



Διατμηματικό πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών “ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ”

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Σπηλιώτης Μιχάλης και Κιτσικούδης Β.

ARMA, ARIMA (θεωρία και εφαρμογές)

ΞΑΝΘΗ, 2016

Μη αιτιατά υποδείγματα πρόβλεψης

2

- Πρόβλεψη αποκλειστικά με βάση τις προηγούμενες τιμές:
 - Καθοριστικά υποδείγματα: ο τυχαίος παράγοντας εμφανίζεται ως κατάλοιπο λάθους (πρώτη εφαρμογή)
 - **Στοχαστικά υποδείγματα: Τυχαίος παράγοντας αποτελεί μηχανισμό μέσα από τον οποίο δημιουργείται η χρονοσειρά (Δημέλη, 2002)**

Λευκός Θόρυβος

3

- Κανένα ευκρινές σχήμα, ε_t

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\gamma_0 = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 (\neq 0)$$

$$\gamma_k = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0, \text{ για } k \neq 0$$

- Χρήση τυχαίων αριθμών

Ανασκόπηση 1^{ου} μαθήματος

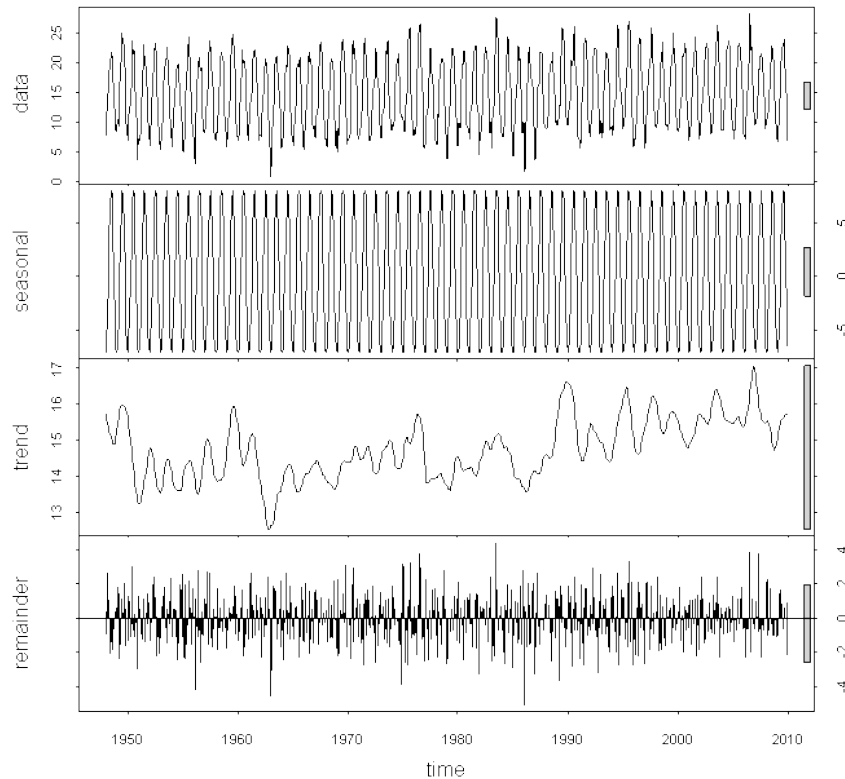
4

- Μοντελοποίηση μονομεταβλητών χρονικών σειρών με τη χρήση του κινητού μέσου όρου για την εξομάλυνσή τους.
- Προσδιορισμός της τάσης με πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση και αποδόμηση της χρονικής σειράς σε συνιστώσες τάσης, εποχικότητας και θορύβου.
- Μοντελοποίηση των παραπάνω συνιστωσών και επανασύνθεση σε μία χρονική σειρά που θα χρησιμοποιηθεί για μελλοντικές προβλέψεις.



Ανασκόπηση 1^{ου} μαθήματος (συνέχεια)

5



- Αποσύνθεση μιας χρονικής σειράς, που παρουσιάζει την θερμοκρασία στο Heathrow, στις συνιστώσες της.

6

Βασικές γνώσεις

Εφαρμοσμένη ανάλυση υδρολογικών χρονικών σειρών

Μερικοί απλοί τελεστές

7

- Ένας τελεστής που χρησιμοποιείται ευρύτατα στη μελέτη των χρονικών σειρών είναι ο “οπισθοδρομικός” (backward shift) τελεστής (B) ο οποίος ορίζεται ως:

$$Bz_t = z_{t-1}$$

και γενικότερα:

$$B^j z_t = z_{t-j}$$

- Η αντίστροφη διαδικασία υλοποιείται μέσω ενός αντίστοιχου τελεστή, του “πρόσω” (forward shift) τελεστή (F) που ορίζεται αντίστοιχα ως:

$$Fz_t = z_{t+1}$$

και γενικότερα:

$$F^j z_t = z_{t+j}$$

όπου $z_1, z_2, \dots, z_t, \dots, z_N$ η χρονική σειρά.



