β' μέθοδος υπερεκτιμά την παροχή.

Α΄ Μέθοδος απόδειξη του ενιαίου (φανταστικού) n για θεώρηση κοινής ταχύτητας σε όλα τα τμήματα σε ομοιόμορφη ροή



Έστω κοινή ταχύτητα σε όλη τη διατομή, επομένως έχουμε κοινή ταχύτητα και στα επιμέρους τμήματα

$$V_1 = V_2 = \dots = V_n$$

Από την εξίσωση του Manning στα επιμέρους τμήματα προκύπτει:

$$V_i = \frac{1}{n_i} * R_i^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n_i} * \left(\frac{A_i}{P_i} \right)^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_i = \left(\frac{V_i * n_i}{S_0^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{3}{2}} * P_i$$

Όμοια για τη συνολική (φανταστική) διατομή με (φανταστικό) ενιαίο n_e ισχύει:

$$A_{tot} = \left(\frac{V * n_e}{S_0^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{3}{2}} * P_{tot}$$

Ισχύει

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$$

και

$$V = V_1 = V_2 = \dots = V_i = \dots = V_n$$

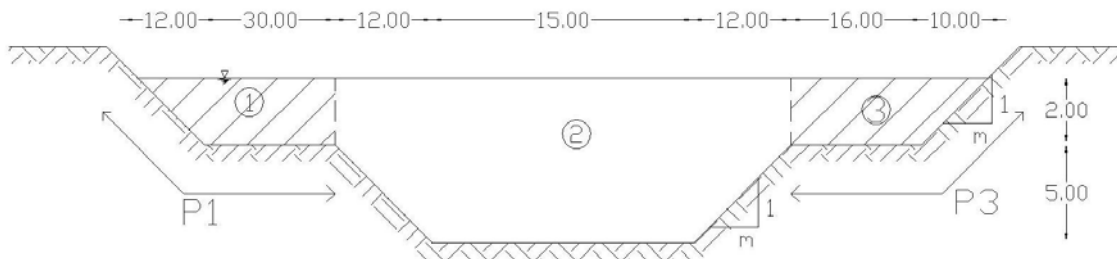
Επομένως,

$$\begin{aligned}
A &= \sum_i^n \left(\frac{V_i * n_i}{S_0} \right)^{\frac{3}{2}} * P_i \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{V^{\frac{3}{2}} * n_e^{\frac{3}{2}} * P_{tot}}{\left(S_0^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{V^{\frac{3}{2}}}{\left(S_0^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}}} * \sum_i^n n_i^{\frac{3}{2}} * P_i \Rightarrow \\
\Rightarrow n_e^{\frac{3}{2}} * P_{tot} &= \sum_i^n n_i^{\frac{3}{2}} * P_i \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow n_e = \left(\frac{\sum_i^n n_i^{\frac{3}{2}} * P_i}{P_{tot}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να γίνει εκτίμηση του εύρους της παροχής ομοιόμορφης ροής ενός αγωγού σύνθετης τραπεζοειδούς διατομής όταν ο συντελεστής κατά Manning είναι $n=0,05$ για την ελάσσονα κοίτη και $n=0,1$ για την κοίτη πλημμυρών. Δίνεται κλίση πυθμένα $0,0005$ (οι διαστάσεις του σχήματος σε μέτρα).



ΕΠΙΛΥΣΗ

Α' τρόπος: (Κατακόρυφος διαχωρισμός, β' μέθοδος)

Τμήμα 1

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A_1 = \frac{30 + 42}{2} * 2 = 72m^2$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι:

$$P_1 = 30 + \sqrt{12^2 + 2^2} = 42.20m$$

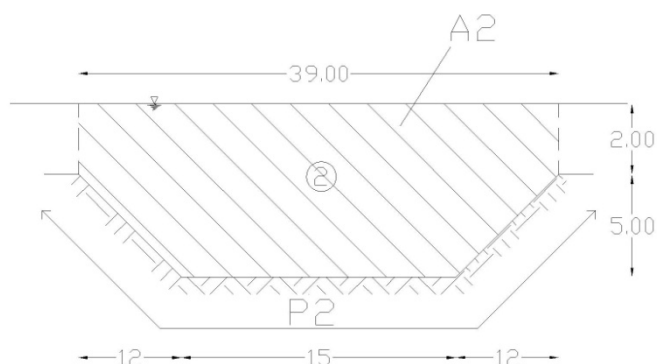
Η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R_1 = \frac{A_1}{P_1} = \frac{72}{42.20} = 1.71m$$

Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q_1 = \frac{1}{n_1} * A_1 * R_1^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.1} * 72 * 1.71^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_1 = 1029.59 * S_0^{\frac{1}{2}}$$

Τμήμα 2



Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A_2 = \frac{15 + (15 + 12 + 12)}{2} * 2 + 39 * 2 = 213m^2$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι (υπολογίζουμε μόνο στα τοιχώματα):

$$P_2 = 15 + 2 * \sqrt{12^2 + 5^2} = 41m$$

Η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R_2 = \frac{A_2}{P_2} = \frac{213}{41} = 5.20m$$

Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q_2 = \frac{1}{n_2} * A_2 * R_2^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.05} * 213 * 5.20^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_2 = 12778.10 * S_0^{\frac{1}{2}}$$

Τμήμα 3

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A_3 = \frac{16 + 26}{2} * 2 = 42m^2$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι:

$$P_3 = 16 + \sqrt{10^2 + 2^2} = 26.20m$$

Η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R_3 = \frac{A_3}{P_3} = \frac{42}{26.20} = 1.60m$$

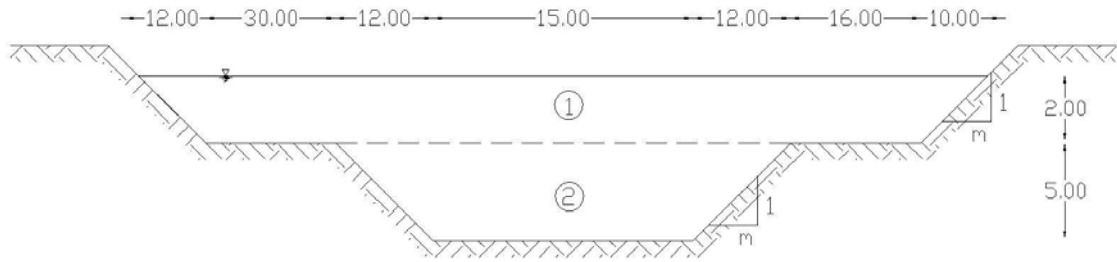
Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q_3 = \frac{1}{n_3} * A_3 * R_3^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.1} * 42 * 1.60^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_3 = 575.31 * S_0^{\frac{1}{2}}$$

Επομένως, η τελική παροχή:

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = S_0^{\frac{1}{2}} * \left(\frac{1}{n_1} * A_1 * R_1^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{n_2} * A_2 * R_2^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{n_3} * A_3 * R_3^{\frac{2}{3}} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_{tot} = (0.0005)^{\frac{1}{2}} * (1029.59 + 12778.10 + 575.31) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_{tot} = 321.61m^3 / s$$

Β' τρόπος: (Οριζόντιος διαχωρισμός, β' μέθοδος, προτιμητέα κατά Πρίνο, 2014)



Τμήμα 1

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A_1 = (30 + 12 + 15 + 12 + 16) * 2 + \frac{12 * 2}{2} + \frac{10 * 2}{2} = 170 + 12 + 10 = 192m^2$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι:

$$P_1 = \sqrt{12^2 + 2^2} + 30 + 16 + \sqrt{10^2 + 2^2} = 68.37m$$

Η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R_1 = \frac{A_1}{P_1} = \frac{192}{68.37} = 2.81m$$

Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q_1 = \frac{1}{n_1} * A_1 * R_1^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.1} * 192 * 2.81^{\frac{2}{3}} * 0.0005^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q_1 = 85.46m^3 / s$$

Τμήμα 2

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A_2 = \frac{15 + (15 + 12 + 12)}{2} * 5 = 135m^2$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι:

$$P_2 = 15 + 2 * \sqrt{12^2 + 5^2} = 41m$$

Η υδραυλική ακτίνα είναι:

$$R_2 = \frac{A_2}{P_2} = \frac{135}{41} = 3.29m$$

Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q_2 = \frac{1}{n_2} * A_2 * R_2^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.05} * 135 * 3.29^{\frac{2}{3}} * 0.0005^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 = 133.55m^3 / s$$

Επομένως, η τελική παροχή:

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = 85.46 + 133.55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{tot} = 219.01m^3 / s$$

