ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
Βλάσιος Χρυσάνθου (Καθηγητής)
67100 Ξάνθη

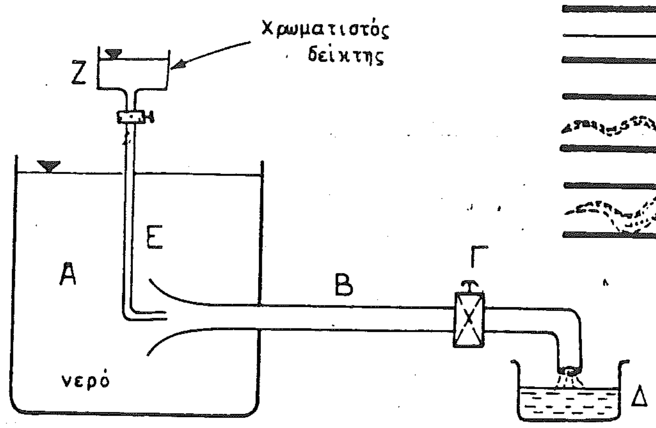
ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ
ΒΑΣΕΙ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ κ. Γ. ΤΕΡΖΙΔΗ

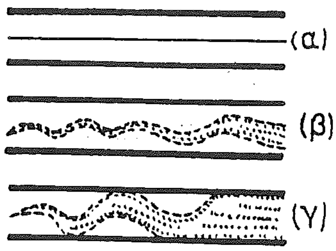
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2013

ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ

Στρωτή και τυρβώδης ροή

Συσκευή Reynolds





Αριθμός Reynolds : $\boxed{Re = \dfrac{U \cdot D}{\nu}}$

U : μέση ταχύτητα ροής

D : διάμετρος

ν : συντελεστής κινηματικού ιξώδους

Σχ. (α) : στρωτή ή παράλληλη ροή για $Re < 2000$

Σχ. (γ) : τυρβώδης ροή για $Re > 50000$

Σχ. (β) : μεταβατική κατάσταση για $2000 < Re < 50000$

$$\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$$ ⇒ για στρωτή ροή

τ : διατμητική τάση

μ : συντελεστής δυναμικού ιξώδους

$\dfrac{du}{dy}$: βαθμίδα ταχύτητας

$$\boxed{\bar{\tau} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy}}$$ ⇒ για πλήρως τυρβώδη ροή

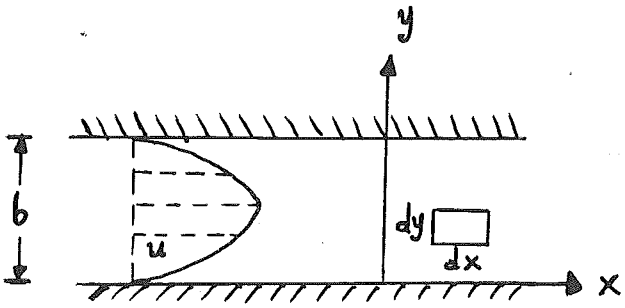
$\bar{\tau}$: μέση τιμή της διατμητικής τάσης

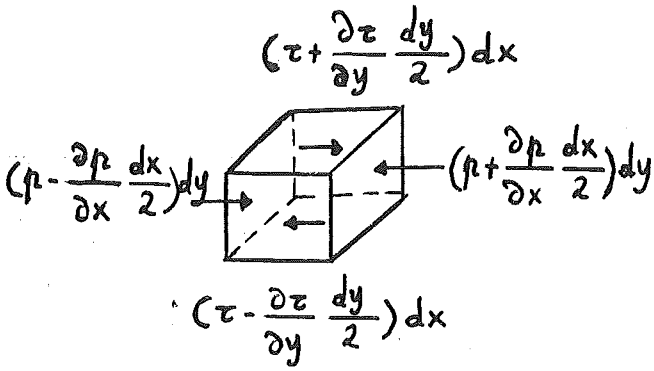
η : δυναμικός συντελεστής τυρβώδους

$\frac{d\bar{u}}{dy}$: βαθμίδα της μέσης σημειακής ταχύτητας

$$\boxed{\bar{\tau} = (\mu + \eta) \frac{d\bar{u}}{dy}}$$ ⇒ για τη μεταβατική κατάσταση (J. Boussinesq)

Σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών





- Απειροστός όγκος νερού $(dx)\cdot(dy)\cdot(1)$
- Νόμος διατήρησης της ποσότητας κίνησης:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx - \left(\tau - \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad \tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2$$

Υπολογισμός των σταθερών ολοκληρώσεως C_1 και C_2:

$u = 0$, όταν $y = 0$ και $y = b$

$$C_2 = 0 \qquad C_1 = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b$$

$$\boxed{u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(by - y^2)}$$

- Παραβολική κατανομή της ταχύτητας

$$\boxed{u_{max} \quad \text{για} \quad y = \frac{b}{2}}$$

$$u_{max} = -\frac{b^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$q = \int_0^b u\,dy = \int_0^b -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(by - y^2)\,dy = -\frac{b^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}.$$

Μέση ταχύτητα ροής: (V)

$$V = \frac{q}{b} = -\frac{b^2}{12\mu}\frac{dp}{dx} \qquad \boxed{V = \frac{2}{3}u_{max}}$$

Πτώση πιέσεως μεταξύ δύο σημείων 1 και 2:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\frac{12\mu V}{b^2}\int_{x_1}^{x_2} dx \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = -\frac{12\mu V}{b^2}(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{12\mu V L}{b^2}} \qquad L = x_2 - x_1$$

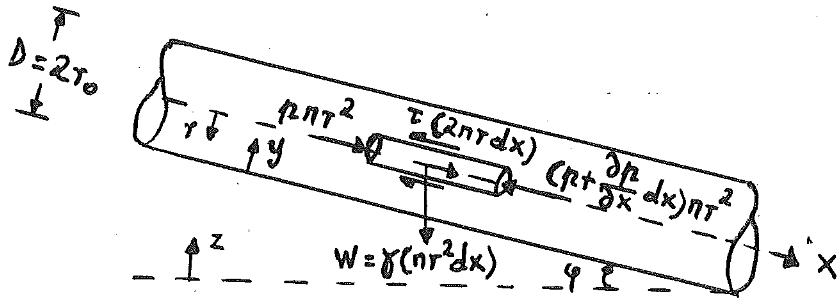
Κατανομή διατμητικής τάσης: $\tau(y)$

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = \mu\frac{d}{dy}\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(by - y^2)\right]$$

$$\tau = -\frac{dp}{dx}\left(\frac{b}{2} - y\right)$$

για $y = \frac{b}{2}$	$\tau = 0$
για $y = 0$	$\tau_{max} = -\frac{dp}{dx}\frac{b}{2}$
για $y = b$	$\tau_{max} = \frac{dp}{dx}\frac{b}{2}$

Σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα



Κατανομή διατμητικής τάσης $\tau(r)$

Νόμος διατήρησης της ποσότητας κίνησης:

$$p\pi r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\pi r^2 - \tau(2\pi r dx) + \gamma(\pi r^2 dx)\eta\mu\varphi = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{r}{2} - \tau + \gamma\frac{r}{2}\eta\mu\varphi = 0 \qquad \eta\mu\varphi = -\frac{dz}{dx}$$

$$\tau = -\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dx} + \frac{dz}{dx}\right)r$$

$$\tau = -\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)r \qquad \boxed{\tau = -\frac{\gamma}{2}\frac{dh}{dx}r}$$

$$h = \frac{p}{\gamma} + z$$: πιεζομετρικό ύψος ή φορτίο

Κατανομή ταχύτητας $u(r)$

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = \mu\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy} = -\mu\frac{du}{dr} \qquad r = r_0 - y \qquad \frac{dr}{dy} = -1$$

$$\mu\frac{du}{dr} = \frac{\gamma}{2}\frac{dh}{dx}r \quad \Rightarrow \quad du = \frac{\gamma}{2\mu}\frac{dh}{dx}r\,dr$$

$$u = \frac{\gamma}{4\mu}\frac{dh}{dx}r^2 + C$$

C: σταθερά ολοκληρώσεως

Προσδιορισμός της C_1:

$u = 0$ όταν $r = r_0$

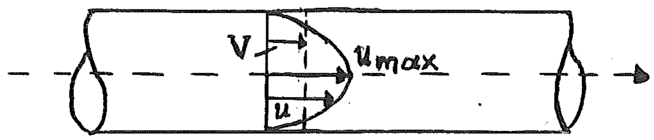
$$C_1 = -\frac{\gamma}{4\mu}\frac{dh}{dx} r_0^2$$

$$\boxed{u = -\frac{\gamma}{4\mu}\frac{dh}{dx}(r_0^2 - r^2)}$$ παραβολική κατανομή

Μέγιστη τιμή ταχύτητας:

$$u_{max} = -\frac{\gamma}{4\mu}\frac{dh}{dx} r_0^2 \qquad \text{για } r = 0$$

$$u = u_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$



Μέση τιμή ταχύτητας:

$$V = \frac{Q}{E} = \frac{Q}{\pi r_0^2}$$

$$V = \frac{1}{\pi r_0^2}\int u\,dE = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\left[-\frac{\gamma}{4\mu}\frac{dh}{dx}(r_0^2 - r^2)\right] 2\pi r\,dr$$

$$V = -\frac{\gamma}{8\mu}\frac{dh}{dx} r_0^2$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2}u_{max}}$$

