

Δρ Μ.Σπηλιώτη

Το πρόβλημα των διασυνδεδεμένων δεξαμενών

- Ρητή σχέση απωλειών ενέργειας-παροχής, (ένιας αγωγός, μία διάμετρος μόνο γραμμικές απώλειες) υποπιέσεις
- Το πρόβλημα τριών δεξαμενών

Εξίσωση ενέργειας και εξίσωση
Bernoulli- διακλαδιζόμενοι αγωγοί

Εξίσωση ενέργειας και εξίσωση Bernoulli

◦ Εξίσωση Bernoulli

- Κατά μήκος μιας γραμμής ροής, για μόνιμη ροή = τροχιά (σε μόνιμη ροή)
- Χωρίς απώλειες ενέργειας
- Προέκυψε από την εξίσωση ορμής περιορισμένη ισχύ σε άτριβη ροή

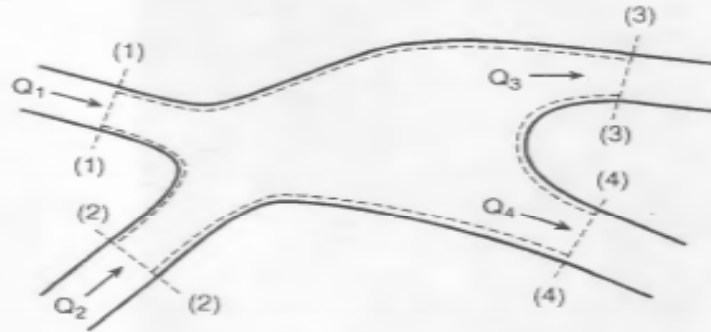
Εξίσωση ενέργειας

- Λαμβάνονται υπόψη οι απώλειες ενέργειας
- **Ενιαία ταχύτητα** σε όλη τη διατομή και θεώρηση **συντελεστή διόρθωσης κινητικής ενέργειας**
- Αρχικά σε **όγκο ελέγχου**
- Σε **διακλαδιζόμενους αγωγούς** δεν συμπίπτουν γενικά οι δύο εξισώσεις (βλ επόμενη διαφάνεια)
- Συμπίπτουν θεωρώντας στους κόμβους ταυτόσημο ύψος ενέργειας και συνεπώς αμελητέες τοπικές απώλειες

Εξίσωση ενέργειας σε διακλαδιζόμενους αγωγούς

5.5.3 Γενίκευση

Η εξίσωση ενέργειας μπορεί να γενικευθεί σε όγκο αναφοράς με περισσότερες από μία εισόδους και εξόδους. Στην περίπτωση αυτή όμως διατυπώνεται συνήθως υπό μορφή συνολικού ενεργειακού ισοζυγίου και όχι υπό μορφή ενεργειακών υψών διότι δεν είναι μονοσήμαντη η αναγωγή ως προς την παροχή του ρεόντος ρευστού.



Σχήμα 5.10.

Θεωρώντας π.χ. τον όγκο αναφοράς που φαίνεται στο Σχήμα 5.10 υποθέτουμε μόνιμη ροή ασυμπίεστου ομογενούς ρευστού ($\rho = \text{σταθ.}$ και εργαζόμενοι με τρόπο εντελώς ανάλογα όπως προηγουμένως προκύπτει:

$$\gamma_1 Q_1 H_1 + \gamma_2 Q_2 H_2 = \gamma_3 Q_3 H_3 + \gamma_4 Q_4 H_4 + \Delta E_{\mu\eta\chi} + \Delta E_{\alpha} \quad (5.54)$$

όπου ($i=1, 2, 3, 4$)

Εισροή
ενέργειας
 $\sum \rho g Q_i H_i$

Εκροή
ενέργειας+
απώλειες

Εξίσωση ενέργειας σε διακλαδιζόμενους αγωγούς, μικρά μήκη

$$H_i = h_i + p_i/\gamma + V_{\mu_i}^2/2g$$

$\Delta E_{\mu\chi}$. ενέργεια που ενδεχομένως απομακρύνεται από το σύστημα μέσω μηχανικού άξονα ανά μονάδα χρόνου και
 ΔE_{α} απώλεια ενέργειας ανά μονάδα χρόνου μέσα στον όγκο αναφοράς

Γενικότερα, η εξ. (5.54) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής

$$\sum \gamma_i H_i Q_i = \sum \gamma_j H_j Q_j + \Delta E_{\mu\chi} + \Delta E_{\alpha} \quad (5.55)$$

και όπου προφανώς ισχύει επίσης (εξίσωση συνέχειας)

$$\sum \gamma_i Q_i = \sum \gamma_j Q_j \quad (5.56)$$

Πιο σωστά
 $\alpha V^2/2g$
Συντελεστής
διόρθωσης
κινητικής
ενέργειας

Εξίσωση ενεργείας και εξίσωση Bernoulli

Στην ειδική περίπτωση $\Delta E_{\text{μηχ.}} = 0$ και $\Delta E_a = 0$ τότε το (μαθηματικώς αόριστο) σύστημα των δύο εξισώσεων (5.55) και (5.56) έχει την προφανή λύση

$$H_i = H_j = H = \text{σταθ. για κάθε } i \text{ και } j \quad (5.57)$$

δηλ. το ύψος μηχανικής ενέργειας είναι το ίδιο σε κάθε διατομή, ή με άλλα λόγια η μηχανική ενέργεια ανηγμένη προς την παροχή που περνά από την αντίστοιχη διατομή παραμένει σταθερή. Δεδομένου ότι πρόκειται για φυσικό πρόβλημα, η λύση αυτή είναι και η μοναδική αποδεκτή, διευκολύνει δε σημαντικά την επίλυση προβλημάτων όπου είναι δυνατό να αμεληθούν οι απώλειες ενέργειας.

ΑΔΕ: σε γραμμή ροής?

Επομένως, σε κόμβους θεωρείτε κοινό ύψος ενέργειας

Στο παρακάτω σχήμα στον κόμβο υπάρχει κοινό ύψος ενέργειας.



Ο όγκος αναφοράς μεταξύ εισροής και εκροής χωρίζεται σε δύο αυθαίρετα τμήματα (που αντιστοιχούν στους όγκους εκροής) από μία επιφάνεια με μηδενική τριβή.

Με αυτήν τη **προσέγγιση** εφαρμόζονται δύο διαφορετικές εξισώσεις ενέργειας σαν δύο διαφορετικούς ροϊκούς σωλήνες (δλδ σε γραμμές ροής, διάβαζε τροχιά για μόνιμη ροή) (αντί του εξίσωσης εισρών και εκρών ενέργειας)

(Δημητρίου, 2003)

Ρητή σχέση απωλειών ενέργειας-
παροχής με γνωστές απώλειες
ενέργειας, μία διάμετρος μόνο
γραμμικές απώλειες

Ρητή σχέση απωλειών ενέργειας- παροχής, ένας αγωγός μόνο γραμμικές απώλειες

B' τρόπος (προτεινόμενη ρητή εξίσωση)

Σε τυρβώδη ροή με γνωστές τις γραμμικές απώλειες, αγνοώντας τις τοπικές απώλειες, μπορεί άμεσα να προσδιοριστεί η ταχύτητα από την παρακάτω αναλυτική εξίσωση:

$$V = -2 \sqrt{\frac{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)^* \quad (2.35)$$

* Από την εξίσωση των Darcy - Weisbach ισχύει

$$h_{f(i-1) \rightarrow i} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = V \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}}$$

Από την εξίσωση των Colebrook - White $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$, προκύπτει:

$$V \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{VD/\nu} V \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)$$

$$V = -2 \sqrt{\frac{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)$$

όπου $H_{i-1} - H_i = h_{f(i-1) \rightarrow i}$.