Γ' τρόπος: (Μέθοδος ενιαίου αγωγού με εκτίμηση ισοδύναμου n, μέθοδος a)

	n	n ^{3/2}	P	P _i *n ^{3/2}	A
Πυθμένας	0.05	0.011	P ₂ =410	0.45	213
Τοίχωμα 1	0.1	0.032	P ₁ =42.20	1.34	72
Τοίχωμα 2	0.1	0.032	P ₃ =26.20	0.83	42
Σύνολο			109.40	2.62	327

$$n_e = \left(\frac{\sum_i^n n_i^{\frac{3}{2}} * P}{P_{tot}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2.62}{109.40} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_e = 0.083$$

Επομένως από την εξίσωση του Manning:

$$Q_{tot} = \frac{1}{n_e} * A_{tot} * R_{tot}^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.083} * 327 * \left(\frac{327}{109.40} \right)^{\frac{2}{3}} * 0.0005^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

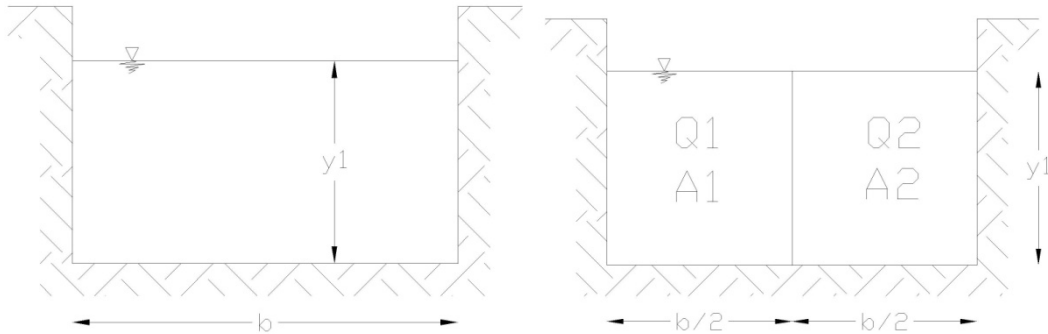
$$\Rightarrow Q_{tot} = 182.54m^3 / s$$

Σημαντικά μικρότερη παροχή από τη μέθοδο πολλαπλό διατομών..

Απάντηση: Η παροχή που μπορεί να διοχετεύσει η διατομή θα είναι **184.54-321.61** m^3/s . Με βάση βιβλιογραφικά δεδομένα σχετικά με την αποτελεσματικότητα των μεθόδων προτείνεται $Q_{tot} = 219.01m^3 / s$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Έστω αγωγός ορθογωνικής διατομής, πλάτους b , μεταφέρει παροχή Q (m^3/s) με βάθος ροής y_1 και δύο ενιαίοι αγωγοί ορθογωνικής διατομής πλάτους $b/2$ με βάθος ροής y_1 . Ισχύει $Q_1 = Q_2$, για το ίδιο υλικό πλήρωσης;



ΕΠΙΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του συντελεστή Manning και θεωρώντας ομοιόμορφη ροή:

Για τον αγωγό πλάτους b :

$$Q = \frac{1}{n} * A * R^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} * (b * y_1) * \left(\frac{b * y_1}{b + 2 * y_1} \right)^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}}$$

Για τους ενιαίους αγωγούς πλάτους $b/2$:

$$\begin{aligned}
Q_1 = Q_2 &= \frac{1}{n} * A * R^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} * \left(\frac{b}{2} * y_1 \right) * \left(\frac{\frac{b}{2} * y_1}{\frac{b}{2} + 2 * y_1} \right)^{\frac{2}{3}} * S_0^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{2} * \frac{1}{n} * b * y_1 * \left(\frac{\frac{b}{2} * y_1}{\frac{b + 4 * y_1}{2}} \right) * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} * \frac{1}{n} * b * y_1 * \left(\frac{b * y_1}{b + 4 * y_1} \right) * S_0^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} * \frac{1}{n} * b * y_1 * \left(\frac{b * y_1}{b + 2 * y_1} \right) * S_0^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{2}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$Q \geq Q_1 + Q_2$$

Κρίσιμη ροή

Αριθμός Froude=1

Κρίσιμη ροή και ειδική ενέργεια (ελάχιστη)