Απώλεια πιεζομετρικού ύψους:

$$-dh = \frac{8\mu V}{\gamma r_0^2}\,dx$$

$$-(h_2-h_1) = \frac{8\mu V}{\gamma r_0^2}(x_2-x_1)$$

$$x_2-x_1 = L \qquad r_0 = \frac{D}{2}$$

$$h_1-h_2 = \frac{32\rho\nu V}{\rho g D^2}L = \frac{64\nu}{VD}\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2g}$$

$$\boxed{h_1-h_2 = \frac{64}{Re}\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2g}} \qquad Re = \frac{VD}{\nu}$$

Απώλειες ενέργειας λόγω τριβής: (h_f)

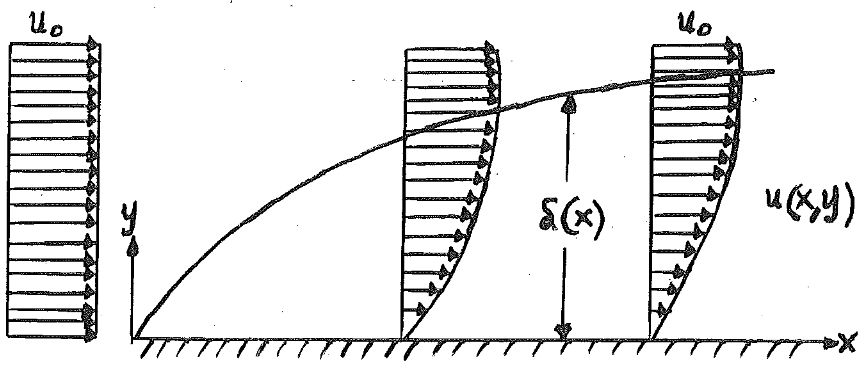
$$\boxed{h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2g}}$$ Εξίσωση Darcy-Weisbach

f: συντελεστής τριβής

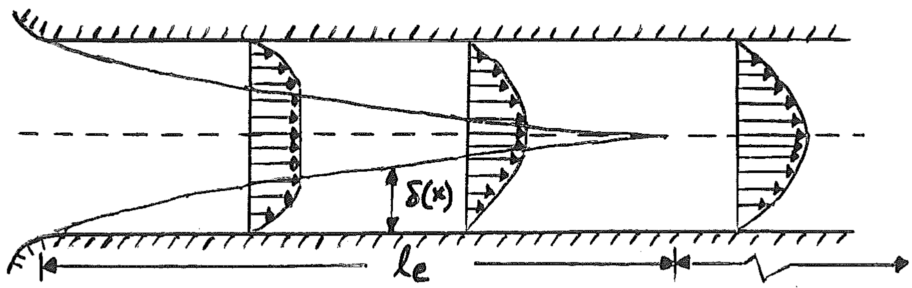
$$f = \frac{64}{Re}$$ για σταθερή στρωτή ροή

Θεωρία οριακών στιβάδων

Οριακή στιβάδα πάνω σε στερεή επιφάνεια



Οριακές στιβάδες σε κλειστό αγωγό



Στρωτή οριακή στιβάδα:

$$\boxed{l_e = 0.065 \cdot Re \cdot D}$$ (Boussinesq)

l_e : μήκος εισροής

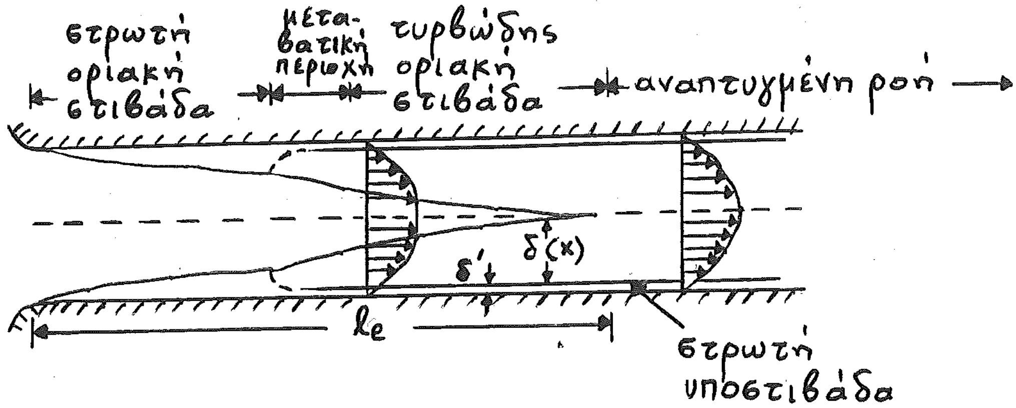
D : διάμετρος αγωγού

$Re = \dfrac{VD}{\nu}$: αριθμός Reynolds

V : μέση ταχύτητα ροής

ν : συντελεστής κινηματικού ιξώδους

Οριακές στιβάδες σε κλειστό αγωγό για τυρβώδη ροή



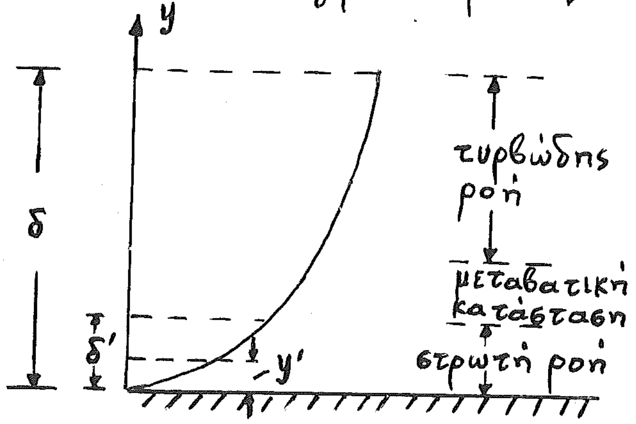
$$Re_x = \frac{Vx}{\nu}$$

x : απόσταση από την αρχή του αγωγού

- για $Re_x = 2300$ μετατροπή της στρωτής οριακής στιβάδας σε τυρβώδη

Κατανομή της ταχύτητας για τυρβώδη ροή και λεία τοιχώματα

(στην περιοχή της αναπτυγμένης ροής)



Κατανομή ταχύτητας στη στρωτή υποστιβάδα

- $\dfrac{du}{dy}$: σταθ. στη στρωτή υποστιβάδα (παραδοχή)

- $\tau_o = \mu \dfrac{du}{dy} \Rightarrow u = \dfrac{\tau_o}{\mu} y + C_1$ C_1: σταθερά ολοκληρώσεως

- οριακή συνθήκη : $u = 0$, όταν $y = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

- $u = \dfrac{\tau_o}{\mu} y = \dfrac{\tau_o}{\rho} \dfrac{y}{\nu}$

- $\boxed{u_* = \sqrt{\dfrac{\tau_o}{\rho}}}$: διατμητική ταχύτητα ή ταχύτητα τριβής

- $\boxed{\dfrac{u}{u_*} = \dfrac{u_* y}{\nu}}$ u γραμμική συνάρτηση του y

- Πάχος της στρωτής υποστιβάδας : $\delta' = \dfrac{11.6\,\nu}{u_*}$

Κατανομή ταχύτητας σε τυρβώδη ροή

$$\tau = \rho \left(l \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

l : μήκος αναμίξεως του Prandtl
(απόσταση κατά την οποία σωματίδια ρευστού μιας τυρβώδους ροής κινούμενα εγκάρσια προς την κύρια διεύθυνση ροής, διατηρούν την αρχική τους ποσότητα κινήσεως)

$l = ky$ κοντά στο στερεό τοίχωμα $(\tau = \tau_o)$

$k = 0.4$, σταθερά του v. Kármán

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_* = 0.4\, y \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$d\bar{u} = 2.5\, u_* \frac{dy}{y} \Rightarrow \bar{u} = 2.5\, u_* \ln y + C$$

Οριακή συνθήκη: $u=0$, όταν $y=y' \Rightarrow C = -2.5 u_* \ln y'$

$$\bar{u} = 2.5\, u_* \ln \frac{y}{y'}$$

$$\boxed{\bar{u} = 5.75\, u_* \log \frac{y}{y'}}$$

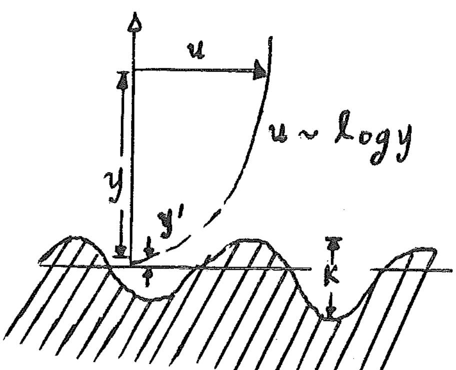
Τυρβώδης ροή σε λεία τοιχώματα

$$y' = \frac{\delta'}{107} = \frac{0.108\,\nu}{u_*} \quad \text{(από πειράματα)}$$