Άρα είναι μία ακριβής και όχι προσεγγιστική εξίσωση

Διαφορετικά για κάθε κλάδο θα πρέπει να κάνω δοκιμές
2 βασικό πρόβλημα της Υδραυλικής

20 **2** The main criticism of the discussers Batchabani and Fuamba
 21 (2013) is based on the fact that the “approximation of the implicit
 22 equation of Colebrook-White (1939)” used in the recent paper of
 23 Spiliotis and Tsakiris (2011) is an approximation, whereas there are
 24 several other probably more successful approximations.

25 The discussers are probably mistaken for the reasons explained
 26 herein.

27 The proposed equation in the original paper [Eq. (4)] is as
 28 follows:

$$Q_{i \rightarrow n} = -\text{sign}(h_i - h_n) \frac{\pi D_{in}^2}{2} \sqrt{2gD_{in} \frac{|h_i - h_n|}{L_{in}}} \times \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D_{in}} + \frac{2.51\nu}{D_{in} \sqrt{2gD_{in} \frac{|h_i - h_n|}{L_{in}}}} \right) \quad (1)$$

29 with all the symbols explained in the original paper.

30 It is clear that this equation is not “an explicit approximation.”
 31 This equation was produced directly from both Colebrook-
 32 White and Darcy-Weisbach equations by using simple algebraic
 33 calculations.

34 This equation should not be confused with the widely used
 35 explicit equation of Swamee and Jain (1976), which is an approxi-
 36 mation for determining the friction factor based on the Reynolds
 37 number and the relative roughness.

38 If for simplicity we ignore the sign of the flows, we can rewrite
 39 the Darcy-Weisbach as

$$h_{f,i \rightarrow n} = h_i - h_n = f \frac{L_{in} V_{in}^2}{D_{in} 2g} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{f_{in}}} = V_{in} \sqrt{\frac{L_{in}}{2g|h_i - h_n|D_{in}}} \quad (2)$$

40 From the Colebrook-White equation, it holds

$$\frac{1}{\sqrt{f_{in}}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D_{in}} + \frac{2.51}{R_{in} \sqrt{f}} \right) \quad (3)$$

Closure to “Water Distribution System Analysis: Newton-Raphson Method Revisited” by M. Spiliotis and G. Tsakiris

August 2011, Vol. 137, No. 8, pp. 852–855.

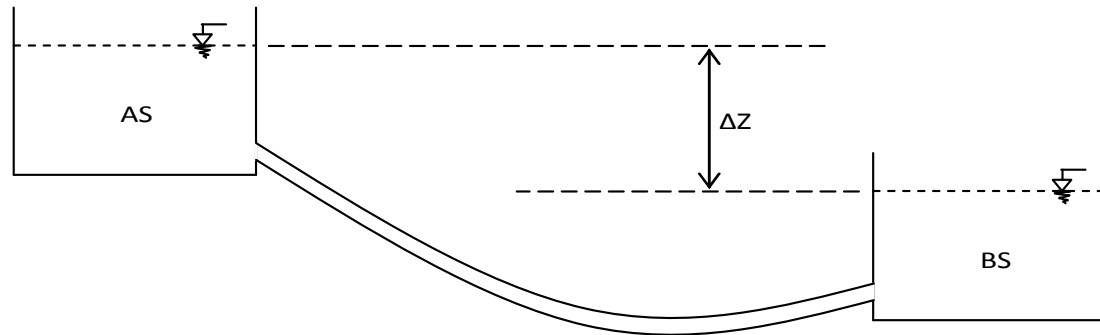
DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000364

M. Spiliotis, M.ASCE¹; and G. Tsakiris, M.ASCE²

¹Postdoctoral Researcher, Centre for the Assessment of Natural Hazards and Proactive Planning and Laboratory of Reclamation Works and Water Resources Management, School of Rural and Surveying Engineering, National Technical Univ. of Athens, 9 Iroon Polytechniou, 157 80 Athens, Greece (corresponding author). E-mail: m.spiliotis@gmail.com; water@survey.ntua.gr

²Professor, Centre for the Assessment of Natural Hazards and Proactive Planning and Laboratory of Reclamation Works and Water Resources Management, School of Rural and Surveying Engineering, National Technical Univ. of Athens, 9 Iroon Polytechniou, 157 80 Athens, Greece. E-mail: water@survey.ntua.gr

Εφαρμογή 1: Ένας αγωγός 10Km μήκους, 300mm διαμέτρου, τραχύτητας $k=1$ mm, μεταφέρει νερό από μία δεξαμενή A (που η επιφάνεια του νερού έχει σταθερό υψόμετρο +850m) σε μία άλλη δεξαμενή B (που η επιφάνεια του νερού έχει σταθερό υψόμετρο +700m). Να προσδιορισθεί η παροχή του νερού από την δεξαμενή A στην δεξαμενή B. $\nu=1.13 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ (κινηματικό ιξώδες)



Σχήμα ? : Διάταξη εφαρμογής για την εύρεση του ύψους απωλειών

Λύση:

(Α' τρόπος επίλυσης – Ευθεία μέθοδος)

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των θέσεων A, B προκύπτει:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B + h_f$$

όπου $p_A=0$, $p_B=0$, $v_A=0$, $v_B=0$ (ελεύθερη επιφάνεια)

Οπότε

$$z_A - z_B = h_f \Leftrightarrow$$

$$\Delta z_{A \rightarrow B} = 150 = h_f$$

$$V = -2 \sqrt{\frac{2gh_f D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2gh_f D}} \right)$$

Όπου $D=0.3\text{m}$, $k=0.03\text{mm}$, $L=10000\text{m}$ και $\nu=1.13 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$.

Συνεπώς:

$$V=1.18\text{m/s},$$

καταλήγοντας για την παροχή:

$$Q = V \frac{\pi D^2}{4} = 0.128 \text{m}^3 / \text{s}$$

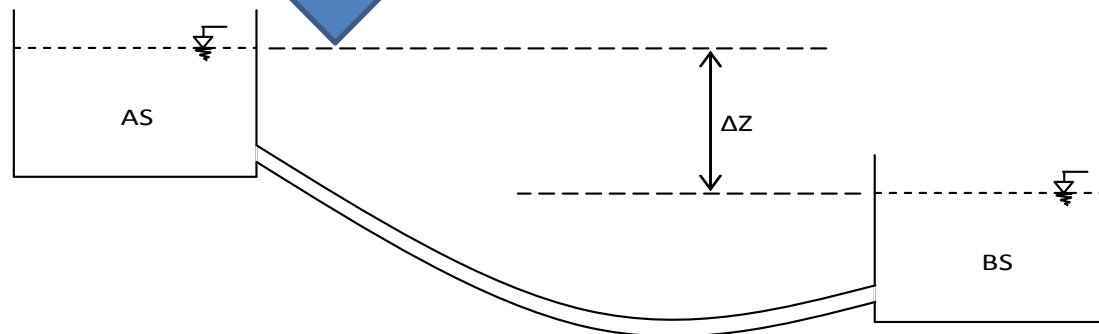
1^ο βασικό πρόβλημα της υδραυλικής

Επίλυση για ένα μόνο αγωγό και χωρίς τοπικές απώλειες
(β τρόπος χωρίς δοκιμές)

Σε πρόβλημα δύο δεξαμενών γνωρίζουμε ότι η υψομετρική διαφορά είναι ίση με το σύνολο των απωλειών ενέργειας (από ΑΔΕ)

Επομένως, στο 2 βασικό πρόβλημα της Υδραυλικής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ρητή σχέση για τον προσδιορισμό της παροχής, όταν:

- Υπάρχει ένας μόνο αγωγός διαμέτρου D
- μόνο γραμμικές απώλειες προσδιορίζονται (π.χ. οι τοπικές λαμβάνονται έμμεσα υπόψη με προσαύξηση της τραχύτητας)
- Συνήθης περίπτωση της τυρβώδους ροής σε αγωγό

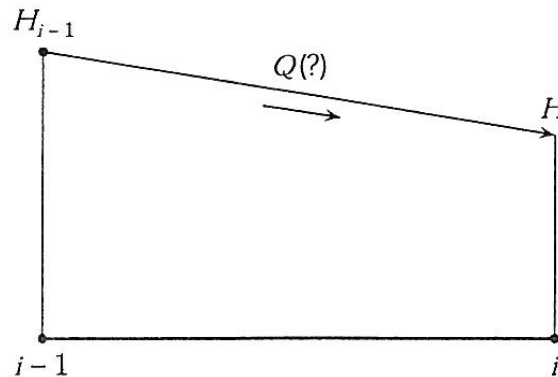


Σχήμα ? : Διάταξη εφαρμογής για την εύρεση του ύψους απωλειών

2.6.3 Προσδιορισμός της Παροχής με Γνωστά τα Γεωμετρικά Στοιχεία των Αγωγών, το Υλικό τους και των Υψών της Πιεζομετρικής Γραμμής

Έστω ο ανάντη κόμβος $i-1$ και ο κατόντη κόμβος i με γνωστά τα υψόμετρα της πιεζομετρικής γραμμής. Ζητείται ο προσδιορισμός της παροχής μεταξύ $i-1$ και i (Σχήμα 2.9):

Μόνο για τυρβώδη ροή
θεωρώντας αμελητέες
τοπικές απώλειες ενέργειας
Αποφεύγω τις δοκιμές



Τσακίρης και Σπηλιώτης,
2011

Σχ. 2.9: 2^ο βασικό πρόβλημα υδραυλικής κλειστών αγωγών.

B' τρόπος (προτεινόμενη ρητή εξίσωση)

Σε τυρβώδη ροή με γνωστές τις γραμμικές απώλειες, αγνοώντας τις τοπικές απώλειες, μπορεί άμεσα να προσδιοριστεί η ταχύτητα από την παρακάτω αναλυτική εξίσωση:

$$V = -2 \sqrt{\frac{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)^* \quad (2.35)$$

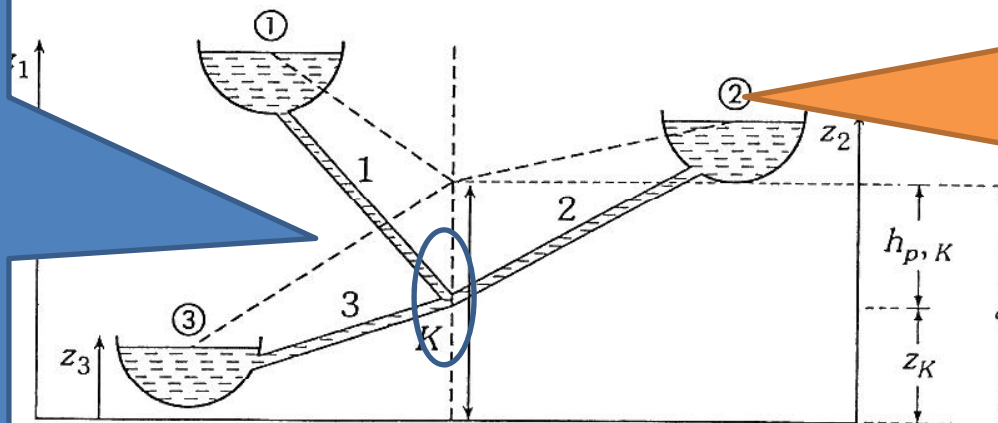
Διαφορετικά για κάθε κλάδο θα πρέπει να κάνω δοκιμές

2.9 ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

2.9.1 Το Πρόβλημα των Τριών Διασυνδεδεμένων Δεξαμενών

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα γνωστό από την εφαρμοσμένη υδραυλική είναι το πρόβλημα των τριών διασυνδεδεμένων δεξαμενών. Το πρόβλημα ουσιαστικά αναφέρεται στην εύρεση των παροχών στους αγωγούς που συνδέουν τις δεξαμενές με γνωστή τη στάθμη του νερού στις δεξαμενές και γνωστά τα στοιχεία των αγωγών (διάμετρος, υλικό) (Σχήμα 2.17).

Σε αυτά τα προβλήματα θεωρώ ότι η πιεζομετρική γραμμή είναι περίπου ταυτόσημη με τη γραμμή ενέργειας



Η γραμμή ενέργειας άρχεται από την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής και καταλήγει πάλι σε ελεύθερη επιφάνεια άλλης δεξαμενής – αμελητέες οι τοπικές απώλειες και τα ύψη κινητικής ενέργειας

Σχ. 2.17: Τρεις διασυνδεδεμένες δεξαμενές.

Τσακίρης και Σπηλιώτης, 2010

⊙ Το πρόβλημα των τριών (ή plus) σεξαιμένων.

⊙ Εισαγωγικά στη h -εξίσωση (βλ. επίλυση ελαστών διατάξεων, ασκήτ. υδραυλική) ξέρω τα ύψη ενέργειας στον κόμβο, ζητώ την παροχή. ($h = h_v \Rightarrow Q = \text{επίλυση}$)

Δύο βασικές σκέψεις για την επίλυση:

✓ Τα υψόμετρα της γραμμής ενέργειας στις δεξιές, συγκρίνονται με τις στάθμες των ελευθέρων επιφανειών

✓ Μοναδικός άγνωστος στη γραμμική ενέργεια, είναι το ύψος ενέργειας στο ενδιαφέρον σημείο. Προσδιορισμός με 1 ολική, θα πρέπει να επιλυθ. η επίλυση της συνάρτησης στον κόμβο, έστω 1 τα ύψη γραμμής ενέργειας στο σημείο

Από την **εξίσωση ενέργειας** μεταξύ δεξαμενών και διακλάδωσης **προσδιορίζεται το ύψος γραμμικών απωλειών**-αμελούνται οι τοπικές

$$\left. \begin{aligned}
 z_1 - J = h_{f,1 \rightarrow J} &= \frac{8 f_1 \cdot L_{1 \rightarrow K}}{g \pi^2 D_1^5} Q_1^2, & R_1 &= \frac{8 f_1 \cdot L_{1 \rightarrow K}}{g \pi^2 D_1^5} \\
 z_2 - J = h_{f,2 \rightarrow J} &= \frac{8 f_2 \cdot L_{2 \rightarrow K}}{g \pi^2 D_2^5} Q_2^2, & R_2 &= \frac{8 f_2 \cdot L_{2 \rightarrow K}}{g \pi^2 D_2^5} \\
 J - z_3 = h_{f,J \rightarrow 3} &= \frac{8 f_3 \cdot L_{K \rightarrow 3}}{g \pi^2 D_3^5} Q_3^2, & R_3 &= \frac{8 f_3 \cdot L_{K \rightarrow 3}}{g \pi^2 D_3^5}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Με δεδομένο ότι δεν είναι γνωστή η παροχή, συνεπώς άγνωστος παραμένει ο συντελεστής τριβής για κάθε κλάδο και η παροχή που προσδιορί-

στο K , J θα γίνει αποδεκτή μόνο αν επαληθεύεται η εξίσωση συνεχείας στον κόμβο K :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (\text{έλεγχος για την αρχή της συνέχειας στον κόμβο } K)$$

Ρητή σχέση απωλειών ενέργειας- παροχής, ένας αγωγός, μία διάμετρος μόνο γραμμικές απώλειες

Β' τρόπος (προτεινόμενη ρητή εξίσωση)

Σε τυρβώδη ροή με γνωστές τις γραμμικές απώλειες, αγνοώντας τις τοπικές απώλειες, μπορεί άμεσα να προσδιοριστεί η ταχύτητα από την παρακάτω αναλυτική εξίσωση:

$$V = -2 \sqrt{\frac{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)^* \quad (2.35)$$

* Από την εξίσωση των Darcy - Weisbach ισχύει

$$h_{f(i-1) \rightarrow i} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = V \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}}$$

Από την εξίσωση των Colebrook - White $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$, προκύπτει:

$$V \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{VD/\nu} V \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)$$

$$V = -2 \sqrt{\frac{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)$$

όπου $H_{i-1} - H_i = h_{f(i-1) \rightarrow i}$.