Προσδιορισμός κρίσιμου βάθους

Κρίσιμο βάθος και έλεγχος σε ομοιόμορφη ροή (επιθυμώ να είναι πάντα υποκρίσιμη)

Αριθμός Froude και έλεγχος κρίσιμης ροής

Ο αριθμός Froude μπορεί να ερμηνευθεί ως ο αδιάστατος αριθμός που υποδηλώνει το λόγο των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις βαρύτητας:

$$F = \frac{\text{δυν.αδράνειας}}{\text{δυν.βαρύτητας}} = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}}, y_\mu = \frac{A}{B}$$

Για να χαρακτηριστεί το είδος της ροής διακρίνω περιπτώσεις:

- 1) **F<1. Ροή υποκρίσιμη**, υπερέχουν οι δυνάμεις βαρύτητας των δυνάμεων αδράνειας, ενώ για μία συγκεκριμένη κλίση πυθμένα το βάθος ροής για την υποκρίσιμη ροή θα είναι μεγαλύτερο από το αντοίσηχο (με την κλίση) ομοιόμορφο βάθος.
- 2) **F>1. Ροή υπερκρίσιμη**, υπερέχουν οι δυνάμεις αδράνειας των δυνάμεων βαρύτητας (ύπαρξη σημαντικών ταχυτήτων), ενώ για μία συγκεκριμένη κλίση πυθμένα το βάθος ροής για την υποκρίσιμη ροή θα είναι μικρότερο από το αντοίσηχο (με την κλίση) ομοιόμορφο βάθος.
- 3) **F=1. Ροή κρίσιμη, το βάθος ροής είναι ίσο με το κρίσιμο βάθος.**

Η ταχύτητα σε ανοικτούς αγωγούς καθορίζεται από την κλίση του αγωγού και τις οριακές συνθήκες, συνεπώς, για σημαντικές κλίσεις που συνήθως επικρατούν σε ορεινές περιοχές η ροή είναι συνήθως υπερκρίσιμη.

Σε πεδινές περιοχές, όπου και υπάρχει αυξημένος κίνδυνος πλυμμηρών, οι κλίσεις είναι ήπιες, η ταχύτητα σχετικά μικρή και η ροή συνήθως υποκρίσιμη.

Στα τεχνικά έργα (εκτός από ειδικά έργα) επιλέγεται υποκρίσιμη ροή.

Όταν η ροή από υπερκρίσιμη μεταβαίνει σε υποκρίσιμη τότε αναπτύσσεται υδραυλικό άλμα, που χαρακτηρίζεται από αστάθεια στη ροή και σημαντικές απώλειες ενέργειας.

- **Ορθογωνική διατομή**

Αριθμός Froude για ορθογωνική διατομή:

$$y_\mu = \frac{A}{B} = \frac{by}{b} = y$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

Κρίσιμη ροή σε ορθογωνική διατομή (ο δείκτης c υποδηλώνει κρίσιμη ροή):

$$F_c = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \Leftrightarrow V = \sqrt{gy_c}$$

ή εναλλακτικά:

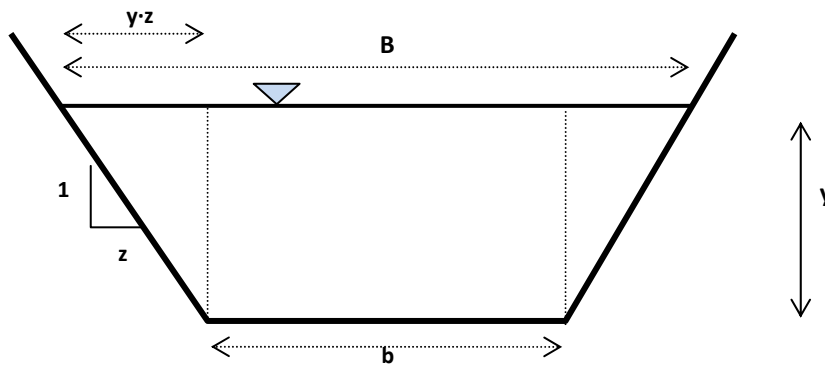
$$F = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \Leftrightarrow \frac{Q}{by_c\sqrt{gy_c}} = 1 \Leftrightarrow \frac{q}{y_c\sqrt{gy_c}} = 1 \Leftrightarrow \frac{q}{\sqrt{gy_c^3}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

Όπου $q = Q/b$, παροχή ανά μονάδα πλάτους, μέγεθος που ορίζεται σε ορθογωνικούς αγωγούς.