Μερικοί απλοί τελεστές (συνέχεια)

8

- Ένας ακόμα τελεστής είναι ο “οπισθοδρομικός τελεστής διαφοράς” (backward difference operator) ο οποίος ορίζεται ως:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1 - \mathbf{B})z_t$$



Αυτοδιακύμανση

9

γ_k = αυτοδιακύμανση μεταξύ παρατηρήσεων που απέχουν χρόνο k :

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \text{cov}(y_t, y_{t+k}) = \\ &= E[(y_t - \bar{y}_t)(y_{t+k} - \bar{y}_{t+k})]\end{aligned}$$

- για στατική χρονοσειρά

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t+k} (= E(y_{t+k})) = \mu_y$$

άρα
$$\gamma_k = \text{cov}(y_t, y_{t+k}) = E[(y_t - \mu_t)(y_{t+k} - \mu_t)]$$

Για $k=0$, τετράγωνο τυπική απόκλιση
 $\gamma_0 = \sigma_y^2$

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης

10

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(y_t)} \sqrt{\text{Var}(y_{t+k})}} =$$
$$= \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t+k})}{\text{Var}(y_t)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{"}\sigma_y\text{"} \\ \text{"}\sigma_y \text{ σταθερό"} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Επομένως επιζητείται ως:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}$$

ΣΤΑΣΙΜΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑ

Αυτοσυσχετίσεις και μερικές αυτοσυσχετίσεις

- Η εκτίμηση της (k) τάξης υστέρησης (lag) αυτοσυσχέτισης είναι:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$$

Για μια ικανοποιητική προσέγγιση των r_k χρειάζονται τουλάχιστον $N=50$ παρατηρήσεις, όταν δεν υπάρχει εποχικότητα, και το κατάλληλο πλήθος των αυτοσυσχετίσεων είναι $\approx N/4$

- Η έννοια των μερικών αυτοσυσχετίσεων είναι εντελώς αντίστοιχη εκείνης που χρησιμοποιείται στην πολ/πλή παλινδρόμηση. Το ερώτημα της τάξης του αυτοπαλινδρομικού μοντέλου (το p) είναι ανάλογο προς εκείνο του πλήθους των ανεξάρτητων μεταβλητών.

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \phi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p}$$

Μερική Αυτοσυσχέτιση

2.5 Μερική Αυτοσυσχέτιση

Μια άλλη συνάρτηση που χρησιμοποιείται στη μελέτη των χαρακτηριστικών μιας χρονολογικής σειράς είναι η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης. Γενικά ο συντελεστής μερικής συσχέτισης $r_{xy; z_1, \dots, z_v}$ μετρά τη συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών x και y όταν έχει αφαιρεθεί η επίδραση που ασκούν άλλες μεταβλητές έστω οι z_1, \dots, z_v πάνω σ' αυτές. Στην περίπτωση μιας χρονολογικής σειράς, ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης μεταξύ y_t και y_{t+k} ορίζεται ως ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ τους όταν έχουν ληφθεί υπόψη οι συσχετίσεις όλων των ενδιάμεσων τιμών $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+k-1}$.

Η έννοια της μερικής αυτοσυσχέτισης μπορεί να εξηγηθεί καλύτερα μέσα από την παλινδρόμηση. Ας θεωρήσουμε την παλινδρόμηση της y_t πάνω στις y_{t-1} και y_{t-2} :

$$y_t = \phi_{12}y_{t-1} + \phi_{22}y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.7)$$

όπου ο πρώτος υποδείκτης του ϕ δηλώνει τη χρονική υστέρηση της μεταβλητής (1 για την y_{t-1}) και ο δεύτερος τη μέγιστη τάξη της παλινδρόμησης (2 στη συγκεκριμένη περίπτωση). Τότε ο συντελεστής της y_{t-2} μετρά το συντελεστή μερικής αυτοσυσχέτισης δευτέρας τάξεως (ϕ_{22}) καθόσον αυτός δείχνει τη συσχέτιση μεταξύ των y_t και y_{t-2} όταν έχει συμπεριληφθεί στην παλινδρόμηση η ενδιάμεση y_{t-1} .

Γενικότερα, ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης p -οστής τάξεως συμβολίζεται με το γράμμα Φ_{pp} και είναι ο συντελεστής του y_{t-p} στην παλινδρόμηση

Δημέλη, 2002

$$y_t = \Phi_{1p}y_{t-1} + \Phi_{2p}y_{t-2} + \dots + \Phi_{pp}y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.8)$$

Είναι προφανές ότι ο συντελεστής πρώτης τάξης Φ_{11} ταυτίζεται με τον απλό συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1 .