δ' : πάχος στρωτής υποστιβάδας

$$\boxed{\frac{u}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{u_* y}{\nu}\right) + 5.5}$$

Τυρβώδης ροή σε τραχέα τοιχώματα



$$y' = \frac{k}{30} \quad \text{(για } k > 10\delta' \text{, πειραματικά)}$$

$$\boxed{\frac{u}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{y}{k}\right) + 8.5}$$

- Kármán - Prandtl
- Πειράματα Nikuradse

Κατανομή ταχύτητας για τυρβώδη ροή σε σωλήνες

$$y = r_0 - r$$

r_0 : ακτίνα του σωλήνα

Για σωλήνες με λεία τοιχώματα:

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log\left[\frac{u_*(r_0 - r)}{\nu}\right] + 5.5$$

Για σωλήνες με τραχέα τοιχώματα:

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{r_0 - r}{k}\right) + 8.5$$

Μέση ταχύτητα V:

$$V = \frac{Q}{E_0} = \frac{1}{E_0} \int u\, dE$$

Για λεία τοιχώματα:

$$V = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u_* \left[2.5 \ln\left(\frac{u_*(r_0 - r)}{\nu}\right) + 5.5\right] 2\pi r\, dr$$

$$V = u_* \left[2.5 \ln\left(\frac{u_* r_0}{\nu}\right) + 1.75\right]$$

$$\boxed{\frac{V}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{u_* r_0}{\nu}\right) + 1.75}$$

Για τραχέα τοιχώματα:

$$V = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u_* \left[2.5 \ln\left(\frac{r_0 - r}{k}\right) + 8.5\right] 2\pi r\, dr$$

$$\boxed{\frac{V}{u_*} = 5.75 \log\frac{r_0}{k} + 4.75}$$

$$\frac{u - V}{u_*} = 5.75 \log\left(\frac{y}{r_0}\right) + 3.75$$

⇒ ανεξάρτητη από την τραχύτητα τοιχωμάτων

Συντελεστής τριβής f των Darcy-Weisbach

$$\tau_o = C_f \frac{\rho v_o^2}{2}$$ (θεωρία οριακής στιβάδας)

τ_o : διατμητική τάση στο στερεό τοίχωμα

v_o : μέση ομοιόμορφη ταχύτητα εκτός οριακής στιβάδας

C_f : συντελεστής αντιστάσεως (αδιάστατος)

$$\tau_o = \frac{f}{4}\left(\frac{\rho V^2}{2}\right) = \frac{f\rho V^2}{8}$$

f : συντελεστής τριβής των Darcy-Weisbach

V : μέση ταχύτητα ροής

f : συνάρτηση των $Re \left(= \frac{VD}{\nu}\right)$, $\frac{k}{D}$, γεωμετρίας αγωγού

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = V\sqrt{\frac{f}{8}} = \frac{V\sqrt{f}}{2.83}$$

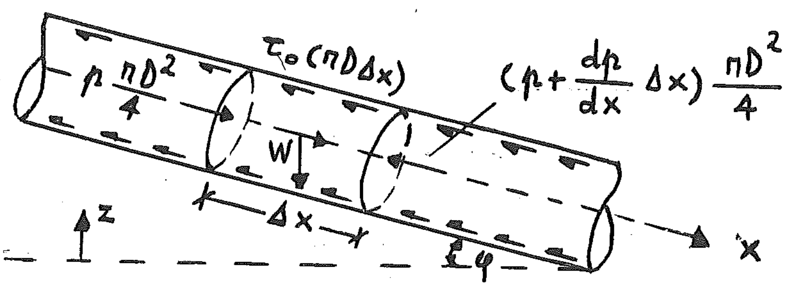
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0.91$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0.8}$$ τυρβώδης ροή, λεία τοιχώματα

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log\left(\frac{r_o}{k}\right) + 1.68 \qquad \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{r_o}{k}\right) + 1.74$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{k} + 1.14 = -2 \log\left(\frac{k}{D}\right) + 1.14}$$ τυρβώδης ροή, τραχέα τοιχώματα

Εξίσωση των Darcy-Weisbach



Νόμος διατήρησης ποσότητας κίνησης:

$$p\frac{\pi D^2}{4} - \left(p + \frac{dp}{dx}\Delta x\right)\frac{\pi D^2}{4} + \gamma\left(\frac{\pi D^2}{4}\Delta x\right)\eta\mu\varphi - \tau_o \pi D \Delta x = 0$$

$$-\frac{dp}{dx}\frac{D}{4} + \frac{\gamma D}{4}\eta\mu\varphi - \tau_o = 0 \qquad \eta\mu\varphi = -\frac{dz}{dx}$$

$$\tau_o = -\frac{\gamma D}{4}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dx} + \frac{dz}{dx}\right)$$ $\gamma = \rho g$: σταθ. (ασυμπίεστα ρευστά)

$$\tau_o = -\frac{\gamma D}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = -\frac{\gamma D}{4}\frac{dh}{dx}$$

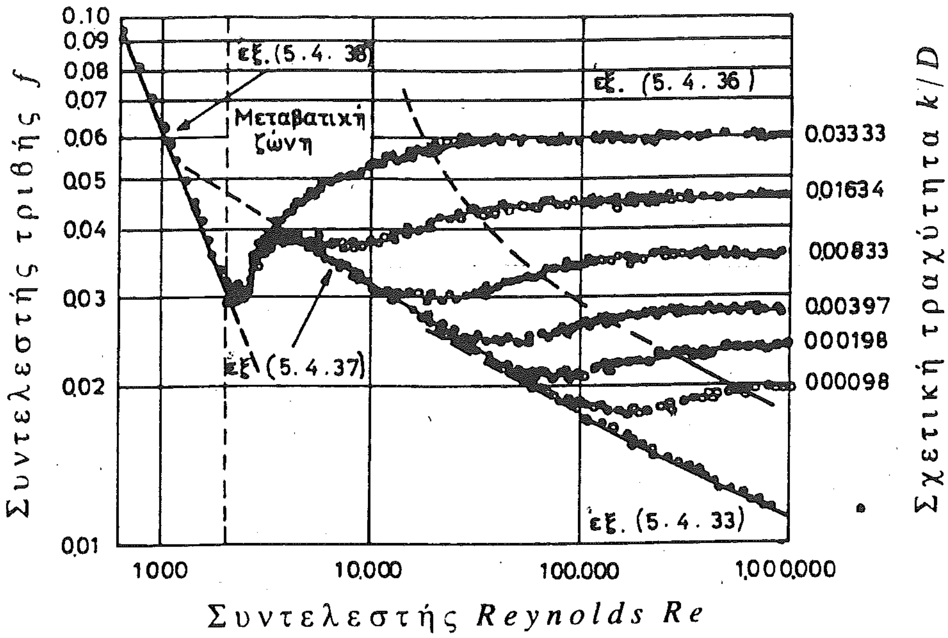
$h = \frac{p}{\gamma} + z$: πιεζομετρικό ύψος ή φορτίο

$$-\frac{\gamma D}{4}\frac{dh}{dx} = \frac{f\rho V^2}{8} \Rightarrow -dh = f\frac{V^2}{2gD}dx$$

$$-(h_2 - h_1) = f\frac{V^2}{2gD}(x_2 - x_1) \qquad L = x_2 - x_1$$

$$h_1 - h_2 = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow \boxed{h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}}$$ Εξίσωση Darcy-Weisbach

h_f : ύψος απωλειών εξαιτίας τριβής



α) Για $Re < 2000$ ⇒ στρωτή ροή, $\boxed{f = \frac{64}{Re}}$

β) Για $6000 < Re < 80000$ ⇒ $\boxed{f = \frac{0.316}{Re^{1/4}}}$ (Blasius)

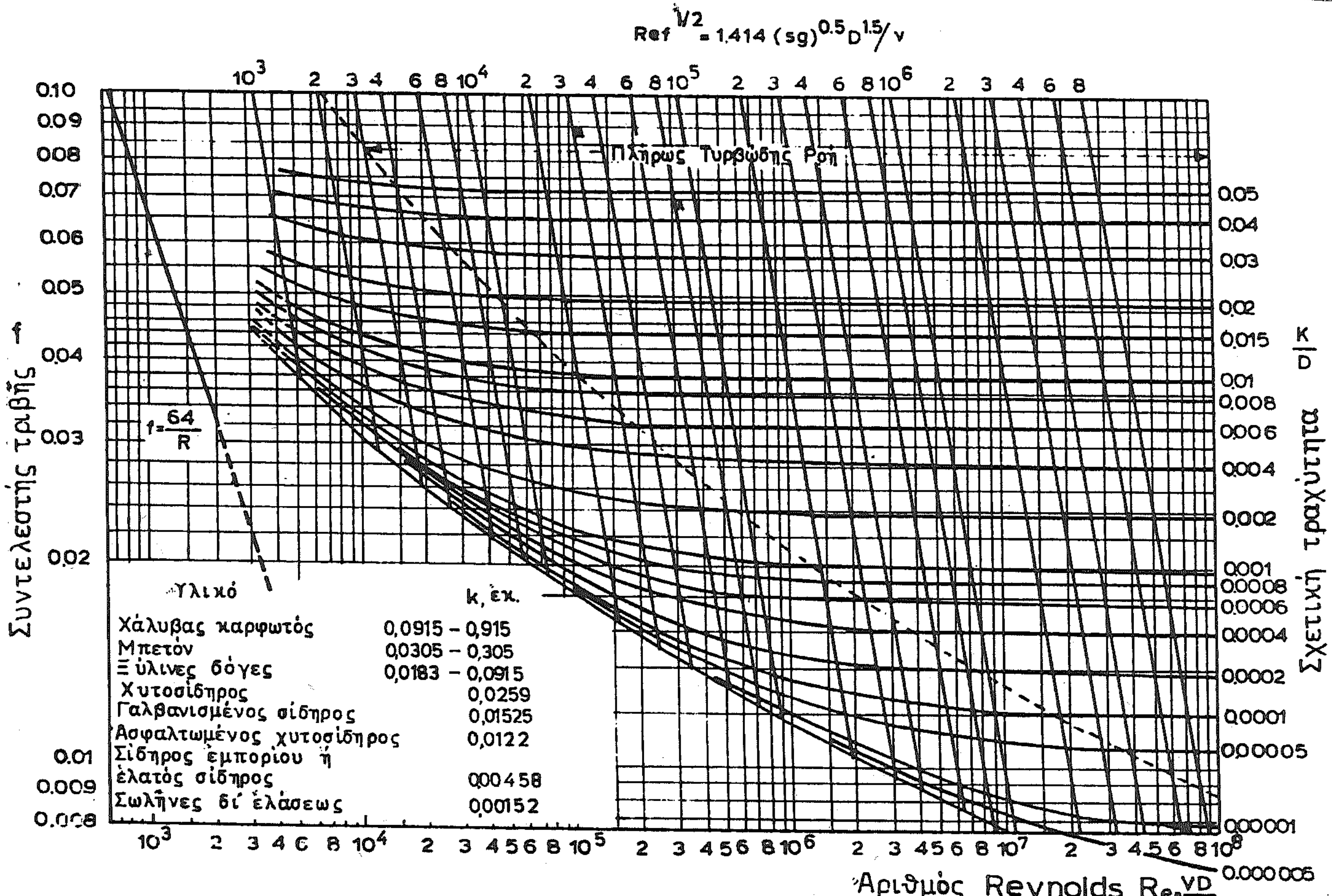
γ) Για $Re > 80000$ ⇒ Εξίσωση πλήρως τυρβώδους ροής σε αγωγό με λεία τοιχώματα,
f : συνάρτηση του Re

δ) Εξίσωση πλήρως τυρβώδους ροής σε αγωγό με τραχέα τοιχώματα,
f : συνάρτηση του K/D

ε) Μεταβατική ζώνη ανάμεσα στις γ και δ καθώς και στις β και δ :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} + 2\log\frac{K}{D} = 1.14 - 2\log\left(1 + 9.35\,\frac{D/K}{Re\sqrt{f}}\right)}$$

(Colebrook και White)



Σχ. Α Διάγραμμα *Moody (Daily-Harleman 1966)*

Επίλυση προβλημάτων σε σωληνωτούς αγωγούς υπό πίεση

- Σταθερή (μόνιμη) ροή
- Ασυμπίεστα ρευστά (ρ = σταθ.)

α) Εξίσωση συνέχειας

$$Q = E \cdot V = \frac{\pi D^2}{4} V$$

β) Εξίσωση κίνησης Darcy-Weisbach

$$h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

γ) Συναρτησιακή εξίσωση τριβής

$$f = f\left(Re, \frac{k}{D}, \text{σχήμα}, \text{μέγεθος}\right)$$

Διάγραμμα Moody

- 8 άγνωστα μεγέθη: $h_f, f, L, D, V, Q, \nu, k$
- 3 εξισώσεις
- 5 μεταβλητές: γνωστές

Υπολογισμός της απώλειας φορτίου

- Ζητείται : h_f
- Δίδονται : Q ή V, D, L, k, ν
- Υπολογίζουμε : $\frac{k}{D}$, $Re = \frac{VD}{\nu}$
- Διάγραμμα Moody : f
- $h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$

Αριθμητικό παράδειγμα

- Σωληνωτός αγωγός από χυτοσίδηρο ⇒ $k = 0.000259$ m
- $D = 0.2032$ m, $L = 1000$ m
- $Q = 0.13\ m^3/s$, $\nu = 1.01 \times 10^{-6}\ m^2/s$ (20° C)
- $h_f = ;$ (απώλεια λόγω τριβών στον αγωγό)

Λύση

- $\frac{k}{D} = \frac{0.000259}{0.2032} = 0.001275$
- $V = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4 \times 0.13}{3.14 \times 0.2032^2} = 4\ m/s$
- $Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4 \times 0.2032}{1.01 \times 10^{-6}} = 8.05 \times 10^5$
- Διάγραμμα Moody ⇒ $f = 0.0205$
- $h_f = 0.0205 \times \frac{1000}{0.2032} \times \frac{4^2}{2 \times 9.81} = 82.3$ m

Υπολογισμός παροχής

- Ζητείται : Q
- Δίδονται : h_f, ν, D, L, k

α) Δοκιμές

- Δεχόμαστε μια "λογική" τιμή του f
- Εξίσωση Darcy-Weisbach ⇒ V ⇒ Re
- Re, k/D ⇒ Διάγραμμα Moody ⇒ f
- Επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας, έως ότου δύο διαδοχικές τιμές του f να μη διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους ⇒ τελευταία τιμή του V
- Εξίσωση συνέχειας ⇒ Q

β) Κατ' ευθείαν υπολογισμός

- Εξίσωση Darcy-Weisbach ⇒ $V = \left(\frac{2 g h_f}{L}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{D}{f}\right)^{1/2}$
- $Re f^{1/2} = \frac{VD}{\nu} f^{1/2} = \frac{D^{3/2}}{\nu} \left(\frac{2 g h_f}{L}\right)^{1/2}$
- $Re f^{1/2}$: επιπλέον κλίμακα στο διάγραμμα Moody

Βήματα υπολογισμού:

- k/D, $Re f^{1/2}$
- διάγραμμα Moody ⇒ f
- Εξίσωση Darcy-Weisbach ⇒ V
- Εξίσωση συνέχειας ⇒ Q

Αριθμητικό παράδειγμα (υπολογισμού Q)

- $\nu = 1.01 \times 10^{-6}\ m^2/s$ (20° C)
- $D = 0.305\ m$, $L = 305\ m$, $K = 0.00305\ m$ (καρφωτός χάλυβας)
- $h_f = 6.1\ m$
- $Q = ;$

Λύση με δοκιμές

- $K/D = 0.00305/0.305 = 0.01$
- παραδεχόμαστε $f = 0.04$
- Εξίσωση Darcy-Weisbach : $6.1 = 0.04 \times \dfrac{305}{0.305} \times \dfrac{V^2}{2 \times 9.81} \Rightarrow$

  $V = 1.73\ m/s$
- $Re = \dfrac{1.73 \times 0.305}{1.01 \times 10^{-6}} = 5.22 \times 10^5$
- $K/D = 0.01$, $Re = 5.22 \times 10^5 \Rightarrow$ διάγρ. Moody $\Rightarrow f = 0.038$
- Εξίσ. Darcy-Weisbach : $6.1 = 0.038 \times \dfrac{305}{0.305} \times \dfrac{V^2}{2 \times 9.81} \Rightarrow$

  $V = 1.774\ m/s$
- $Re = \dfrac{1.774 \times 0.305}{1.01 \times 10^{-6}} = 5.35 \times 10^5$
- $K/D = 0.01$, $Re = 5.35 \times 10^5 \Rightarrow$ διάγρ. Moody $\Rightarrow f = 0.038$
- $V = 1.774\ m/s$
- $Q = \dfrac{3.14 \times 0.305^2}{4} \times 1.774 = 0.129\ m^3/s$

Λύση με κατευθείαν υπολογισμό

- $k/D = 0.01$
- $Re f^{1/2} = \frac{D^{3/2}}{\nu}\left(\frac{2g h_f}{L}\right)^{1/2} = \frac{0.305^{3/2}}{1.01\times10^{-6}}\left(\frac{19.62\times6.1}{305}\right)^{1/2} = 1.045\times10^{5}$
- διάγραμμα Moody $\Rightarrow f = 0.038$
- $V = \left(\frac{2g h_f}{L}\right)^{1/2}\left(\frac{D}{f}\right)^{1/2} = \left(\frac{19.62\times6.1}{305}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{0.305}{0.038}\right)^{1/2} = 1.774 \text{ m/s}$
- $Q = \frac{\pi D^2}{4} V = \frac{3.14\times0.305^2}{4}\times1.774 = 0.129 \text{ m}^3/\text{s}$

Υπολογισμός διαμέτρου

- Ζητείται : D
- Δίδονται : k, L, ν, Q, h_f

α) Δοκιμές

- Παραδεχόμαστε μια τιμή για τη διάμετρο D
- Εξίσ. συνέχειας $\Rightarrow V \Rightarrow Re$, k/D
- διάγρ. Moody $\Rightarrow f$
- Εξίσ. Darcy-Weisbach $\Rightarrow h_f$
- Σύγκριση του υπολογισθέντος h_f με το δεδομένο h_f
- Επανάληψη της ανωτέρω διαδικασίας μέχρις ότου το υπολογισθέν h_f να συμφωνεί με το δεδομένο h_f, αφού προηγουμένως εκλεγεί η κατάλληλη τιμή για το D.