- **Τραπεζοειδής (συμμετρική) διατομή**

Αριθμός Froude για τραπεζοειδή διατομή:



$$A = (b + (b + 2zy)) \frac{y}{2} = (b + zy) y$$

$$y_\mu = \frac{A}{B} = \frac{(b + zy) y}{b + 2zy}$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = \frac{V}{\sqrt{g \frac{(b+zy)y}{b+2zy}}} =$$

$$= \frac{Q}{(b+zy)y \sqrt{g \frac{(b+zy)y}{b+2zy}}} = \sqrt{\frac{Q^2(b+2zy)}{g(b+zy)^3 y^3}}$$

Κρίσιμη ροή σε τραπεζοειδή διατομή (ο δείκτης c υποδηλώνει κρίσιμη ροή):

$$F_c = F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = \sqrt{\frac{Q^2(b+2zy_c)}{g(b+zy_c)^3 y_c^3}} = 1 \rightarrow \text{ΔΟΚΙΜΕΣ για εύρεση κρίσιμου βάθους } y_c$$

Μεθοδολογικές παρατηρήσεις

- Για να ελεγχθεί αν η ροή είναι υπερκρίσημη ή υποκρίσημη ροή αρκεί να προσδιορισθεί ο αριθμός **Froude** και να συγκριθεί με τη μονάδα.

- Προκειμένου να προσδιορισθεί το κρίσιμο βάθος (βάθος ροής όταν η ροή είναι κρίσιμη) εξισώνω τον αριθμό Froude με τη μονάδα και με **δοκιμές** προσδιορίζω το συνακόλουθο κριτικό βάθος ροής y_c

(με εξαίρεση την ορθογωνική διατομή, όπου $y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$, $q =$

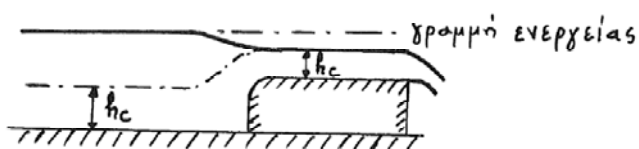
Q/b , παροχή ανά μονάδα πλάτους, μέγεθος που ορίζεται σε ορθογωνικούς αγωγούς)

χρήση πιν'ακων για συνήθεις διατομές

Κατά το σχεδιασμό επιδιώκω ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ ΡΟΗ

Εκτός των άλλων, η θεωρία της κρίσιμης ροής έχει ευρεία εφαρμογή στον προσδιορισμό της παροχής. Για παράδειγμα στους εκχειλιστές πλατειάς στέψεως αναπτύσσεται κρίσιμη ροή στον εκχειλιστή, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα για τον προσδιορισμό της παροχής (βλπ. επόμενο σχήμα).

Εκχειλιστής πλατειάς στέψης



Σε ορθογωνική διατομή (ΜΟΝΟ) και για κρίσιμες συνθήκες

ισχύει:

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \rightarrow y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$\frac{V_c^2}{2g} = \frac{q^2}{2gy_c^2} = \frac{gy_c^3}{2gy_c^2} = \frac{y_c}{2}$$

Επομένως η ειδική ενέργεια (ελάχιστη εφόσον αναφερόμαστε σε κρίσιμες συνθήκες) θα είναι:

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \longrightarrow E = y_c + \frac{y_c}{2} \longrightarrow y_c = \frac{2}{3} E$$

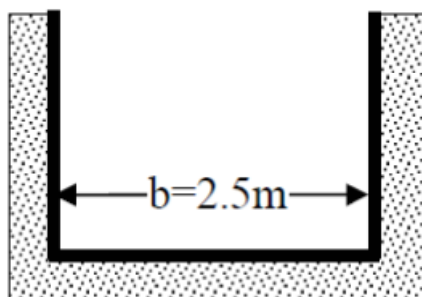
Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Για την ορθογωνική διατομή από σκυρόδεμα (συντελεστής στο διεθνές σύστημα μονάδων Manning $n = 0.015$) που εικονίζεται ζητούνται:

(α) Για κατά μήκος κλίση πυθμένα 0.001 και παροχή $7 \text{ m}^3/\text{s}$ το βάθος της ομοιόμορφης ροής.