Στην πράξη εκτιμούμε υποδείγματα της μορφής (2.8), ξεκινώντας έχοντας μια χρονική υστέρηση του y_t και προσθέτοντας διαδοχικά από μια υστέρηση κάθε φορά. Οι εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των συντελεστών Φ_{ss} σε κάθε τέτοιο υπόδειγμα για $s = 1, 2, \dots, p$ μας δίνει τη σειρά των μερικών αυτοσυσχετίσεων $\hat{\Phi}_{11}, \hat{\Phi}_{22}, \hat{\Phi}_{33}, \dots, \hat{\Phi}_{pp}$.

Έτσι, για παράδειγμα, οι τρεις πρώτοι συντελεστές προκύπτουν από τις εκτιμήσεις των υποδειγμάτων:

$$\begin{aligned} y_t &= \Phi_{11}y_{t-1} + \varepsilon_{1t} && \rightarrow \hat{\Phi}_{11} \\ y_t &= \Phi_{12}y_{t-1} + \Phi_{22}y_{t-2} + \varepsilon_{2t} && \rightarrow \hat{\Phi}_{22} \\ y_t &= \Phi_{13}y_{t-1} + \Phi_{23}y_{t-2} + \Phi_{33}y_{t-3} + \varepsilon_{3t} && \rightarrow \hat{\Phi}_{33} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Οι τιμές των Φ_{ss} για διάφορες τιμές του $s = 1, 2, \dots$ αποτελούν τη **συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης (partial autocorrelation function)** και συμβολίζεται με τα γράμματα PACF ή απλώς PAC. Η μορφή της συνάρτησης αυτής καθώς και της απλής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (ACF) είναι εξαιρετικά χρήσιμες καθόσον μας καθοδηγούν στον προσδιορισμό της μορφής της стоχαστικής διαδικασίας που δημιούργησε τη δεδομένη χρονολογική σειρά όπως θα δούμε παρακάτω.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να μελετήσουμε μερικές απλές μορφές χρονολογικών σειρών πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των πιο πολύπλοκων μορφών.

Αυτοσυσχετίσεις και μερικές αυτοσυσχετίσεις (συνέχεια)

14

- Η εκτίμηση της (k) τάξης υστέρησης (lag) αυτοσυσχέτισης είναι:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$$

- Παράδειγμα: Εκτίμηση αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης (r_1) των 10 πρώτων παρατηρήσεων μιας χρονικής σειράς:

$$z_t: 47,64,23,71,38,64,55,41,59,48 \rightarrow \bar{z} = 51$$

$$z_t - \bar{z}: -4,13,-28,20,-13,13,4,-10,8,-3$$

$$\sum_{i=1}^9 (z_t - \bar{z})(z_{t+1} - \bar{z}) = (-4)(13) + (13)(28) + \dots + (8)(-3)$$

$$= -1497 \rightarrow c_1 = \frac{-1497}{10} = -149.7$$

$$c_0 = 189.6$$



$$r_1 = \frac{-149.7}{189.6} = -0.79$$



Μονιμότητα χρονοσειράς

15

• Μονιμότητα Χρονοσειράς:

$$\bar{X}_t = \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) \xrightarrow{\text{τελείρει}} \bar{X}_{t+T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t+T)$$

ή ισοδύναμα:

αν η υστέρηση καθορίζει τη διακύμανση και δx_i
ο χεόνος t :

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+T}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) X_i(t+T) - \mu \bar{X}_{t+T}$$

- Συνήθως, οι χρονοσειρές μου, αναφέρονται οφεί έχει αφαιρεθεί ο μείκτος όρος.
- AR, MA, ARMA, στατικές χρονοσειρές
- Για μη στατικές χρονοσειρές.
Διάφοροι τρόποι μονιμοποίησης. Ένας από αυτούς είναι η διαφορά τάξης d :

Τάξης 1:

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1-B)Z_t.$$

Τάξης 2:

$$\nabla^2 Z = \nabla \cdot \nabla Z_t = \nabla (Z_t - Z_{t-1}) =$$

$$= \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1} = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-1} + Z_{t-2} =$$

$$= Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

Άρα: $\nabla^2 Z_t = (1-B)^2 Z_t$

Τρόπος
μονιμοποίησης
της
χρονοσειρών

Μόνιμη χρονοσειρά (έως και ARMA)

Μόνιμη χρονοσειρά

18

- Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα, AR
- Μοντέλα κινητού μέσου όρου, MA
- Μεικτά ARMA
- Μονιμοποίηση χρονοσειρών με διαφορές (μετάβαση στην επομένη ενότητα)

Αυτοπαλίνδρομο μοντέλο AR

Το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο

- Ένα στοχαστικό μοντέλο που αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμο στην απεικόνιση πλείστων περιπτώσεων χρονικών σειρών που παρουσιάζονται στην πράξη, είναι το λεγόμενο **αυτοπαλινδρομικό μοντέλο** (autoregressive model).

$$\bar{z}_t = \varphi_1 \bar{z}_{t-1} + \varphi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \varphi_p \bar{z}_{t-p} + \alpha_t$$

όπου \bar{z}_t είναι η απόκλιση της αντίστοιχης τιμής από τη μέση τιμή (μ), π.χ. $\bar{z}_t = z_t - \mu$.