Το νερό είναι «έξυπνο»

B' τρόπος (προτεινόμενη ρητή εξίσωση)

Σε τυρβώδη ροή με γνωστές τις γραμμικές απώλειες, αγνοώντας τις τοπικές απώλειες, μπορεί άμεσα να προσδιοριστεί η ταχύτητα από την παρακάτω αναλυτική εξίσωση:

$$V = -2 \sqrt{\frac{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2gh_{f(i-1) \rightarrow i} D}} \right)^* \quad (2.35)$$

c. Προσδιορίζω την παροχή και την ταχύτητα για κάθε κλάδο:

$$V_j = -\text{sign}(z_i - J) \cdot 2 \sqrt{\frac{2g|z_i - J| D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2g|z_i - J| D}} \right)$$

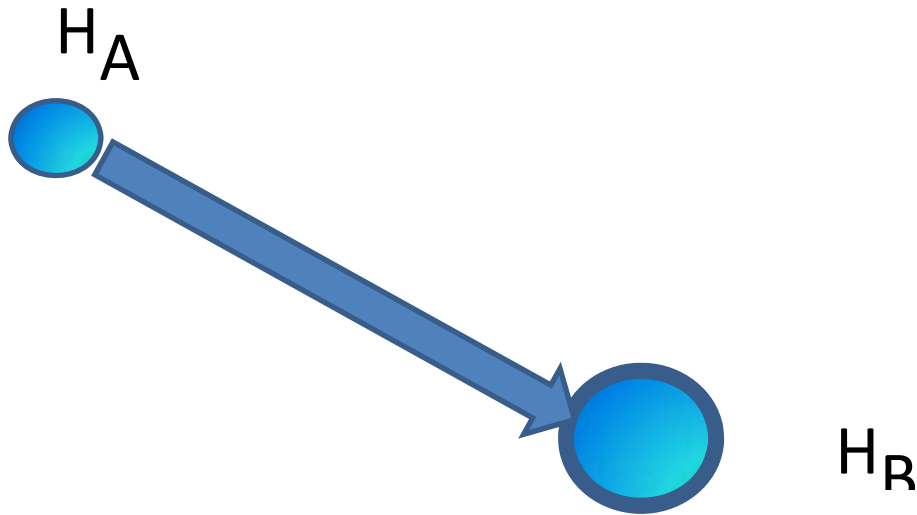
όπου: $j = 1, 2, 3$, για κάθε σωλήνα.

Κλειδί

- Υπόθεση για το ύψος πιεζομετρικής γραμμής στη διακλάδωση
- Προσδιορισμός παροχών ξεχωριστά για κάθε κλάδο (2 βασικό πρόβλημα της υδραυλικής)
- Κριτήριο: Επαλήθευση της εξίσωσης της μάζας στον κόμβο
- Γραφική επίλυση για συνθήκες εξετάσεων

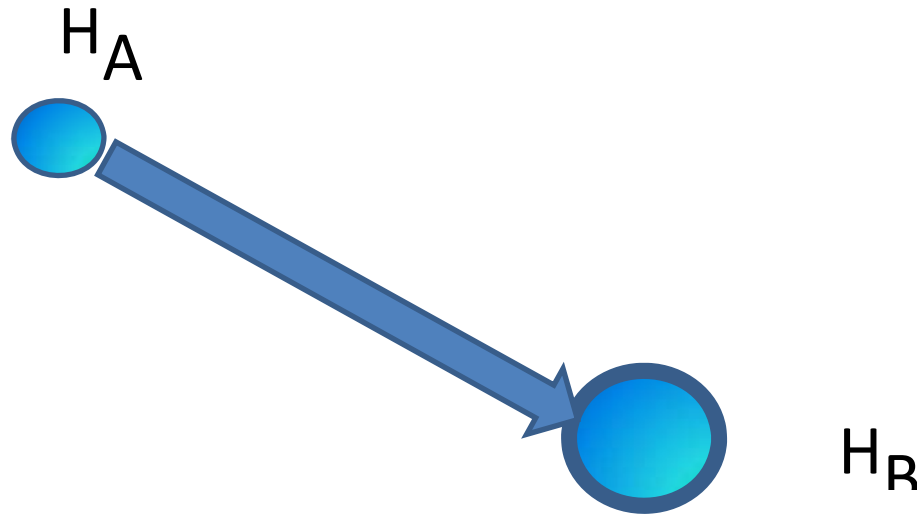
**Επίλυση χωρίς να διακρίνω
περιπτώσεις για το πρόσημο**

$H_A > H_B$ (ύψη ενέργειας)



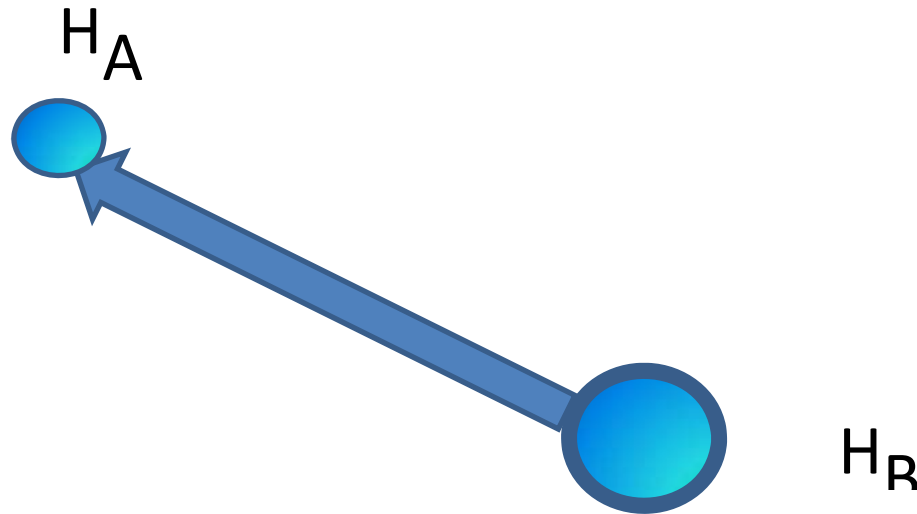
Αν $H_A > H_B$, κίνηση προς τον κόμβο B (σύγκλιση)

$H_A > H_B$ (ύψη ενέργειας)