(β) Να χαρακτηριστεί η ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη και να προσδιορισθεί το κρίσιμο βάθος ροής.



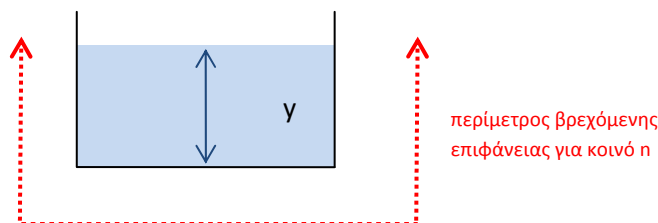
Λύση:

(α) Ομοιόμορφη ροή

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A = b \cdot y = 2.5 \cdot y \text{ (βλπ. πίνακα στο τέλος αυτών των ασκήσεων)}$$

$$\Pi = b + 2y = 2.5 + 2y$$



Εξίσωση Manning

$$Q = (2.5y) \frac{1}{n} \left(\frac{2.5y}{2.5 + 2y} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.015 \cdot 7}{0.001^{1/2}} = (2.5y) \left(\frac{2.5y}{2.5 + 2y} \right)^{2/3} \Leftrightarrow f(y) = 3.320391543 \rightarrow \text{εύρεση βάθους}$$

ομοιόμορφου ροής με **δοκιμές** για γνωστή παροχή και κλίση (για μεγάλα y αυξάνεται η $f(y)$)

Με δοκιμές προκύπτει ότι

$$y = 1.663, \text{ εφόσον πράγματι:}$$

$$\Leftrightarrow (2.5 \cdot 1.663) \left(\frac{2.5 \cdot 1.663}{2.5 + 2 \cdot 1.663} \right)^{2/3} \approx 3.32 = \frac{0.015 \cdot 7}{0.001^{1/2}}$$

(β) Έλεγχος Κρίσιμης ροής

Για $y=1.663$ η ταχύτητα είναι:

$$V = \frac{1}{n} \left(\frac{2.5 \cdot 1.663}{2.5 + 2 \cdot 1.663} \right)^{2/3} S_0^{1/2} = 1.68$$

$$\left(\text{ B' τρόπος } V = Q/A = 7 / (2.5 \cdot 1.663) \right)$$

ο αριθμός Froude είναι ίσος με

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{1.68}{\sqrt{g \cdot 1.663}} = 0.416 < 1 \rightarrow \text{ροή υποκρίσιμη}$$

επομένως η ροή είναι υποκρίσιμη.

Το κρίσιμο βάθος είναι ίσο με

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left(\frac{(7/2.5)^2}{g} \right)^{1/3} = 0.971682767$$

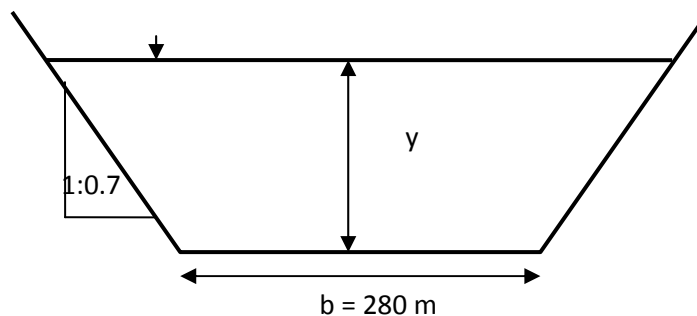
(β' τρόπος: Εφόσον το κρίσιμο βάθος είναι μικρότερο από το βάθος ροής η ροή είναι

$$\text{υποκρίσιμη } y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = 0.971682767 \leq y = 1.663)$$

Ασκηση 2

Αν η κλίση του πυθμένα είναι $S_o = 1:240$ να προσδιορισθεί η παροχή της παρακάτω τραπεζοειδούς διατομής αν ο συντελεστής Manning στο διεθνές σύστημα είναι $n = 0.042$ και η παροχή $Q = 98,200 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ να προσδιορισθεί το ομοιόμορφο το βάθος ροής. Να ελεγχθεί αν η ροή είναι κρίσιμη, υπερκρίσιμη ή υπερκρίσιμη και να προσδιορισθεί το κρίσιμο βάθος ροής.