- Η τιμή \bar{z}_t μιας εξαρτημένης μεταβλητής συνδέεται γραμμικά με τις αντίστοιχες τιμές p ανεξάρτητων μεταβλητών και ενός όρου σφάλματος α_t .

Το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο (συνέχεια)

21

- Αν θεωρηθεί ο αυτοπαλινδρομικός τελεστής τάξης p που ορίζεται ως:

$$\varphi(\mathbf{B}) = 1 - \varphi_1 \mathbf{B} - \varphi_2 \mathbf{B}^2 - \dots - \varphi_p \mathbf{B}^p$$

τότε το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο μπορεί συνεπτυγμένα να γραφεί ως:

$$\varphi(\mathbf{B})\bar{z}_t = \alpha_t$$

και είναι ισοδύναμο με:

$$\bar{z}_t = \varphi_1 \bar{z}_{t-1} + \varphi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \varphi_p \bar{z}_{t-p} + \alpha_t$$

από τα προηγούμενα

AR(1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t.$$

$$E(Y_{t+1}) = \phi_1 E(Y_{t+1}) + \delta$$

$$\Leftrightarrow E(Y_{t+1}) = \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \mu.$$

$$\text{άρα όταν } E(Y_{t+1}) = 0 \rightarrow \delta = 0$$

Συνήθως επιδίωξη

$$\tilde{Y}_t = Y_t - E(Y_{t+1}) = Y_t - \frac{\delta}{1 - \phi_1}$$

Απο αυτό. Αφαιρώντας το μέσο όρο, δεν θα υπάρξει σταθερός όρος, $\delta = 0$.

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Έχοντας αφαιρέσει το μέσο όρο (όπως συμβαίνει δεν θα εμφανιστεί ο όρος δ)

Αυτοπαλίνδρομο μοντέλο δεύτερης τάξης AR(2)

23

Το **Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δεύτερης τάξης AR(2)** είναι της μορφής:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

ή

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Δεν το πολυχρησιμοποιούμε, συνήθως αφαιρούμε το μέσο όρο και πάμε στο παρακάτω μοντέλο

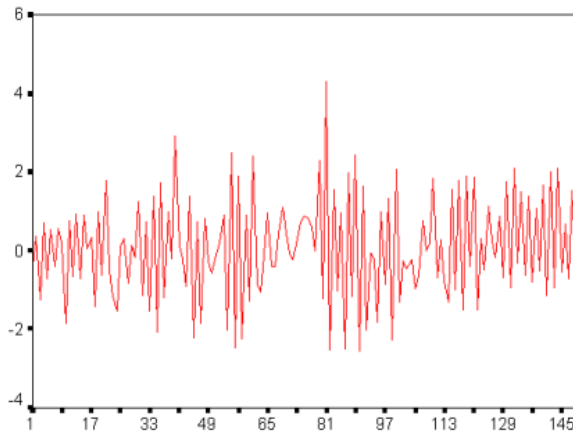
Αν εφαρμοσθεί ο **τελεστής υστερήσεως (lag operator) B** η σχέση γράφεται και ως εξής:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) y_t = \varepsilon_t$$

Λουκάς, 2015

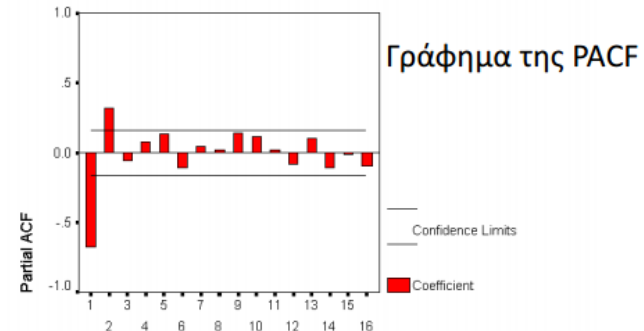
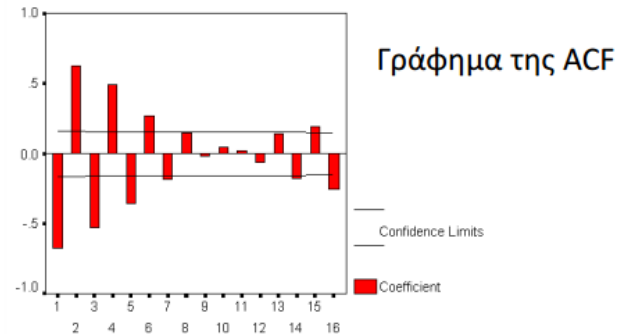
Αυτοπαλίνδρομο μοντέλο δεύτερης τάξης AR(2)

Παράδειγμα 4: Με προσομοίωση φτιάξαμε 150 παρατηρήσεις από μια AR(2) χ.σ. $(1+0.5B-0.3B^2)z_t = a_t$. Η σειρά έχει το παρακάτω γράφημα:



Παρατηρήσεις:

- το correlogram της σειράς παρουσιάζει μείωση εκθετική ενώ τα πρόσυμα των αυτοσυσχετίσεων πηγαίνουν εναλλάξ
- στο γράφημα των ϕ_{kk} σημαντικές είναι μόνο οι ϕ_{11} και ϕ_{22}



Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα

Εξ. Yule-Walker

25

Εξίσωση Yule-Walker :
(μόνο για AR(p)):

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\tilde{Y}_t \cdot \tilde{Y}_{t-k} = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} \cdot \tilde{Y}_{t-k} + \dots + \phi_p \tilde{Y}_{t-p} \cdot \tilde{Y}_{t-k} + \varepsilon_t \tilde{Y}_{t-k}$$

↙ Μέσοι όροι:

$$E(\tilde{Y}_t \cdot \tilde{Y}_{t-k}) = \phi_1 E(\tilde{Y}_{t-1} \cdot \tilde{Y}_{t-k}) + \phi_p E(\tilde{Y}_{t-p} \cdot \tilde{Y}_{t-k}) + O(\varepsilon)$$

Σχόλιο

$$E(\varepsilon_t + \tilde{Y}_{t-k}) = 0$$

\tilde{Y}_{t-k} , είναι συνάρτηση των λευκών θορύβων
έως $t-k$, ενώ οι επόμενες διαταραχές ~~ε_t~~
δεν συχίζονται.

(μόνο σε) Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα

Εξ. Yule-Walker (2)

27

α)

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

$\swarrow \rho_0$ $k \geq 0$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

AR(p)
Σύστημα
επιτήρηση

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-2}$$

⋮

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_3 \rho_{p-3} + \dots + \phi_p.$$

Σχόλιο

28

- Ο λευκός θόρυβος έχει μέσο όρο μηδέν αλλά τυπική απόκλιση που εξαρτάται από τη διασπορά της στάσιμης χρονοσειράς
- Για παράδειγμα σε AR(1) ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{y}_t^2) &= E(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots)^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots) = \sigma_\varepsilon^2 \lambda \\ \Rightarrow \gamma_0 &= \text{Var}(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \text{Var}(y_t) \cdot (1 - \phi_1^2)$$

Πιο γενική απόδειξη τυπική απόκλιση σε αυτοπαλίνδρομα μοντέλα

29

Σχέση τυπική απόκλισης $\sigma_{\tilde{y}_t}$ του
χρονόσειρας:

Ισχύει

$$\tilde{y}_t = a_t + \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p}$$

Πολλαπλασιάζουμε με \tilde{y}_t και παίρνουμε το μέσο όρο:

$$E(\tilde{y}_t^2) = E(a_t \tilde{y}_t) + \phi_1 E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) + \dots + \phi_p E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-p})$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{\tilde{y}_t}^2 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + E(a_t \tilde{y}_t)$$

$$E(a_t \tilde{y}_t) = \sigma_{a_t}^2, \text{ εφόσον η } \tilde{y}_t$$

συνδέεται μόνο με \tilde{a}_t

Τυπική απόκλιση λευκού θορύβου

30

□ Διαιρώντας με $\sigma_y^2 = \gamma_0$

$$\sigma_y^2 = \varphi_1 \gamma_1 + \dots \varphi_p \gamma_p + \sigma_a^2 \Leftrightarrow$$

$$1 = \varphi_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_0} + \dots \varphi_p \frac{\gamma_p}{\gamma_0} + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_y^2} \left(\sigma_y^2 = \gamma_0 \text{ συμβολισμός} \right) \Leftrightarrow$$

$$1 = \varphi_1 \rho_1 + \dots \varphi_p \rho_p + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_y^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2 \left(1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots \varphi_p \rho_p \right)$$

Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα πρώτης τάξεως

Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα πρώτης τάξεως

32

Μόνο για $AR(L)$

$$\rho_1 = \phi_L$$

$AR(1)$

$\rho(1)$ σημαντική
εκθ. μίσθω
 $\phi_1 \neq 0$
 $\phi_2 = \phi_3 = \dots = 0$

Από rule-walkover:

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \cancel{\phi_2} \rho_1 = \rho_1^2$$

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + 0 + \dots = \phi_1 \rho_1^2 = \rho_1^3$$

Ομοίως:

$$\rho_k = \phi_1^k$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$$

Μιμίκου, επαλήθευση με χρήση τυχαίων αριθμών

33

ΠΙΝΑΚΑΣ 10. Έφαρμογή μοντέλου AR(1)

i	q_i	$q_i - \bar{x}$	$r_1(q_i - \bar{x})$	$\bar{x} + r_1(q_i - \bar{x})$	t_i	$t_i s \sqrt{1 - r_1^2}$	\hat{q}_{i+1}
0	588.80	-5.32	-2.01	592.11	-0.523	-62.61	529.50
1	505.20	-88.92	-33.63	560.49	0.611	73.25	633.74
2	654.85	60.73	22.97	617.09	-0.359	-43.04	574.05
3	556.40	-37.72	-14.27	579.85	-0.393	-47.12	532.73
4	513.73	-80.39	-30.40	563.72	0.084	10.07	573.79
5	573.83	-20.29	-7.67	586.45	-0.931	-111.61	474.84
6	434.33	-159.79	-60.43	533.69	-0.027	-3.24	530.45
7	526.06	-68.06	-25.74	568.38	0.798	95.66	664.04
8	692.63	98.51	37.26	631.38	1.672	200.45	831.83
9	895.32	301.20	113.91	708.03	-1.077	-129.11	578.92

όπου \bar{x} η εκτίμηση από το δείγμα του μέσου όρου μ , $\bar{x}=594.12$
 r_1 η εκτίμηση του ρ_1 , $r_1=0.37819$, και S η εκτίμηση του σ ,
 $S=129.32$, t_i είναι η κανονική τυχαία μεταβλητή $[0,1]$ και η
 τελευταία στήλη του πίνακα δίνει τις συνθετικές ροές, που
 φαίνονται να είναι πολύ κοντά στις πραγματικές με περίπου ίδιο
 μέσο όρο, τυπική απόκλιση και συντελεστή αυτοσυσχετίσεως πρώτης
 τάξεως.

Fiering, πάνω σε αυτοπαίνδρομα μοντέλα,
διάλλειμα, χρήση τυχαίων αριθμών

Για ετήσια μεγέθη

35

Έστω τη σειρά ανεξαρτητών
Τυχαίων αριθμών ϵ_i με μέσο όρο μηδέν
και συνολική απόκλιση $\epsilon_i \sim N(0,1)$

Τότε το $t_t \sigma \sqrt{1-\rho_1^{2t}}$ είναι

εξεταστική ανεξάρτητη με μέσο όρο μηδέν
και συνολική απόκλιση $\sigma \sqrt{1-\rho_1^{2t}}$.

όσο $t \rightarrow \infty$ ο $\rho_1^{2t} \rightarrow 0$.

$$\text{Άρα } q_i - \mu = \rho_1 (q_{i-1} - \mu) + t_i \sigma \sqrt{1-\rho_1^2}$$

συνολική χρονοσυνάρτηση

Χρήση τυχαίων
αριθμών

Ετήσιες χρονοσειρές

36

Μοντέλο Fienberg. \rightarrow AR(2)

\rightarrow Μίαοι όροι

\rightarrow Ετήσιο

\rightarrow Μηνιαίο.

$$y_t - \mu = \rho_L \cdot (y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t \cdot \sigma \sqrt{(1-\rho_L^2)}$$

\tilde{y}_t (Ετήσιο)
 \tilde{y}_{t+1}
 ρ_L (AR(1))
 ϵ_t (τυχαίος όρος)
 σ (συντελεστής)
 $\sqrt{(1-\rho_L^2)}$ (συντελεστής)
 $\sigma \epsilon$ (συντελεστής)

$\Rightarrow \epsilon_t =$ τυχαίος αριθμός $N(0,1)$.

\Rightarrow ε να δάσκαλι υπονοητική γύφτη
 $(y_t = \frac{1-\rho^3}{(1-\rho^2)^{1.5}} y^* \dots)$

Πρόβλεψη με
 τυχαίους αριθμούς

Μηνιαίες χρονοσειρές

37

$$X_{i,j+1} = \mu_{j+1} + \rho_j \frac{\sigma_{j+1}}{\sigma_j} (X_{ij} - \mu_j) + t_{i,j+1} \sigma_{j+1} \sqrt{1 - \rho_j^2}$$

ρ_j is serial correlation between flows of j^{th} month and $j+1^{\text{th}}$ month.

$t_{i,j+1} \sim N(0, 1)$

Πρόβλεψη με
τυχαίους αριθμούς

Όχι ακριβώς AR

Μοντέλα κινητού μέσου όρου

Το μοντέλο κινητού μέσου όρου

39

- Ένα άλλο ιδιαίτερα πρακτικού ενδιαφέροντος μοντέλο για διάφορες χρονικές σειρές της πράξης είναι το μοντέλο που απεικονίζει τη σειρά μέσα από μια πεπερασμένη ακολουθία (q) προηγούμενων τιμών λευκών θορύβων (α_t).
- Η έκφραση της μορφής

$$z_t = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q}$$

καλείται διαδικασία κινητού μέσου όρου (q) τάξης.