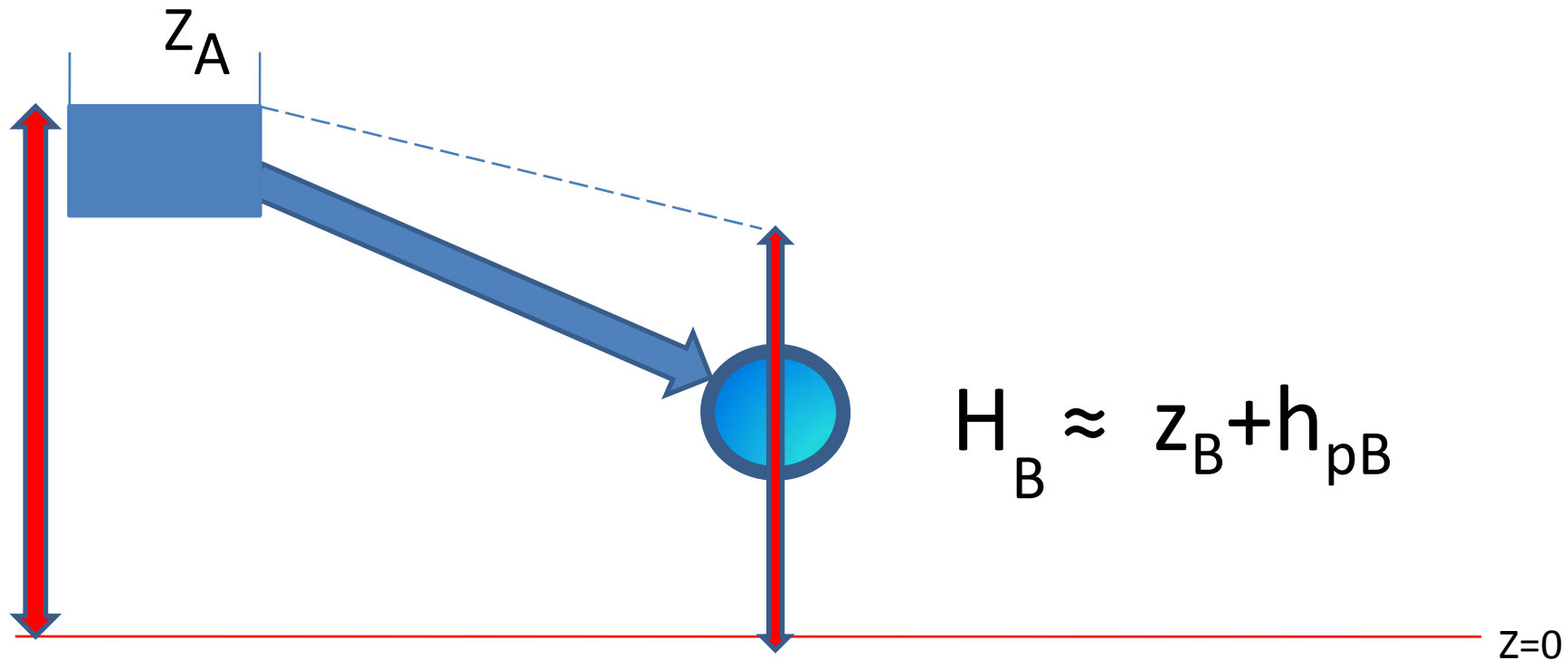
Αν $H_A > H_B$, κίνηση προς τον κόμβο B (σύγκλιση)

$H_A < H_B$ (ύψη ενέργειας)



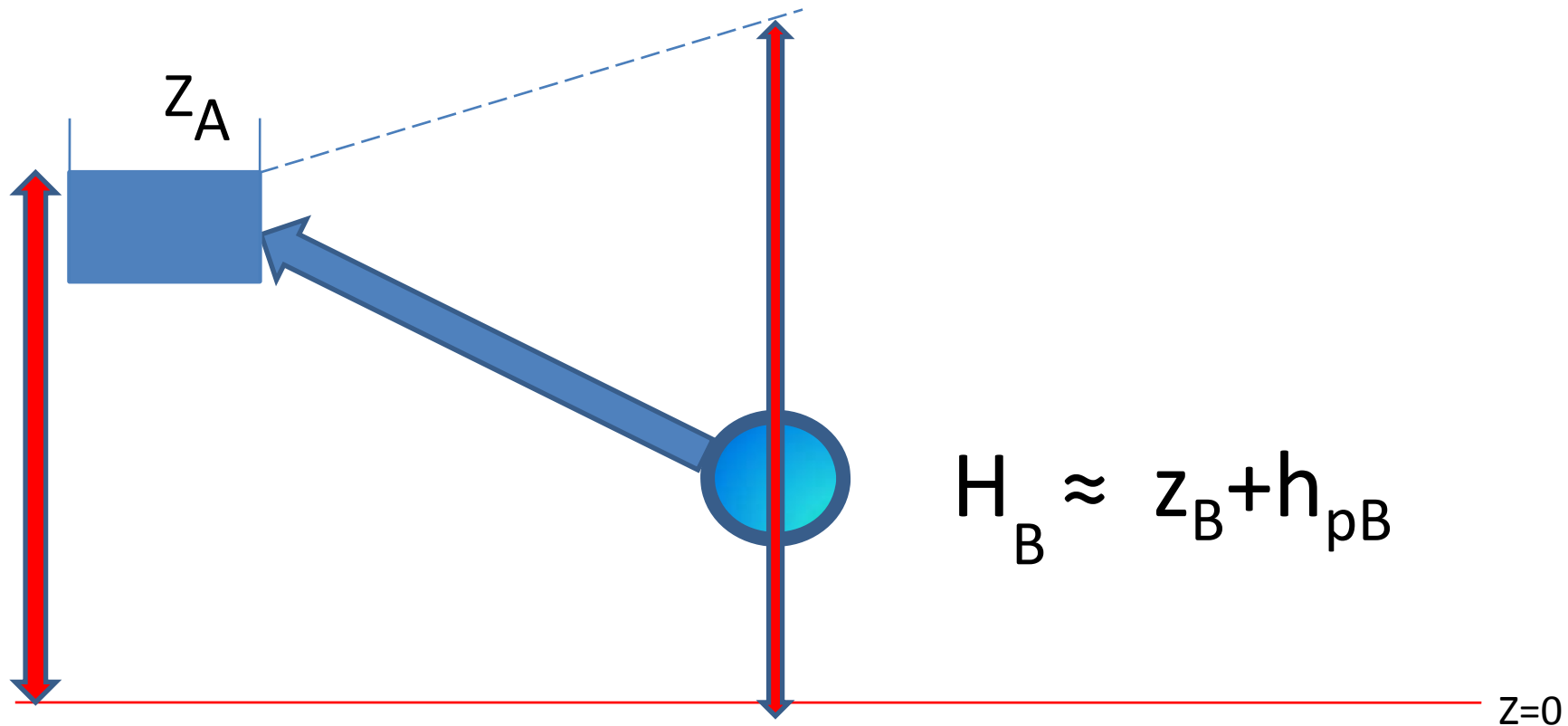
Αν $H_A < H_B$, κίνηση προς τον κόμβο A (απόκλιση από τον κόμβο B)

$$H_A = Z_A > H_B \text{ (ύψη ενέργειας)}$$



Πρόβλημα διασυνδεδεμένων δεξαμενών:
Αν $H_A > H_B$, κίνηση προς τον κόμβο A (σύγκλιση
στον κόμβο B)

$$H_A = Z_A < H_B \text{ (ύψη ενέργειας)}$$



Πρόβλημα διασυνδεδεμένων δεξαμενών:
Αν $H_A < H_B$, κίνηση προς τον κόμβο A (απόκλιση από τον κόμβο B)

c. Προσδιορίζω την παροχή και την ταχύτητα για κάθε κλάδο:

$$V_j = \text{sign}(z_i - J) \cdot 2 \sqrt{\frac{2g|z_i - J|D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2g|z_i - J|D}} \right)$$

όπου: $j = 1, 2, 3$, για κάθε σωλήνα.

Δηλαδή, για να απλοποιήσω την επίλυση θεωρώ ένα πρόσημο στην παροχή, προσθέτοντας τον όρο στην παρένθεση.

Ο όρος στην παρένθεση εκφράζει απλά πρόσημο.