(a)



$$n = 0.042$$

$$S_o = 1:240$$

Η βρεχόμενη περίμετρος είναι:

$$P = b + 2 * c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = b + 2 * y_n * \sqrt{1 + m^2}$$

Εξίσωση Manning για τραπεζοειδής διατομή

$$V = \frac{1}{n} \left(\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \Leftrightarrow Q = ((b+zy)y) \frac{1}{n} \left(\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot Q}{S_0^{1/2}} = ((b+zy)y) \left(\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}} \right)^{2/3} \Leftrightarrow$$

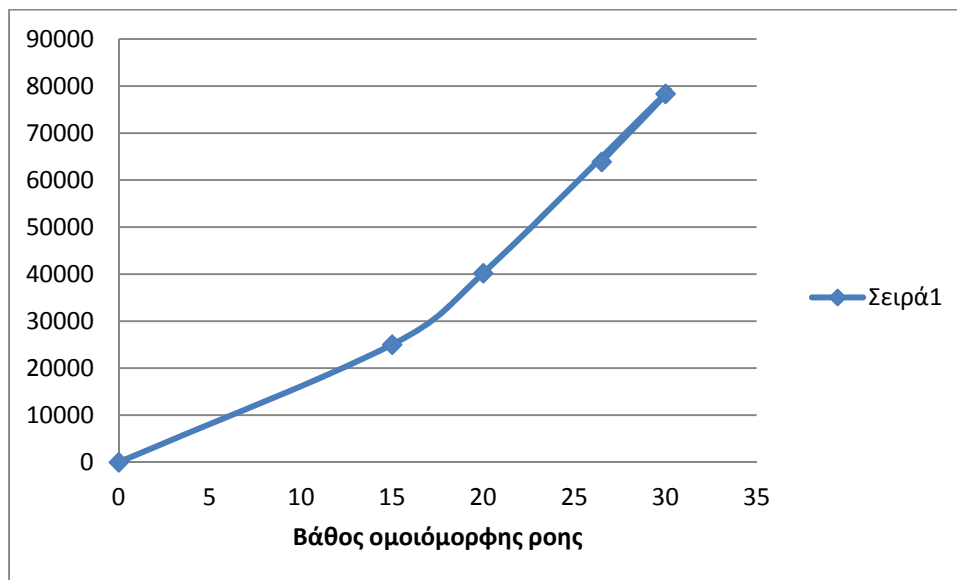
$$\frac{0.042 \cdot 98,200}{(1/240)^{1/2}} = ((280+0.7 \cdot y)y) \left(\frac{(280+0.7 \cdot y)y}{280+2 \cdot y\sqrt{1+0.7^2}} \right)^{2/3} = 63,894.93$$

Δοκιμές:

$y = 20 \text{ m} \Rightarrow f(y) = 40208.5 < 63894.93 \text{ (} Q = 61,800 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{)}$

$y = 30 \text{ m} \Rightarrow f(y) = 78361.04 > 63894.93 \text{ (} Q = 120,450 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{)}$

Καταστρώνω το παρακάτω διάγραμμα:



Τελικά $Q = 98,000 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ για βάθος ομοιόμορφης ροής, $y_0 = 26.5 \text{ m}$.

Πράγματι: $y_0 = 26.5 \text{ m}$ gives $A = 7911 \text{ m}^2, \Pi = 344.7 \text{ m}, R = 22.95 \text{ m}$

$$\left((280 + 0.7 \cdot 26.5) 26.5 \right) \left(\frac{(280 + 0.7 \cdot 26.5) 26.5}{280 + 2 \cdot 26.5 \sqrt{1 + 0.7^2}} \right)^{2/3} \approx 63,894.93$$

$$v = 12.41 \text{ ms}^{-1}, \quad \underline{Q = 98,200 \text{ m}^3\text{s}^{-1}}. \text{ OK}$$

(b) Ο αριθμός Froude Number είναι:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = \sqrt{\frac{Q^2 (b + 2zy)}{g (b + zy)^3 y^3}} = \sqrt{\frac{98,200^2 (280 + 2 \cdot 0.7 \cdot 26.5)}{g (280 + 0.7 \cdot 26.5)^3 \cdot 26.5^3}} = 0.793378963$$

Εφόσον $Fr < 1$, η ροή είναι υποκρίσιμη

(γ) Εύρεση κρίσιμου βάθους με δοκιμές:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{Q^2 (b + 2zy_c)}{g (b + zy_c)^3 y_c^3}} = \sqrt{\frac{98,200^2 (280 + 2 \cdot 0.7 \cdot y_c)}{g (280 + 0.7 \cdot y_c)^3 \cdot y_c^3}} = 1$$

.....(αφήνεται για άσκηση στους σπουδαστές)

Ελληνική βιβλιογραφία

Γκανούλης Ι., 1893. Υδραυλική των Σωληνοειδών Ροών. Θεσσαλονίκη.