- Αν όπως και προηγουμένως οριστεί ένας κινητού μέσου όρου τελεστής τάξης (q):

$$\theta(\mathbf{B}) = 1 - \theta_1 \mathbf{B} - \theta_2 \mathbf{B}^2 - \dots - \theta_q \mathbf{B}^q$$

τότε το αντίστοιχο μοντέλο μπορεί να γραφεί ως: $\bar{z}_t = \theta(\mathbf{B})\alpha_t$



Υπόδειγμα κινητού μέσου όρου πρώτης τάξης MA(1)

Η μορφή του υποδείγματος
MA(1) είναι η ακόλουθη:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

ή

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

ή

$$Y_t - \mu = y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Δεν το πολυχρησιμοποιούμε,
συνήθως αφαιρούμε το μέσο όρο
και πάμε στο παρακάτω μοντέλο

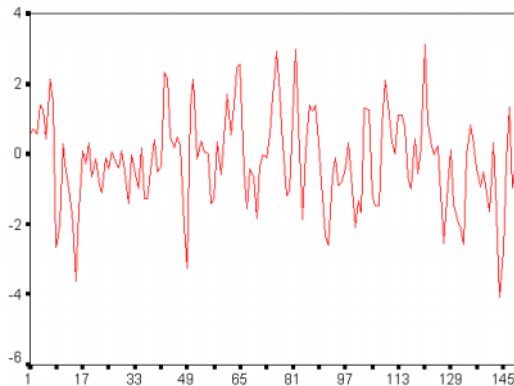
Αν χρησιμοποιήσουμε τον **τελεστή υστερήσεως (Lag operator) L** η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$y_t = (1 + \theta_1 L) \varepsilon_t$$



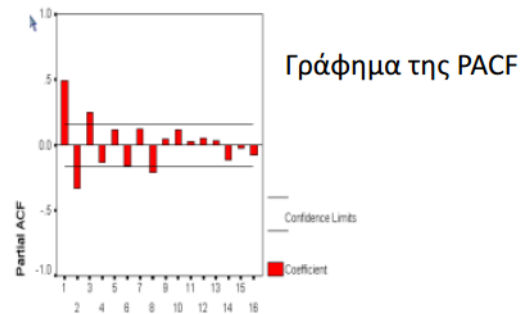
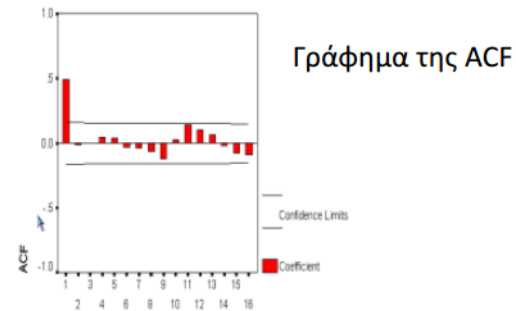
Κινούμενου μέσου μοντέλα τάξης q (MA(q))

Παράδειγμα 8: Με προσομοίωση φτιάξαμε 150 παρατηρήσεις από την MA(1)
χ.σ. $z_t = (1 + 0.8B)a_t$. Η σειρά έχει το παρακάτω γράφημα:



Παρατηρήσεις:

- ρ_1 σημαντική, ρ_k για $k > 1$ ασήμαντες
- φ_{kk} μειώνονται εκθετικά, με εναλλασσόμενο πρόσημο ($\theta_1 = -0.8 < 0$) ξεκινώντας από θετική τιμή



Συμπεριφορές

42

Πίνακας: Μορφές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης

Διαδικασία	Αυτοσυσχετίσεις ACF	Μερικές αυτοσυσχετίσεις PACF
AR(1)	Φθίνουν γεωμετρικά από ρ_1	Μηδέν μετά το ρ_{11}
AR(2)	Φθίνουν γεωμετρικά από ρ_2	Μηδέν μετά το ρ_{22}
AR (p)	Φθίνουν γεωμετρικά ή φθίνουν με ημιτονοειδή συμπεριφορά από ρ_p	Μηδέν μετά το ρ_{pp}



MA(1)	Μηδέν μετά το ρ_1	Φθίνουν γεωμετρικά μετά από ρ_{11}
MA(2)	Μηδέν μετά το ρ_2	Φθίνουν γεωμετρικά μετά από ρ_{22}
MA(q)	Μηδέν μετά το ρ_q	Φθίνουν γεωμετρικά μετά από ρ_{qq}
ARMA (1,1)	Φθίνουν γεωμετρικά από ρ_1	Φθίνουν γεωμετρικά μετά από ρ_{11}
ARMA (p,q)	Φθίνουν γεωμετρικά από ρ_q	Φθίνουν γεωμετρικά μετά από ρ_{pp}



MA(1)

$$y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta^2)$$

$$\gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) =$$

$$= E((\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2})) =$$

$$= \dots - \theta E(\varepsilon_{t-1}^2) = -\theta \sigma_\varepsilon^2$$

$$\hat{\rho}_1 = \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta^2)} =$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}$$

$$\rho_2, \rho_3, \dots = 0 \quad \gamma_{12} \text{ MA}(1)$$

ARMA

Μικτά αυτοπαλινδρομικά – κινητού μέσου
όρου μοντέλα

Μικτά αυτοπαλινδρομικά – κινητού μέσου όρου μοντέλα

- Προκειμένου να επιτευχθεί μεγαλύτερη ευελιξία στην προσαρμογή των παρατηρούμενων χρονικών σειρών είναι μερικές φορές σκόπιμο να περιληφθούν τόσο αυτοπαλινδρομικοί, όσο και κινητού μέσου όρου παράγοντες στο μοντέλο, ταυτόχρονα:

$$\bar{z}_t = \varphi_1 \bar{z}_{t-1} + \varphi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \varphi_p \bar{z}_{t-p} + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q}$$