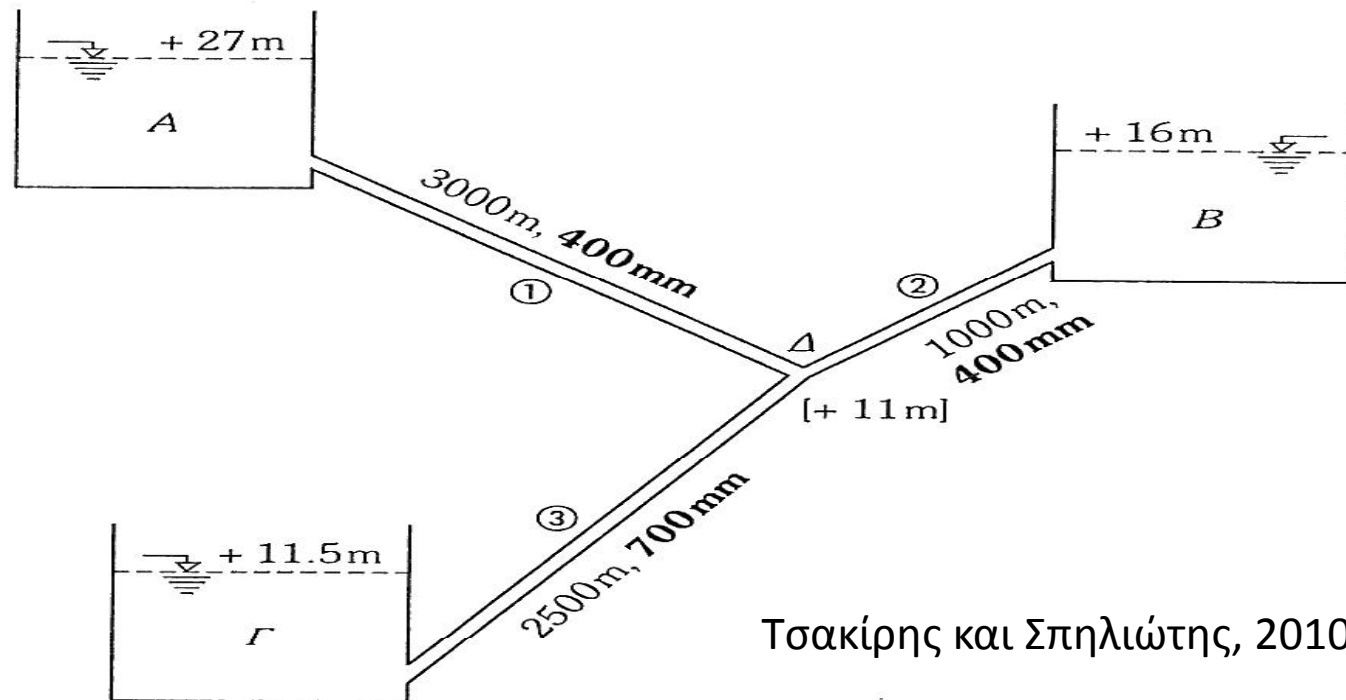
Έτσι αν $z > J$, $\text{sign}(z-J) = +1$, η ροή κατευθύνεται (συγκλίνει) προς τον κόμβο και θα είναι και η ταχύτητα θετική

Έτσι αν $z < J$, $\text{sign}(z-J) = -1$, η ροή αποκλίνει από τον κόμβο και θα είναι και η ταχύτητα αρνητική

Εφαρμογή

Προσδιορίστε την παροχή σε κάθε αγωγό της παρακάτω διάταξης τριών δεξαμενών. Το υψόμετρο της στάθμης του νερού στις δεξαμενές Α, Β, Γ είναι

ναί $+ 27 \text{ m}$, $+ 15 \text{ m}$ και $+ 11.5 \text{ m}$ αντίστοιχα. Το υψόμετρο του κόμβου Κ είναι $+ 14 \text{ m}$, ενώ τα μήκη και οι διαμέτροι των αγωγών απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα. Να προσδιοριστεί επίσης, το ύψος πίεσης στο Κ. Θεωρήστε τραχύτητα υλικού 1 mm .



Τσακίρης και Σπηλιώτης, 2010

Σχ. 2.18: Διάταξη τριών διασυνδεομένων δεξαμενών.

ΑΔΕ μεταξύ δεξαμενών και του σημείου διακλάδωσης

$$\left. \begin{aligned} z_1 - J = h_{f,1 \rightarrow J} &= \frac{8 f_1 \cdot L_{1 \rightarrow \kappa}}{g \pi^2 D_1^5} Q_1^2, & R_1 &= \frac{8 f_1 \cdot L_{1 \rightarrow \kappa}}{g \pi^2 D_1^5} \\ z_2 - J = h_{f,2 \rightarrow J} &= \frac{8 f_2 \cdot L_{2 \rightarrow \kappa}}{g \pi^2 D_2^5} Q_2^2, & R_2 &= \frac{8 f_2 \cdot L_{2 \rightarrow \kappa}}{g \pi^2 D_2^5} \\ J - z_3 = h_{f,J \rightarrow 3} &= \frac{8 f_3 \cdot L_{\kappa \rightarrow 3}}{g \pi^2 D_3^5} Q_3^2, & R_3 &= \frac{8 f_3 \cdot L_{\kappa \rightarrow 3}}{g \pi^2 D_3^5} \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Με δεδομένο ότι δεν είναι γνωστή η παροχή, συνεπώς άγνωστος παραμένει ο συντελεστής τριβής για κάθε κλάδο και η παροχή που προσδιορί-

$$J = \frac{p}{\rho g} + z$$

Άρα αν ηξέρα το J θα είχα να λύσω ανεξάρτητα 3 περιπτώσεις με το 2 βασικό πρόβλημα της Υδραυικής (με δοκιμές)

Σε προβλήματα με διακλαδιζόμενους αγωγούς θεωρώ
αμελητέο ύψος τοπικών απωλειών και υψών κινητικής
ενέργειας. Γραμμή ενέργειας και πιεζομετρική γραμμή
συμπίπτουν

Επομένως τα 3 υποπροβλήματα που προέκυψαν μπορούν
να λυθούν με τη ρητή εξίσωση εάν ήξερα το ύψος
πιεζομετρικής γραμμής στο J

ε. Προσδιορίζω την παροχή και την ταχύτητα για κάθε κλάδο:

$$V_j = -\text{sign}(z_i - J) \cdot 2 \sqrt{\frac{2g|z_i - J|D}{L}} \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2g|z_i - J|D}} \right)$$

όπου: $j = 1, 2, 3$, για κάθε σωλήνα.

Δοκιμές...

- Επομένως αυθαίρετα **υποθέτω** διάφορες τιμές για το **ύψος πιεζομετρικής γραμμής στο J**.
- Επιλύεται για κάθε κλάδο ξεχωριστά το 2 βασικό πρόβλημα της Υδραυλικής ή με δοκιμές ή με την προηγούμενη ρητή σχέση.
- Θα είναι **σωστή η υπόθεση αν επαληθεύει τη διατήρηση της μάζας στον κόμβο** (την αναπαριστά η συνάρτηση **F**)

δοκιμή

ρο από τη στάθμη της χαμηλότερης δεξαμενής. Έστω $+15 \text{ m} = J$.

c. Προσδιορίζεται η παροχή και η ταχύτητα για κάθε κλάδο:

$$V_1 = -\text{sign}(27 - 15) \cdot 2 \sqrt{\frac{2g|27 - 15|0.4}{3000}} \cdot \log \left(\frac{0.001}{3.7 \cdot 0.4} + \frac{2.51v}{0.4} \sqrt{\frac{3000}{2g|27 - J|0.4}} \right) = 1.11 \text{ m/s}$$

Όμοια $V_2 = 0.55 \text{ m/s}$ και $V_3 = -0.93 \text{ m/s}$.