β) <u>Κατευθείαν υπολογισμός</u>

- $h_f = f\dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g} = f\dfrac{L}{D}\dfrac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} = f\dfrac{8LQ^2}{g\pi^2 D^5} \Rightarrow$

- $D = \left(\dfrac{8LQ^2}{g\pi^2 h_f}\right)^{1/5} f^{1/5} = N f^{1/5}$, όπου $\boxed{N = \left(\dfrac{8LQ^2}{g\pi^2 h_f}\right)^{1/5}}$

- $Re\, f^{1/5} = \dfrac{VD}{\nu} f^{1/5} = \dfrac{4Q}{\pi\nu D} f^{1/5} = \dfrac{M}{D} f^{1/5}$, όπου $\boxed{M = \dfrac{4Q}{\pi\nu}}$

- $\boxed{Re\, f^{1/5} = \dfrac{M}{N} = \dfrac{4}{\nu}\left(\dfrac{g h_f Q^3}{8\pi^3 L}\right)^{1/5}}$ ⇒ επιπλέον κλίμακα στο διάγραμμα Moody

<u>Βήματα υπολογισμού</u>

- Υπολογισμός των N, M και $Re f^{1/5}$
- Για αγωγό με <u>λεία τοιχώματα</u>: σημείο τομής της κεκλιμένης ευθείας της κλίμακας $Re f^{1/5}$ με την καμπύλη των λείων σωλήνων (διάγρ. Moody) ⇒ f
- $D = N f^{1/5}$

- Για αγωγό με <u>τραχέα τοιχώματα</u> παραδεχόμαστε μια μέση "λογική" τιμή του f, π.χ. f = 0.03
- $D = N f^{1/5}$
- $Re = M/D$
- k/D
- Re, k/D ⇒ διάγρ. Moody ⇒ f
- Επανάληψη της ανωτέρω διαδικασίας μέχρις ότου δύο διαδοχικές τιμές του f δεν διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους. Τελευταία τιμή της D

Αριθμητικό παράδειγμα (υπολογισμού D)

$\nu = 1.01 \times 10^{-6}\ m^2/s$ (20°C)

$L = 1520\ m$

$h_f = 15.2\ m$

$k = 0.000915\ m$ (καρφωτός χάλυβας)

$Q = 2.84\ m^3/s$

$D = ;$

Λύση με δοκιμές

- Παραδεχόμαστε $D = 1m$ (σχετικά μεγάλη παροχή)

- $\frac{k}{D} = \frac{0.000915}{1} = 0.000915$

- $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 2.84}{3.14 \times 1^2} = 3.62\ m/s$

- $Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.62 \times 1}{1.01 \times 10^{-6}} = 3.58 \times 10^6$

- διάγρ. Moody $\Rightarrow f = 0.0195$

- $h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2g} = 0.0195 \times \frac{1520}{1} \times \frac{3.62^2}{19.62} = 19.8\ m$

- $19.8 > 15.2\ m \Rightarrow D > 1.0\ m$

- $D = 1.2\ m$

- $k/D = 0.000915/1.2 = 0.000763$

- $V = \frac{4 \times 2.84}{3.14 \times 1.2^2} = 2.51\ m/s$

- $Re = \frac{2.51 \times 1.2}{1.01 \times 10^{-6}} = 2.98 \times 10^6$

- διάγρ. Moody $\Rightarrow f = 0.019$

- $h_f = 0.019 \times \dfrac{1520}{1.2} \times \dfrac{2.51^2}{19.62} = 7.73\ m$
- $7.73 < 15.2\ m \Rightarrow 1.0\ m < D < 1.2\ m$
- Παραδεχόμαστε $D = 1.05\ m$
- $k/D = 0.000915/1.05 = 0.000871$
- $V = \dfrac{4 \times 2.84}{3.14 \times 1.05^2} = 3.28\ m/s$
- $Re = \dfrac{3.28 \times 1.05}{1.01 \times 10^{-6}} = 3.41 \times 10^6$
- διάγρ. Moody $\Rightarrow f = 0.0193$
- $h_f = 0.0193 \times \dfrac{1520}{1.05} \times \dfrac{3.28^2}{19.62} = 15.32\ m$
- $15.32\ m \simeq 15.2\ m$
- $D = 1.068\ m$ (η αμέσως μεγαλύτερη διάμετρος που υπάρχει στο εμπόριο)

Λύση με βελτιωμένη μέθοδο δοκιμών

$\nu = 1.01 \times 10^{-6}\ m^2/s$ $\quad k = 0.000915\ m$

$L = 1520\ m$ $\quad Q = 2.84\ m^3/s$

$h_f = 15.2\ m$

στήλη (1)	(2)	(3)	(4)
$N = \left(\dfrac{8LQ^2}{\pi^2 g h_f}\right)^{1/5}$	$M = \dfrac{4Q}{\pi \nu}$	$Re\, f^{1/5} = \dfrac{M}{N}$	Δοκιμαστικό f
2,32	$3{,}58 \times 10^6$	$1{,}545 \times 10^6$	0,03 0,019 0,0193
συνέχεια στήλη (5)	(6)	(7)	(8)
Διάμετρος $D = N f^{1/5}$	$Re = \dfrac{M}{D}$	$\dfrac{k}{D}$	από το Σχ. Β f
1,15 1,05 1,053	$3{,}11 \times 10^6$ $3{,}41 \times 10^6$ $3{,}40 \times 10^6$	$7{,}95 \times 10^{-4}$ $8{,}7 \times 10^{-4}$ $8{,}68 \times 10^{-4}$	0,019 0,0193 0,0193
Η αμέσως μεγαλύτερη διάμετρος εμπορίου : $D = 1{,}068\ m = 3{,}5$ πόδια			

Επίλυση προβλημάτων σε ανοικτούς αγωγούς με τα διαγράμματα Moody

- Εξίσωση Darcy-Weisbach για ανοικτούς αγωγούς:

$$\boxed{h_f = f\,\frac{L}{4R}\,\frac{V^2}{2g}}$$

R : υδραυλική ακτίνα

- Για σωληνωτούς αγωγούς $R = \dfrac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = \dfrac{D}{4}$

- $Re = \dfrac{V(4R)}{\nu}$

- $\dfrac{k}{D} = \dfrac{k}{4R}$

- $f = f\left(Re, \dfrac{k}{D}\right.$, σχήμα υγρής διατομής)

- $R \cong$ ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου

- $$V = \left(\frac{8g}{f}\right)^{1/2}\left(R\cdot\frac{h_f}{L}\right)^{1/2}$$

Εάν $f =$ σταθ., τότε $C = \left(\dfrac{8g}{f}\right)^{1/2} =$ σταθ.

Για ομοιόμορφη ροή $S = \dfrac{h_f}{L} = S_o =$ κλίση πυθμένα

$$\boxed{V = C\,(R\cdot S)^{1/2}} \qquad \text{Chézy}$$

C : συντελεστής τραχύτητας κατά Chézy

- για πλήρως τυρβώδη ροή σε τραχέα τοιχώματα

$$\boxed{V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}}$$ Manning

$$C = \left(\frac{8g}{f}\right)^{1/2} = \frac{1}{n} R^{1/6}$$

- για πλήρως τυρβώδη ροή σε τραχέα τοιχώματα
- Εξίσωση Darcy-Weisbach : για λεία τοιχώματα

Τύποι προβλημάτων:

α) Ζητείται η κλίση του πυθμένα S_o (ή η απώλεια φορτίου)
Δίδονται : Q, L, ν, k, γεωμετρία της διατομής (μέγεθος, σχήμα)

β) Ζητείται η ταχύτητα V και η παροχή Q
Δίδονται : S_o, L, ν, k, γεωμετρία της διατομής

γ) Ζητείται η υδραυλική ακτίνα R (για δεδομένο σχήμα)
Δίδονται : S_o, L, ν, k, Q

$$Re \cdot f^{1/2} = \frac{D^{3/2}}{\nu}\left(\frac{2g h_f}{L}\right)^{1/2} = \frac{8R^{3/2}}{\nu}(2gS)^{1/2} \qquad (D = 4R)$$

Αριθμητικό παράδειγμα

- Ορθογώνια ανοικτή διώρυγα πλάτους $b = 3.05$ m
- $k = 0.000305$ m , $n = 0.012$ (σκυρόδεμα) $[s/m^{1/3}]$
- $S_o = 0.001$
- $\nu = 1.133 \times 10^{-6}$ m^2/s ($15.6°$ C)
- Βάθος ροής $d = 1.22$ m

- Ζητείται η παροχή Q α) με την εξίσωση Manning και β) με την εξίσωση Darcy-Weisbach

Λύση

α) - Υγρή διατομή: $A = b \times d = 3.05 \times 1.22 = 3.72\ m^2$

- Βρεχόμενη περίμετρος: $P = b + 2d = 3.05 + (2 \times 1.22) = 5.49\ m$

- Υδραυλική ακτίνα: $R = A / P = 3.72 / 5.49 = 0.678\ m$

- $V = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} = \frac{1}{0.012} \times 0.678^{2/3} \times 0.001^{1/2} = 2.03\ m/s$

- $Q = A \cdot V = 3.72 \times 2.03 = 7.55\ m^3/s$

β) - $Re f^{1/2} = \frac{8R^{3/2}}{\nu} \times (2gS_o)^{1/2} = \frac{8 \cdot 0.678^{3/2}}{1.133 \times 10^{-6}} \times (2 \times 9.81 \times 0.001)^{1/2} = 5.52 \times 10^5$

- $\frac{K}{4R} = \frac{0.000305}{4 \times 0.678} = 0.000112$

- διάγρ. Moody $\Rightarrow f = 0.0125$

- $V = \left(\frac{8gRS_o}{f}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 9.81 \times 0.678 \times 0.001}{0.0125}\right)^{1/2} = 2.06\ m/s$

- $Q = A \cdot V = 3.72 \times 2.06 = 7.66\ m^3/s$

Γήρανση αγωγών

$$\boxed{k = k_o + at}$$ Colebrook, White

k_o : τραχύτητα για καινούργιο αγωγό

k : τραχύτητα μετά t χρόνια

a : συντελεστής (πειραματικά)

Αριθμητικό παράδειγμα

- Αγωγός από χυτοσίδηρο ηλικίας 10 ετών
- $D = 0.4064$ m, $Q = 0.15\ m^3/s$, $h_f = 4.5$ m για $L = 1000$ m
- $\nu = 1.01 \times 10^{-6}\ m^2/s$
- Ζητείται h_f για $Q = 0.19\ m^3/s$ σε ηλικία 20 ετών

Λύση

- Εξισ. Darcy-Weisbach : $h_f = 0.083 \dfrac{fLQ^2}{D^5} \Rightarrow$

$$f = \frac{h_f D^5}{0.083\ LQ^2} = \frac{4.5 \times 0.4064^5}{0.083 \times 1000 \times 0.15^2} = 0.0267$$

- $Re = \dfrac{VD}{\nu} = \dfrac{4Q}{\pi D \nu} = \dfrac{4 \times 0.15}{3.14 \times 0.4064 \times 1.01 \times 10^{-6}} = 4.65 \times 10^5$

- Διάγρ. Moody $\Rightarrow$ $\dfrac{k_{10}}{D} = 0.0029$ $\Rightarrow k_{10} = 0.0029 \times 0.4064 = 0.0012$ m

- $a = \dfrac{k_{10} - k_o}{t} = \dfrac{0.0012 - 0.000259}{10} = 9.41 \times 10^{-5}$ m/χρόνο

- $k_{20} = 0.000259 + 9.41 \times 10^{-5} \times 20 = 0.00214$ m

- $Re = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times 0.19}{3.14 \times 0.4064 \times 1.01 \times 10^{-6}} = 5.90 \times 10^5$

- $\frac{k_{20}}{D} = \frac{0.00214}{0.4064} = 0.0053$

- διάγρ. Moody $\Rightarrow f = 0.031$

- $h_f = 0.083 \frac{fLQ^2}{D^5} = 0.083 \frac{0.031 \times 1000 \times 0.19^2}{0.4064^5} = 8.38$ m

Εμπειρική εξίσωση Hazen-Williams

$$V = 0.354\, C\, D^{0.63}\, S^{0.54}$$

$$Q = 0.279\, C\, D^{2.63}\, S^{0.54}$$

C : συντελεστής τριβής (αδιάστατος)
(από πίνακες, εξαρτάται μόνον από την τραχύτητα)

Βελτίωση κατά Scimeni, Veroneze

$$V = K \cdot D^a S^b$$

$$Q = K_1 \cdot D^{2+a} S^b$$

- Λύση με τη βοήθεια νομογραφημάτων
- K, K_1, a, b : εξαρτώνται από το υλικό των σωλήνων

Συστήματα σωληνωτών αγωγών

Γενικά

- Μεταφορά νερού σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση από τις θέσεις των υδροληψιών μέχρι τις θέσεις κατανάλωσης (αγροτικές περιοχές, πόλεις, βιομηχανικές περιοχές κλπ.)
- Ροή γενικά ασταθής (μη μόνιμη) και ανομοιόμορφη
- <u>Παραδοχή</u>: - σταθερή και ομοιόμορφη ροή στα τμήματα των σωλήνων με σταθερή διάμετρο
  - σταθερή και ανομοιόμορφη ροή στις συνδέσεις, γωνίες, ρυθμιστικές δικλίδες κλπ.

- <u>Απώλειες ενέργειας</u>:

  α. γραμμικές απώλειες τριβής

  β. τοπικές απώλειες (είσοδοι και έξοδοι ενός αγωγού, στενώσεις και διευρύνσεις, γωνίες, δικλίδες κλπ.)

- <u>Εξίσωση ενέργειας</u>:

$$\boxed{\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} \pm H_m + \Sigma h_f + \Sigma h_L}$$

H_m: φορτίο μηχανής, + για τους υδροστρόβιλους (τουρμπίνες)
- για τις αντλίες

Σh_f: άθροισμα φορτίων των γραμμικών απωλειών

Σh_L: άθροισμα φορτίων των τοπικών απωλειών

- <u>Εξίσωση συνέχειας</u>:

$$\boxed{Q_A = Q_B + \Sigma Q_E = \sigma\tau\alpha\theta.}$$

ΣQ_E : άθροισμα παροχών που βγαίνουν από το σύστημα των αγωγών

Τοπικές απώλειες

- Αποκόλληση της ροής και δημιουργία τυρβώδους (στροβιλισμών)

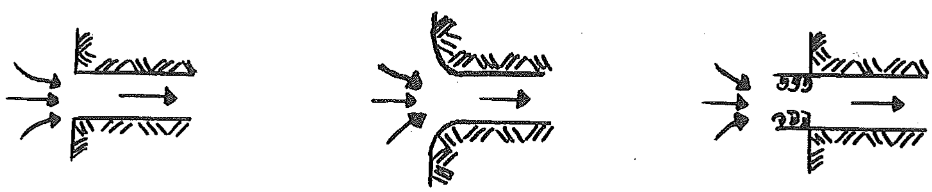
-
$$\boxed{h_L = K_L \frac{V^2}{2g}}$$

h_L : ύψος ή φορτίο τοπικής απώλειας

V : ταχύτητα στο μικρότερης διατομής τμήμα του αγωγού

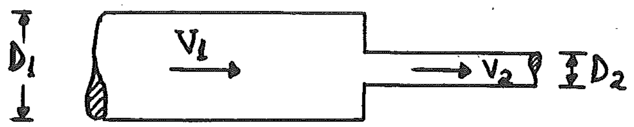
K_L : αδιάστατος συντελεστής τοπικής απώλειας

<u>Στην είσοδο του αγωγού από δεξαμενή</u>



Εγκάρσια $K_L \simeq 0.5$ | Κωδωνοειδής $K_L \simeq 0.05$ | Εισέχουσα $K_L \simeq 1.0$

Απότομη στένωση

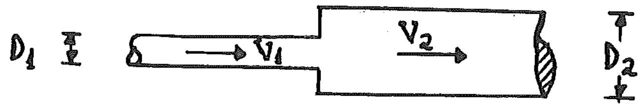


$$h_L \simeq K_L \frac{V_2^2}{2g}$$

$$K_L = 0.48 - 0.3\,\frac{D_2}{D_1}, \qquad \text{για} \quad 0 \leq \frac{D_2}{D_1} \leq 0.55$$

$$K_L = 0.7\left(1 - \frac{D_2}{D_1}\right), \qquad \text{για} \quad 0.55 \leq \frac{D_2}{D_1} \leq 1.0$$

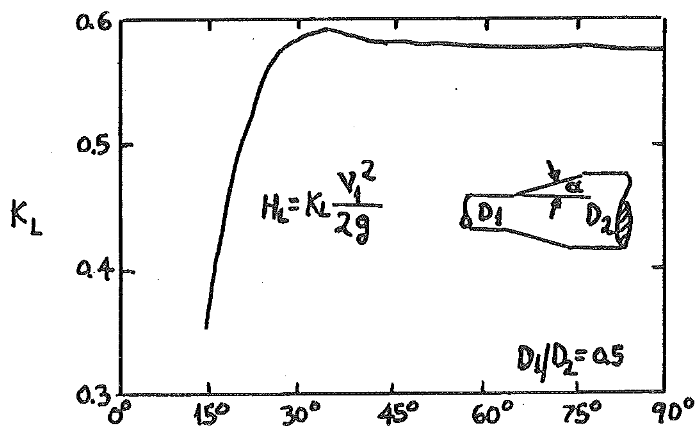
Απότομη διεύρυνση



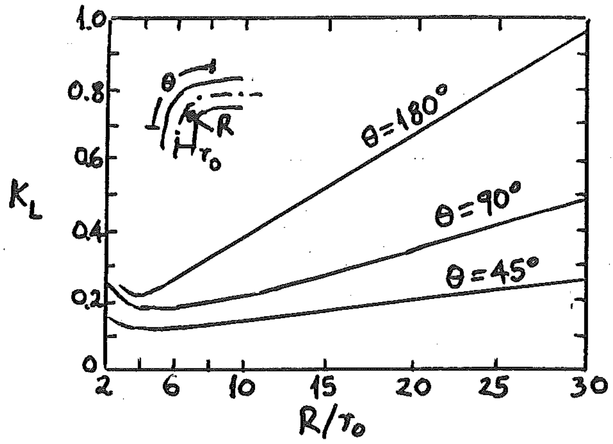
$$h_L \simeq K_L \frac{V_1^2}{2g}$$

$$K_L = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 \qquad \text{για } D_2 \to \infty,\; K_L = 1.0$$