ή ισοδύναμα:

$$\varphi(\mathbf{B})\bar{z}_t = \theta(\mathbf{B})\alpha_t$$

- Στην πράξη αποδεικνύεται ότι η παρουσίαση μόνιμων (stationary) χρονικών σειρών είτε με αυτοπαλινδρομικά μοντέλα μόνο, είτε κινητού μέσου όρου, είτε μικτής μορφής γίνεται με μοντέλα όπου τα (p) και (q) σπάνια είναι μεγαλύτερα του 2.

Σχόλιο:

47

- Σε μοντέλα ARMA, κατά τη συνήθη μορφή, χωρίς σταθερούς όρους πρέπει να έχω στάσιμες χρονοσειρές, συνήθως θεωρώ ότι επιτυγχάνεται αφαιρώντας το μέσο όσο (και διαιρώντας με την τυπική απόκλιση πολλές φορές). Επομένως δεν θεωρώ τις «πραγματικές χρονοσειρές» αλλά αφαιρώντας το μέσο όρο κλπ.
- Σε μοντέλα ARIMA η μονιμοποίηση επιτυγχάνεται με τη d τάξεως διαφορά

- Στην στατιστική ανάλυση χρονικών σειρών το αυτοπαλινδρομικό κινητού μέσου όρου μοντέλο (**AutoRegressive Moving Average - ARMA**) παρέχει την περιγραφή μίας μόνιμης (stationary) στοχαστικής διαδικασίας.
- Για μία δεδομένη χρονική σειρά, ένα μοντέλο **ARMA** αποτελεί εργαλείο για την κατανόηση της σειράς και ενδεχομένως για την πρόβλεψη μελλοντικών τιμών.
- Το μοντέλο **ARMA** πρωτοεμφανίστηκε από τον Whittle (1951) και έγινε ευρέως γνωστό από τους Box and Jenkins (1970).
- Το **ARMA** αποτελείται από δύο πολυώνυμα, ένα για την αυτοπαλινδρόμηση (**AR**) και ένα για τον κινητό μέσο όρο (**MA**).
- Το μοντέλο συνήθως αναφέρεται ως **ARMA** (p,q), όπου p είναι η τάξη της αυτοπαλινδρόμησης και q η τάξη του κινητού μέσου όρου.

Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. Almqvist and Wicksell.

Box, George and Jenkins, Gwilym (1970) *Time series analysis: Forecasting and control*, San Francisco: Holden-Day.



ARIMA

ARIMA (μετάβαση στην επομένη ενότητα)

50

- Ένα μοντέλο **ARMA**(p,q) μπορεί να εφαρμοστεί σε μία χρονική σειρά που χαρακτηρίζεται ως στάσιμη.
- Σχεδόν πάντα οι φυσικές χρονικές σειρές παρουσιάζουν μία αξιολογη τάση, περιοδικότητα ή και τα δύο.



- Η απομάκρυνσή τους επιτυγχάνεται λαμβάνοντας τις διαδοχικές διαφορές της χρονικής σειρά (d) 1^{ης}, 2^{ης} ή 3^{ης} τάξης, μέχρι, δηλαδή, η χρονική σειρά να είναι κατά προσέγγιση στάσιμη (να μην εμφανίζει δηλαδή αξιολογη τάση και περιοδικότητα). ARIMA(p,d,q)

In general, an **ARIMA** (p, d, q) process can be written as

$$\phi(B)(1 - B)^d Y_t = \theta(B)e_t.$$

- $AR(p) \longleftrightarrow ARIMA(p, 0, 0)$
- $MA(q) \longleftrightarrow ARIMA(0, 0, q)$
- $ARMA(p, q) \longleftrightarrow ARIMA(p, 0, q)$
- $ARI(p, d) \longleftrightarrow ARIMA(p, d, 0)$
- $IMA(d, q) \longleftrightarrow ARIMA(0, d, q).$

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1

Σχήματα	Αυτοσυσχέτιση	Μερική Αυτοσυσχέτιση
MA	Αιχμές σε χρονικές υστερήσεις από 1 ως q και στη συνέχεια μηδενίζεται	Σταδιακή μείωση
AR	Σταδιακή μείωση σύμφωνα με το $\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \dots + \phi_p\rho_{j-p}$	Αιχμές σε χρονικές υστερήσεις από 1 ως p και στη συνέχεια μηδενίζεται
ARMA	Ακανόνιστο σχήμα σε χρονικές υστερήσεις από 1 ως q και στη συνέχεια σταδιακή μείωση σύμφωνα με το $\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \dots + \phi_p\rho_{j-p}$	Σταδιακή μείωση