Παρατηρήστε ότι η ταχύτητα είναι θετική και τον αγωγό (2), εφόσον η παροχή του αγωγού (2) πράγματι κατευθύνεται προς τον κόμβο K , επειδή το ύψος πιεζομετρικής γραμμής στο Δ είναι μικρότερο από το υψόμετρο της στάθμης της επιφανείας του νερού στην ενδιάμεση δεξαμενή (2).

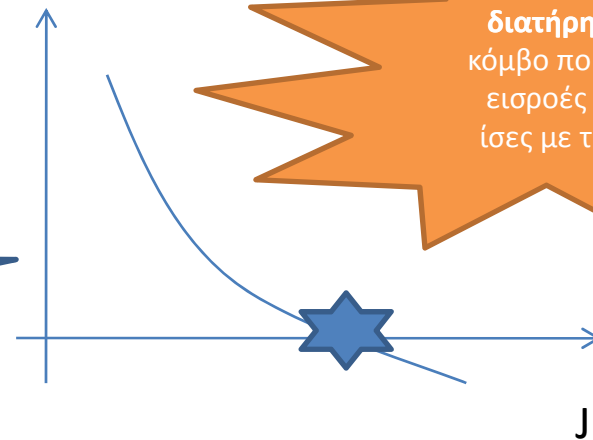
d. Προσδιορίζεται η συνάρτηση F (εισροές - εκροές στον κόμβο K)

$$\begin{aligned} F(15) &= V_1 \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \right) + V_2 \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right) + V_3 \left(\frac{\pi D_3^2}{4} \right) = \\ &= 1.11 \left(\frac{\pi \cdot 0.4^2}{4} \right) + 0.55 \left(\frac{\pi \cdot 0.4^2}{4} \right) + (-0.93) \left(\frac{\pi \cdot 0.7^2}{4} \right) = \\ &= -0.15 \neq 0 \end{aligned}$$

(σημειώνεται ότι η F είναι αρνητική συνεπώς θα πρέπει να αυξηθούν οι εισροές και να ελαττωθούν οι εκροές. Αυτό μπορεί να γίνει κατορθωτό με τη μείωση του ύψους πιεζομετρικής γραμμής στο K)

Επίλυση με δοκιμές
Κατάστρωση γραφήματος

Με την αύξηση του ύψους ενεργείας στο K αυξάνονται οι εκροές και μειώνονται οι εισροές στον κόμβο



Η συνάρτηση F εκφράζει τη διατήρηση της μάζας στον κόμβο που για μόνιμη ροή, οι εισροές θα πρέπει να είναι ίσες με τις εκροές, δηλ $F = 0$

Η-εξισώσεις

- Το παράδειγμα των διακλαδιζόμενων δεξαμενών ανήκει στην περίπτωση των Η-εξισώσεων:
 - Άγνωστοι αποτελούν **τα ύψη πιεζομετρικής γραμμής στους κόμβους, Η.**
 - Από **ΑΔΕ** και τη θεώρηση εξίσωσης για τις **γραμμικές απώλειες ενέργειας** προκύπτει η **παροχή** ως συνάρτηση των **υψών πιεζομετρικής γραμμής**
 - Τελικά τα **ύψη πιεζομετρικής γραμμής** θα πρέπει να δίνουν τέτοιες παροχές που θα επαληθεύουν τη **διατήρηση της μάζας στον κόμβο** (ή στους κόμβους για πολλαπλές διακλαδώσεις, αλλαγή διαμέτρων κλπ)

Με βάση την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι με δεδομένο το ύψος πιεζομετρικής γραμμής J και με γνωστές τις στάθμες των δεξαμενών μπορούν να προσδιορισθούν οι παροχές και συνακόλουθα η διορθωτική τιμή για το ύψος πιεζομετρικής γραμμής J . Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα με την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson προτείνονται τα παρακάτω βήματα:

- Ορίζω ένα κριτήριο σύγκλισης για τις διορθωτικές τιμές του ύψους πιεζομετρικής γραμμής στο J (ΔJ) πρακτικά κοντά στο μηδέν.
- Θεωρώ μία αρχική τιμή του ύψους πιεζομετρικής γραμμής J_0 που θα είναι μικρότερο από τη στάθμη της υψηλότερης δεξαμενής και χαμηλότερο από τη στάθμη της χαμηλότερας δεξαμενής.
- Προσδιορίζω την παροχή και την ταχύτητα για κάθε κλάδο:

$$V_j = -\text{sign}(z_i - J) \cdot 2 \sqrt{\frac{2g|z_i - J|D}{L}} \log\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51\nu}{D} \sqrt{\frac{L}{2g|z_i - J|D}}\right)$$

όπου: $j = 1, 2, 3$, για κάθε σωλήνα.

- Προσδιορίζεται η συνάρτηση F (εισροές - εκροές στον κόμβο K)
 $F = Q_1 + \dots + Q_N$, N ο αριθμός των κλάδων που συμβάλλουν στον κόμβο K .

- Αν η F ικανοποιεί το κριτήριο τερματισμού τότε σταματά ο αλγόριθμος. Ειδιάλλως προσδιορίζω τη διορθωτική τιμή για το ύψος πιεζομετρικής γραμμής στο J :

$$\Delta J = - \frac{F(J_0)}{\left. \frac{\partial F}{\partial J} \right|_{J_0}}$$

(Lansey and Mays, 1999),

$$\frac{dF}{dJ} = - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|R_1 Q_1|} + \frac{1}{|R_2 Q_2|} + \dots + \frac{1}{|R_N Q_N|} \right)$$

$$J_1 = \Delta J + J_0$$

- Επαναλαμβάνω τη διαδικασία μέχρι να συγκλίνει ο αλγόριθμος σε σταθερές τιμές για το J .

Εκτός ύλης

Επίλυση με
μέθοδο Newton-
Raphson

Εκτός ύλης, αλλά
σαν λύση θα γίνει
αποδεκτή

Εργασία για εμφάθυνση
για όποιον γράψει 9.00+ και θελει
βελτιωση

Water Distribution System Analysis: Newton-Raphson Method Revisited

M. Spiliotis, M.ASCE¹; and G. Tsakiris, M.ASCE²

Abstract: Looped water distribution systems are conventionally analyzed using iterative methods such as Cross, Linear, Newton-Raphson, and Gradient algorithm methods. Depending on the unknown (hydraulic head or discharge), the methods are characterized as h or Q methods. This paper focuses on the h -Newton-Raphson method, which uses the Darcy-Weisbach head loss equation. The paper presents a procedure for improving the h -Newton-Raphson iterative procedure by directly calculating the discharge of each branch by using the Swamee and Jain equation. The proposed procedure leads to a simplified algorithm and more accurate determination of the Jacobian matrix, which accelerates the convergence of the algorithm. DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000364. © 2011 American Society of Civil Engineers.

CE Database subject headings: Pipe networks; Flow resistance; Water distribution systems.

Author keywords: Looped pipe network; Newton-Raphson; h -solution; Flow resistance.

Introduction

Analysis of the flow conditions in a looped pipe network is customarily described by a set of equations expressing the relationship of the three basic determinants, that is, the discharge Q and diameter D of the branches, and the hydraulic head h at each junction (node). The Cross, Linear (Wood and Charles 1972), Newton-Raphson (e.g., Shamir and Howard 1968; Larock et al. 2000), and Gradient algorithm (Todini and Pilati 1988) methods are among the most popular methods for analyzing looped pipe networks. All these methods are numerical iterative algorithms aimed at solving a set of linear and non-linear equations. Depending on the unknown determinant, these methods are characterized as h or Q methods (Jeppson 1976; Swamee and Sharma 2008).