Βαθμιαία διεύρυνση

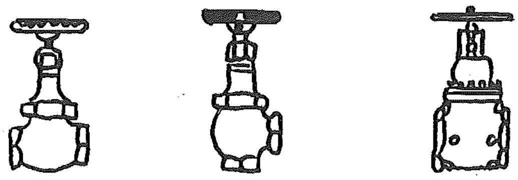


Γωνίες



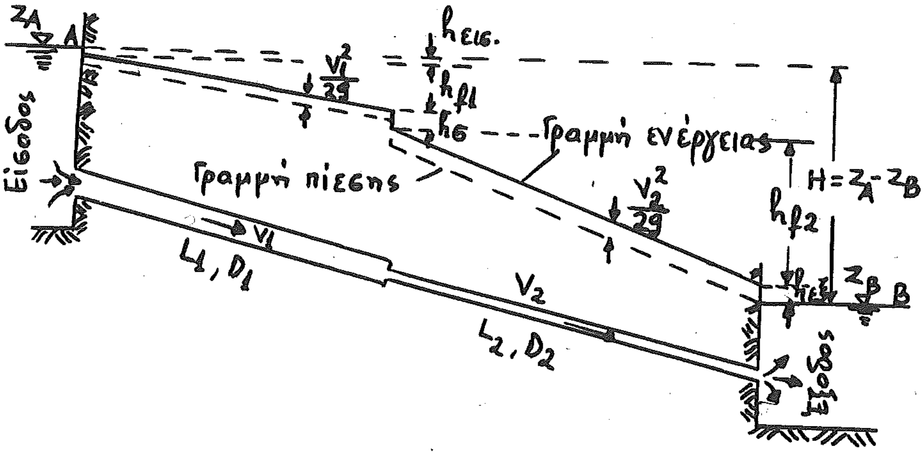
$$H_L = K_L \frac{V^2}{2g}$$

Ρυθμιστικές δικλίδες



Σφαιρική	Γωνιακή	Ολισθαίνουσα
$K_L \simeq 10$	$K_L = 3.1$	$K_L \simeq 0.19$

Συστήματα σωληνωτών αγωγών σε σειρά



Εξίσωση ενέργειας μεταξύ των σημείων A και B

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} + h_{εισ.} + h_{f1} + h_σ + h_{f2} + h_{εξ.}$$

$p_A = p_B = p_{atm}$, $\quad V_A = V_B \simeq 0$, $\quad z_A - z_B = H$

$$H = h_{εισ.} + h_{f1} + h_σ + h_{f2} + h_{εξ.}$$

$$H = 0.5\,\frac{V_1^2}{2g} + f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} + K_σ \frac{V_2^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Εξίσωση συνέχειας

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{\pi D_1^2}{4} V_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{D_2^2}{D_1^2} V_2 \Rightarrow$$

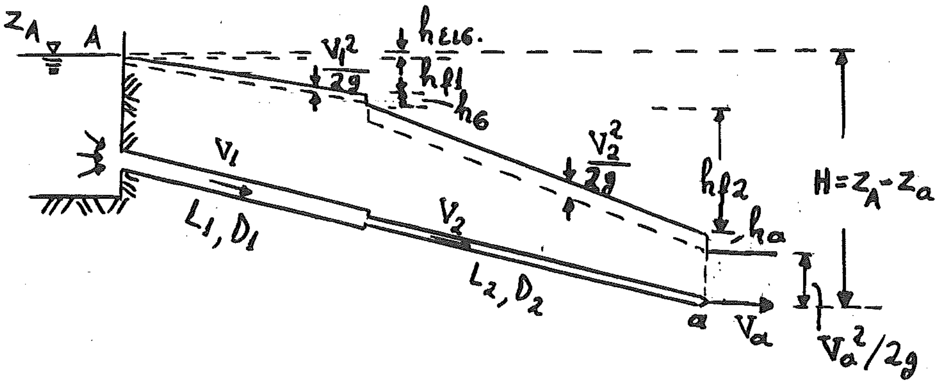
$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 \cdot \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H = \left[0.5\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 + f_1 \frac{L_1}{D_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 + K_σ + f_2 \frac{L_2}{D_2} + 1\right]\frac{V_2^2}{2g}$$

$k_1/D_1 \Rightarrow f_1$, $\quad k_2/D_2 \Rightarrow f_2$ (διάγρ. Moody: πλήρως τυρβώδης ροή)

$V_2, V_1 \Rightarrow Re_1, Re_2 \Rightarrow$ νέες τιμές f_1, f_2

Μετάδοση της υδροδυναμικής ισχύος διά μέσου ακροφυσίου



- Εξίσωση ενέργειας ανάμεσα στα σημεία A και a:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + z_a + \frac{V_a^2}{2g} + h_{εισ.} + h_{f1} + h_σ + h_{f2} + h_a$$

$$p_A = p_a = p_{atm} \qquad V_A = 0$$

$$z_A - z_a = H = \frac{V_a^2}{2g} + 0.5\frac{V_1^2}{2g} + f_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} + K_σ\frac{V_2^2}{2g} + f_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} + K_a\frac{V_a^2}{2g}$$

- Εξίσωση συνέχειας:

$$Q = \frac{\pi D_1^2}{4}V_1 = \frac{\pi D_2^2}{4}V_2 = \frac{\pi D_a^2}{4}V_a$$

$$V_1 = \left(\frac{D_a}{D_1}\right)^2 V_a \qquad V_2 = \left(\frac{D_a}{D_2}\right)^2 V_a$$

$$H = \left[1 + K_a + 0.5\left(\frac{D_a}{D_1}\right)^4 + f_1\frac{L_1}{D_1}\left(\frac{D_a}{D_1}\right)^4 + K_σ\left(\frac{D_a}{D_2}\right)^4 + f_2\frac{L_2}{D_2}\left(\frac{D_a}{D_2}\right)^4\right]\frac{V_a^2}{2g}$$

$$V_a = \left(2g\frac{H}{\Phi}\right)^{1/2}$$

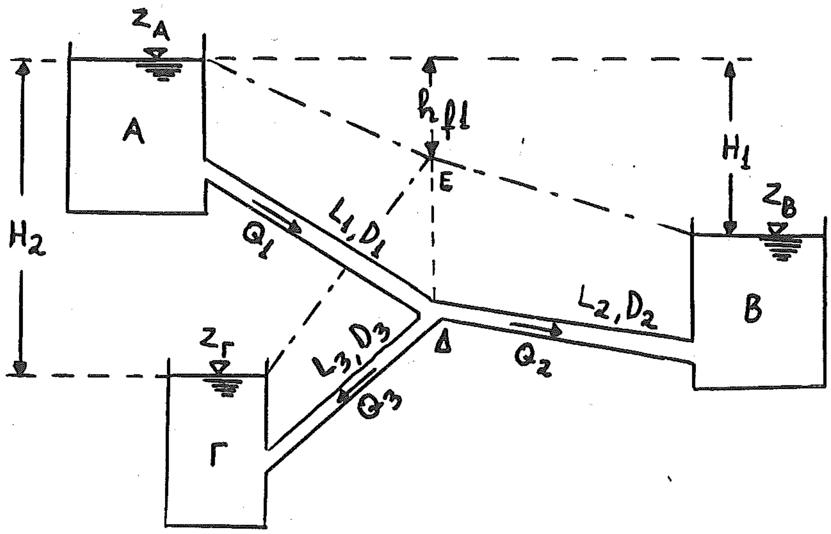
$$\Phi = \left[1 + K_a + 0.5\left(\frac{D_a}{D_1}\right)^4 + f_1\frac{L_1}{D_1}\left(\frac{D_a}{D_1}\right)^4 + K_σ\left(\frac{D_a}{D_1}\right)^4 + f_2\frac{L_2}{D_2}\left(\frac{D_a}{D_2}\right)^4\right]$$

$$P = \gamma Q h = \gamma Q \frac{V_a^2}{2g} = \gamma \frac{\pi D_a^2}{4} \frac{V_a^3}{2g}$$

$$P = \frac{\gamma \pi D_a^2}{4} \frac{(2gH/\phi)^{3/2}}{2g} = \frac{\gamma \pi D_a^2}{4} \sqrt{2g} \left(\frac{H}{\phi}\right)^{3/2}$$

Συστήματα διακλαδιζόμενων σωληνωτών αγωγών προς δεξαμενές

$A \rightarrow B + \Gamma$



- Εξίσωση συνέχειας : $Q_1 = Q_2 + Q_3$

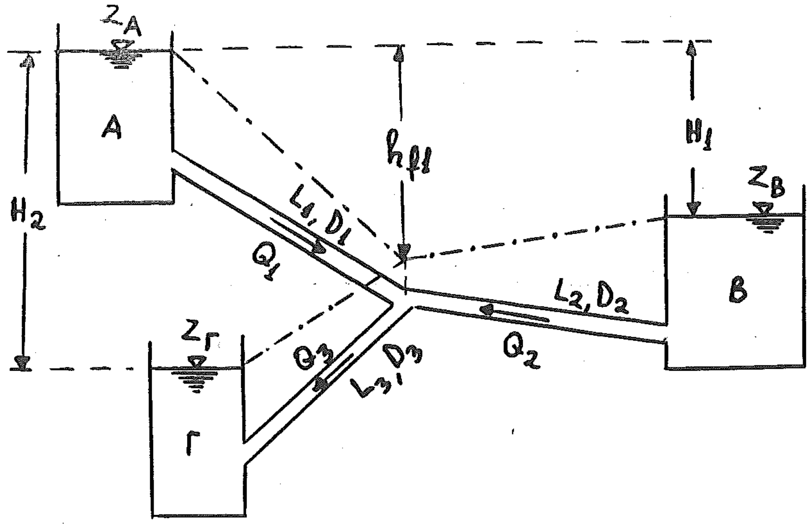
- Εξισώσεις ενέργειας : (χωρίς τοπικές απώλειες)

$$H_1 = h_{f1} + h_{f2} = f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} = 0.083 \left(\frac{f_1 L_1 Q_1^2}{D_1^5} + \frac{f_2 L_2 Q_2^2}{D_2^5}\right)$$

$$H_2 = h_{f1} + h_{f3} = f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{V_3^2}{2g} = 0.083 \left(\frac{f_1 L_1 Q_1^2}{D_1^5} + \frac{f_3 L_3 Q_3^2}{D_1^5}\right)$$

- 3 εξισώσεις, 3 άγνωστοι

Δίδονται	Ζητούνται
Q_1, Q_2, Q_3	D_1, D_2, D_3
D_1, D_2, D_3	Q_1, Q_2, Q_3
Q_1, Q_2 (ή Q_3), D_1	Q_3 (ή Q_2), D_2, D_3
Q_1 (ή Q_2 ή Q_3), D_1, D_2 (ή D_3)	Q_2, Q_3, D_3 (ή D_2)



- <u>Εξίσωση συνέχειας</u> : $Q_1 + Q_2 = Q_3$

- <u>Εξισώσεις ενέργειας</u> : (χωρίς τοπικές απώλειες)

$$H_2 = h_{f1} + h_{f3} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} = 0.083 \left(\frac{f_1 L_1 Q_1^2}{D_1^5} + \frac{f_3 L_3 Q_3^2}{D_3^5} \right)$$

$$H_2 - H_1 = h_{f2} + h_{f3} = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} = 0.083 \left(\frac{f_2 L_2 Q_2^2}{D_2^5} + \frac{f_3 L_3 Q_3^2}{D_3^5} \right)$$

- 3 εξισώσεις, 3 άγνωστοι

Σωληνωτοί αγωγοί με αντλία ή υδροστρόβιλο

- Αντλία : Πρόσθεση εξωτερικής μηχανικής ενέργειας σ' ένα σύστημα ροής, απότομη αύξηση του ύψους πιέσεως

- Υδροστρόβιλος : Αφαίρεση μηχανικής ενέργειας από το σύστημα ροής, απότομη πτώση του ύψους πιέσεως

- Ισχύς αντλίας P_W : (που μεταδίδεται στην παροχή Q)

$$\boxed{P_W = \gamma Q H_m} \qquad [W] \text{ ή } [Nm/s]$$

γ : ειδικό βάρος νερού $[N/m^3]$

Q : παροχή δια μέσου της αντλίας $[m^3/s]$

H_m : αύξηση του ύψους πιέσεως $[m]$
(από την είσοδο μέχρι την έξοδο της αντλίας)

- Ολική ισχύς που προσφέρεται στην αντλία από την κινητήρια μηχανή :

$$\boxed{P = \frac{\gamma Q H_m}{n}} \qquad [W] \text{ ή } [Nm/s]$$

n : απόδοση της αντλίας

$$\boxed{P = \frac{\gamma Q H_m}{736\, n}} \qquad [HP]$$

$1\ HP = 736\ W = 736\ Nm/s = 75\ kgm/s$

- Ισχύς που αφαιρεί ένας υδροστρόβιλος από το σύστημα ροής:

$$\boxed{P_W = \gamma Q H_m} \quad [W] \text{ ή } [Nm/s]$$

γ : $[N/m^3]$, Q : $[m^3/s]$

H_m: ύψος πιέσεως που καταναλώνει ο υδροστρόβιλος [m]

- Πραγματική ισχύς υδροστροβίλου:

$$\boxed{P = \eta \gamma Q H_m} \quad [W] \text{ ή } [Nm/s]$$

$$\boxed{P = \frac{\eta \gamma Q H_m}{736}} \quad [HP]$$

η : απόδοση υδροστροβίλου

- Εξίσωση ενέργειας:

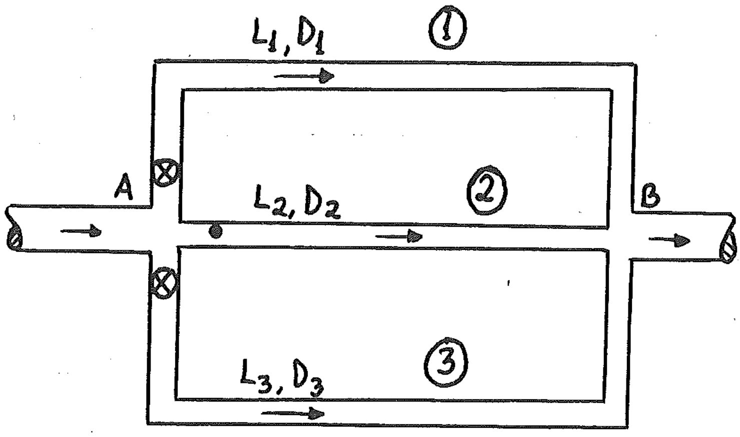
$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} \pm H_m = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \Sigma h_{f\,A-B} + \Sigma h_{L\,A-B}$$

H_m : φορτίο μηχανής, μανομετρικό ύψος ή φορτίο

$+ \Rightarrow$ αντλία

$- \Rightarrow$ υδροστρόβιλος

Συστήματα παράλληλων σωληνωτών αγωγών



- Εξίσωση συνέχειας: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

- Εξισώσεις ενέργειας:

$$h_A - h_B = \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + K_{\delta\iota\kappa.} + 2K_{\gamma\omega\nu.}\right)\frac{V_1^2}{2g} = \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + K_{\delta\iota\kappa.} + 2K_{\gamma\omega\nu.}\right)\frac{8Q_1^2}{g\pi^2 D_1^4}$$

$$h_A - h_B = \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_{\delta\iota\kappa.}\right)\frac{V_2^2}{2g} = \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_{\delta\iota\kappa.}\right)\frac{8Q_2^2}{g\pi^2 D_2^4}$$

$$h_A - h_B = \left(f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_{\delta\iota\kappa.} + 2K_{\gamma\omega\nu.}\right)\frac{V_3^2}{2g} = \left(f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_{\delta\iota\kappa.} + 2K_{\gamma\omega\nu.}\right)\frac{8Q_3^2}{g\pi^2 D_3^4}$$

- 4 εξισώσεις, 4 άγνωστοι

- Παράδειγμα:

  - Δίδονται L_1, L_2, L_3 και D_1, D_2, D_3

    $K_{\delta\iota\kappa.}, K_{\gamma\omega\nu.}$

    Q

  - Ζητούνται $\Delta h = h_A - h_B$ και Q_1, Q_2, Q_3

Λύση

- Δεχόμαστε μια λογική τιμή Q_1'
- Υπολογίζουμε $\Delta h' = h_A - h_B$ από την 1η εξίσ. ενέργειας
- Υπολογίζουμε Q_2', Q_3' από την 2η και 3η εξίσ. ενέργειας
- $Q' = Q_1' + Q_2' + Q_3'$ (συνήθως $Q' \neq Q$)
- $Q_1'' = Q_1' \dfrac{Q}{Q'}$
- Υπολογίζουμε $\Delta h'' = h_A - h_B$ από την 1η εξίσ. ενέργειας
- Υπολογίζουμε Q_2'', Q_3'' από την 2η και 3η εξίσ. ενέργειας
- $Q'' = Q_1'' + Q_2'' + Q_3''$
- Εάν $Q'' \neq Q$, τότε $Q_1''' = Q_1'' \dfrac{Q}{Q''}$