

Άσκηση

Η κατανομή της ταχύτητας σε ένα κανάλι προσδιορίζεται από την εξίσωση $v = v_0 \cdot (y/y_0)^n$ όπου v είναι η ταχύτητα ροής σε ένα ύψος y , v_0 είναι η ταχύτητα ροής στο βάθος y_0 και n μια σταθερά. Να υπολογιστεί ο συντελεστής διάθρασης α της κινητικής ενέργειας.

Λύση

Ο συντελεστής διάθρασης κινητικής ενέργειας α δίνεται από τον τύπο

$$\alpha = \frac{\int v^3 dA}{v_m^3 \int dA} \quad \text{με } v_m: \text{ μέση ταχύτητα ροής καθ' ύψος}$$

$$v_m = \frac{\int v dA}{\int dA} \quad \text{και για μοναδικό πλάτος μετασχηματίζεται}$$

$$v_m = \frac{\int v dy}{\int dy} \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη (1) $v = v_0 \cdot (y/y_0)^n$ και ολοκληρώνοντας από $\int_0^{y_0}$ προκύπτει \Rightarrow

$$v_m = \frac{\int_0^{y_0} v_0 \cdot (y/y_0)^n dy}{\int_0^{y_0} dy} = \frac{\frac{v_0}{y_0^n} \int_0^{y_0} y^n dy}{\int_0^{y_0} dy}$$

$$= \frac{V_0}{y_0^n} \frac{1}{(n+1)} \frac{[y^{n+1}]_0^{y_0}}{[y]_0^{y_0}} = \frac{V_0}{y_0^n \cdot (n+1)} \frac{y_0^{n+1}}{y_0} = \frac{V_0}{n+1}$$

$$V_m = \frac{V_0}{n+1} \quad (2)$$

Αρα $\alpha = \frac{\int_0^{y_0} V^3 dA}{V_m^3 \int_0^{y_0} dA}$ για κομβιαίο μήκος \Rightarrow

$$\alpha = \frac{\int_0^{y_0} V^3 dy}{V_m^3 \int_0^{y_0} dy} = \frac{\int_0^{y_0} (V_0 \cdot (y/y_0)^n)^3 dy}{\left(\frac{V_0}{n+1}\right)^3 \int_0^{y_0} dy}$$

$$= \frac{\frac{V_0^3}{y_0^{3n}} \int_0^{y_0} y^{3n} dy}{\frac{V_0^3}{(n+1)^3} \int_0^{y_0} dy} = \frac{\frac{V_0^3}{y_0^{3n}} \frac{1}{3n+1} [y^{3n+1}]_0^{y_0}}{\frac{V_0^3}{(n+1)^3} [y]_0^{y_0}}$$

$$= \frac{\frac{V_0^3}{y_0^{3n}} \frac{1}{3n+1} y_0^{3n+1}}{\frac{V_0^3}{(n+1)^3} y_0} = \frac{(n+1)^3}{3n+1}$$

Όμοια να βρεθεί ο συντελ. διαρροής ορμής β

$$\beta = \frac{\int V^2 dA}{V_m^2 \int dA}$$