Δημητρίου Ι., 1995. Εφαρμοσμένη Υδραυλική, Αθήνα.

Ευστρατιάδης Α. και Κουτσογιάννης Δ., 2003. Τυπικά Υδραυλικά Έργα, Ε.Μ.Π (σημειώσεις μαθήματος)

Κορωνάκης Π. Μηχανική Ρευστών. Εκδόσεις Ιων, 2001.

Κορωνάκης Π. Εργαστηριακή Ρευστομηχανική, τόμος Ι. Εκδόσεις Ιων, 2001.

Κωτσοβίνος Ν., 2007. Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Δ.Π.Θ., Ξάνθη.

Μαντόγλου Α., 2008. Εφαρμοσμένη Υδραυλική, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα.

Μπέλος Κ. Ανοικτοί Αγωγοί, Εκδόσεις Δ.Π.Θ., Ξάνθη.

Νουτσόπουλος Γ και Χριστοδούλου Γ., 1996 Μαθήματα Μηχανικής Ρευστών, Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Παπαϊωάννου Α., 1995. Μηχανική Ρευστών ΙΙ, Εκδόσεις, Αθήνα

- Παπαϊωάννου Π., 2010. Ανοικτοί Αγωγοί, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Πολυτεχνική Σχολή, Βόλος.
- Παντοκράτορας Α., 2002. Υδρεύσεις Πόλεων, Θεωρία, Εκδόσεις Δ.Π.Θ, Ξάνθη
- Σούλης, 2014. Υδραυλική. Εκδόσεις Αιβάζη, Θεσσαλονίκη.
- Στάμου Α., 2009. Εφαρμοσμένη Υδραυλική, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- Τσακίρης Γ., 2010. Υδραυλικά έργα. Σχεδιασμός και Διαχείριση. Τόμος Ι Αστικά Υδραυλικά Έργα, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- Τσακίρης Γ., 2005. Σημειώσεις από τις παραδόσεις του μαθήματος των Υδραυλικών Έργων, Ε.Μ.Π.
- Τερζίδης Γ., 1997. Εφαρμοσμένη Υδραυλική, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Χρυσάνθου Βλ., 2011. Σημειώσεις Υδραυλικής, Δ.Π.Θ.

Διεθνής βιβλιογραφία

- Elger F. Donald - Williams C. Barbara - Crowe T. Clayton - Roberson A. John, Μηχανική Ρευστών, 10η Έκδοση, Επιστημονική επιμέλεια έκδοσης: Μ.Σπηλιώτης. Εκδόσεις Τζιόλα (2014).
- Featherstone R.E. and Nalluri C., 1995. Civil Engineering Hydraulics, Blackwell Science.
- Haestad methods (Walski Th., Chase D., Savic D., Grayman W., Beckwith S. and Koelle E.) (2003). "Advanced Water Distribution Modeling and Management." Haestad press.
- Hwang N. and Houghtalen R., 1996. Fundamentals of Hydraulic Engineering Systems. Prentice Hall.
- Mays L., 2005. Water Resources Engineering, John Wiley & Sons, Inc.
- Mott R., 2006. Applied fluid mechanics. Prentice Hall.
- Munson B., Young D. and Okiishi Th., Fundamentals of fluid mechanics.
- Lansley K. και Mays L., 1999. «Hydraulics of Water Distribution and Systems», Κεφάλαιο 9. Hydraulic Design Handbook (Mays L), McGraw-Hill (handbooks).
- Streeter V., Bedford K. and Benjamin W., 1998. Fluid Mechanics, McGraw-Hill, U.S.
- Swamee, P.K. and Jain, A.K. (1976). Explicit equations for pipe-flow problems. *Journal of the Hydraulics Division* (ASCE) 102 (5): 657–664.
- Wurbs R. A. and James W.P, 2002. Water Resources Engineering, Prentice Hall