Of particular interest is the method of h -Newton-Raphson. In Europe, this method often uses the Darcy-Weisbach head loss equation instead of other empirical equations for achieving higher accuracy. However, in each iteration the discharge changes in each branch, and therefore the resistance to flow in the branch changes. Furthermore, the Darcy-Weisbach friction coefficient f is considered independent of the total hydraulic head at the beginning and end of the branch during the iteration. Although the f coefficient changes for each iteration, it is considered constant during calculation of the derivatives. This assumption creates a

complicated calculation procedure and results in slow convergence to the final results.

The paper presents a procedure for improving the h -Newton-Raphson iterative procedure by directly calculating the flow discharge of each branch by using the equation of Swamee and Jain (1976). The proposed procedure leads to a more simplified algorithm and more accurate determination of the Jacobian matrix, which accelerates convergence of the algorithm.

The calculation of the discharge at each branch of a water distribution network can be calculated based on the hydraulic head losses in the branch (e.g., Walski et al. 2003; Spiliotis and Tsakiris 2007). According to the conventional methodology, which is based on the Darcy-Weisbach equation, this can be achieved by establishing an iterative process (e.g., sub-Newton-Raphson algorithm or trial-error method) based on the following equations:

$$|h_i - h_n| = \frac{8f_n L_n}{g\pi^2 D_n^5} Q_n^2 \quad (1a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_n}} = -21 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51}{R_n \sqrt{f_n}} \right) \quad (1b)$$

where ν = kinematic viscosity of water; Q_n and Res_n = discharge (m^3/s) and the resistance ($Res_n = 8f_n L_n / g\pi^2 D_n^5$) of the branch i - n [$m/(m^3/s)^2$], respectively. Also, ϵ = roughness coefficient (m); R_n = Reynolds number; f_n = friction factor. Finally, D_n = internal diameter (m); L_n = length of the branch (m); h_i and h_n = hydraulic head at the nodes i and n (m), respectively. Eq. (1b) is the well-known equation of Colebrook-White valued for $R_n > 4,000$.

The method of h -Newton-Raphson based on the continuity equation at each node n may be written (e.g., Lamsey and Mays 2000) as follows:

$$\sum_{i \in I(n)} Q_{i-n} = q_n \quad \forall n \in (N-1) \quad (2)$$

where N = total number of nodes of the network; $I(n)$ = set of all branches including the n node; and q_n = water demand concentrated at node n . All the hydraulic heads are assumed to be positive numbers. Thus, the problem is to solve a set of $N-1$ non-linear equations

¹Postdoctoral researcher, Centre for the Assessment of Natural Hazards and Proactive Planning and Laboratory of Reclamation Works and Water Resources Management, School of Rural and Surveying Engineering, National Technical Univ. of Athens, 9 Iroon Polytechniou, 15780, Athens, Greece (corresponding author). E-mail: m.spiliotis@yahoo.gr; water@survey.ntua.gr

²Professor, Centre for the Assessment of Natural Hazards and Proactive Planning and Laboratory of Reclamation Works and Water Resources Management, School of Rural and Surveying Engineering, National Technical Univ. of Athens, 9 Iroon Polytechniou, 15780, Athens, Greece. E-mail: water@survey.ntua.gr

Note. This manuscript was submitted on May 13, 2010; approved on November 16, 2010; published online on November 19, 2010. Discussion period open until January 1, 2012; separate discussions must be submitted for individual papers. This technical note is part of the *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 137, No. 8, August 1, 2011. ©ASCE, ISSN 0733-9429/2011/8-852-855/\$25.00.

with respect to h_n . An efficient way to achieve this is the application of the Newton-Raphson method.

Having determined the hydraulic head at each node, the next step is to determine the corresponding discharges, friction coefficients, and resistances to flow.

Proposed Methodology

Using both the Darcy-Weisbach equation and the equation of Colebrook-White that holds for turbulent flow, it is easy to prove with simple algebraic calculations that the following explicit equation holds (Swamee and Jain 1976):

$$V_{in} = -2\sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}} \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51\nu}{D_n \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}}} \right) \quad (3)$$

This expression of the velocity, known as the Swamee and Jain equation, has the advantage that it is a direct equation, including the influence of the friction factor f_n .

To adjust Eq. (3) in the h -Newton-Raphson method, the following modification may be introduced:

$$Q_{i \rightarrow n} = -\text{sign}(h_i - h_n) \pi D_n^2 / 2 \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}} \times \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51\nu}{D_n \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}}} \right) \quad (4)$$

According to this notation, if $h_i < h_n$, then the discharge at branch i n diverges from node n ($Q_{i \rightarrow n} < 0$). Conversely, if $h_i > h_n$, the discharge at branch i n converges to node n ($Q_{i \rightarrow n} > 0$).

Inserting the previous equations in Eq. (2), the nodal equations of continuity can be written as follows:

$$\frac{\partial F_n}{\partial h_n} = \left\{ \sum_i^{j(n)} \frac{\pi D_n^2}{4} \left[\sqrt{\frac{2gD_n}{L_n}} |h_i - h_n|^{-1/2} \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51\nu}{D_n \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}}} \right) - \frac{1}{\left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51\nu}{D_n \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}}} \right)} 1.09 \frac{\nu}{D_n} |h_i - h_n|^{-1} \right] \right\} \leq 0 \quad (10)$$

The other elements of the Jacobian matrix J_k are characterized by the symmetrical property and can be calculated as follows:

$$\frac{\partial F_n}{\partial h_i} = \frac{\pi D_n^2}{4} \left[-\sqrt{\frac{2gD_n}{L_n}} |h_i - h_n|^{-1/2} \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51\nu}{D_n \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}}} \right) + \frac{1}{\left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51\nu}{D_n \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}}} \right)} 1.09 \frac{\nu}{D_n} |h_i - h_n|^{-1} \right] \geq 0 \quad (11)$$

According to the previous equations, the function F_n is a decreasing function of h_n and an increasing function of h_i . Therefore, according to the proposed methodology, the partial derivatives with respect to hydraulic head take into account the influence of hydraulic heads on the

$$F_n = \sum_i^{j(n)} \left[-\text{sign}(h_i - h_n) \frac{\pi D_n^2}{2} \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}} \times \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D_n} + \frac{2.51\nu}{D_n \sqrt{2gD_n \frac{|h_i - h_n|}{L_n}}} \right) \right] = q_n, \quad \forall n \in n(N-1) \quad (5)$$

A classical method to solve the h -equations in pipe networks is the h -Newton-Raphson method. At iteration k , the Newton-Raphson method is applied to the set of junction equations for the nodal hydraulic head h :

$$\Delta h_k = -J_k^{-1} (F - q)_k \quad (6a)$$

$$h_{k+1} = \Delta h_k + h_k \quad (6b)$$

in which

$$\Delta h_k = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \dots \\ \Delta h_n \\ \dots \\ \Delta h_{N-1} \end{bmatrix}_k \quad (7)$$

$$(F - q)_k = \begin{bmatrix} F_1 - q_1 \\ \dots \\ F_n - q_n \\ \dots \\ F_{N-1} - q_{N-1} \end{bmatrix}_k \quad (8)$$

$$J_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial h_1} & \frac{\partial F_1}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial h_n} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial h_{N-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial h_1} & \frac{\partial F_n}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial h_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial h_{N-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{N-1}}{\partial h_1} & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial h_n} & \dots & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial h_{N-1}} \end{bmatrix}_k \quad (\text{Jacobian matrix}) \quad (9)$$

The diagonal element of the Jacobian matrix can be calculated as follows: