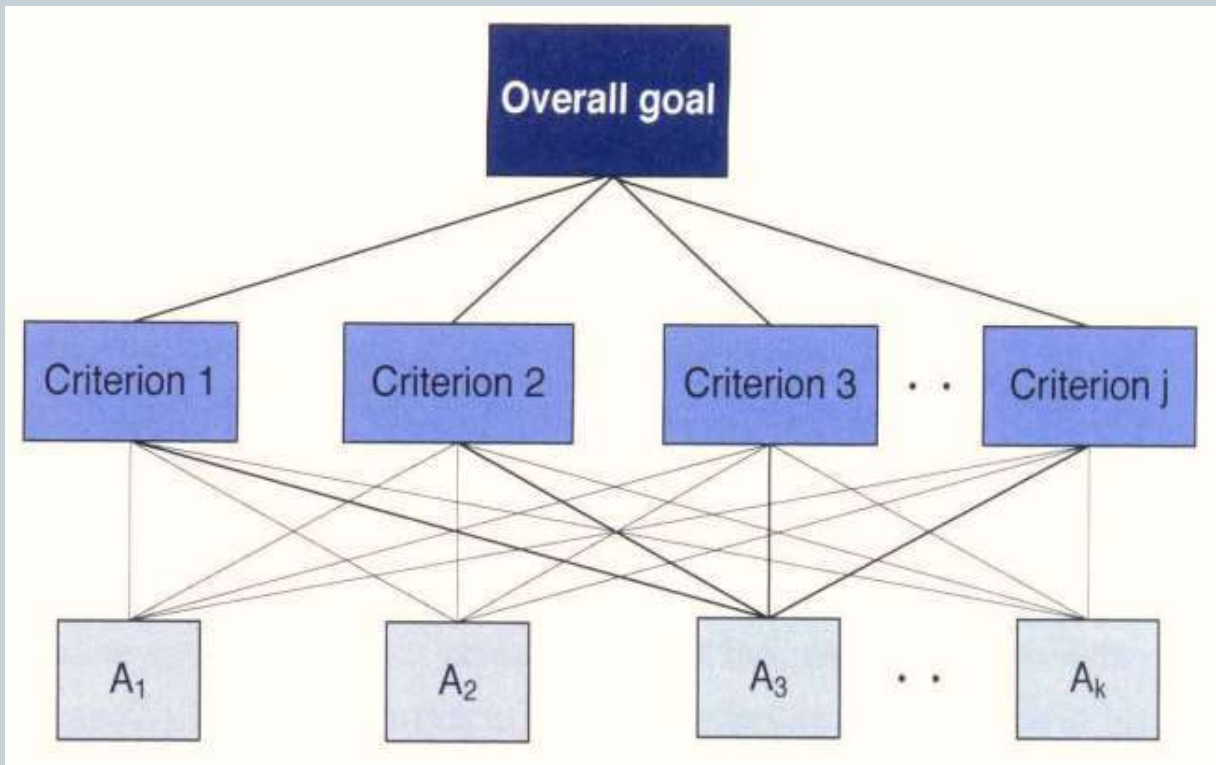


# Αναλυτική Ιεραρχική Διαδικασία (Analytic Hierarchy Process – AHP)

Χ. Παπαδόπουλος – Μ. Σπηλιώτης



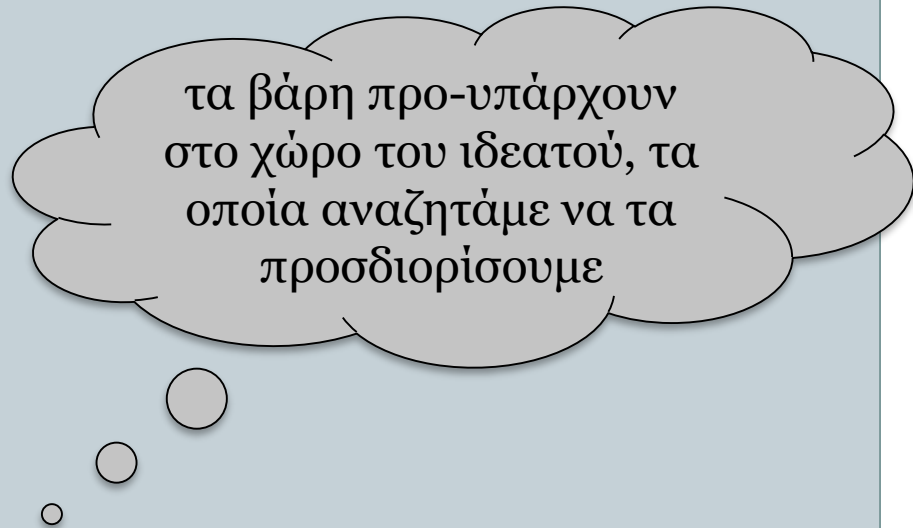
# ΑHP και ο ρόλος της ιδιοτιμής $\lambda(\max)$ (1)



➤ ΑHP: Βασίζεται σε δυαδικές συγκρίσεις, όπου ο αποφασίζων εκφράζει τις προτιμήσεις του με προκαθορισμένη κλίμακα.

✓ Ο πίνακας των αρχικών διμερών συγκρίσεων αποτελεί μία προσέγγιση των λόγων των βαρών μεταξύ των κριτηρίων.

✓ Αυτό υποδηλώνει ότι οι μέθοδοι που προσφέρονται για τη λήψη καλύτερων αποφάσεων θα πρέπει να είναι περισσότερο περιγραφικές και αρκετά



! Για κάθε διμερή σύγκριση υποθέτω (ιδεατή κατάσταση)  $a_{ij} = w_i / w_j$

### Πίνακας 1

| Πόσο σημαντικότερο είναι το κριτήριο $i$ έναντι του κριτηρίου $j$ | Δείκτης σύγκρισης |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------|
| ίδια                                                              | 1                 |
| μέτρια                                                            | 3                 |
| πολύ                                                              | 5                 |
| πάρα πολύ                                                         | 7                 |
| εξαιρετικά περισσότερο                                            | 9                 |

Κλίμακα δεικτών σύγκρισης μεταξύ δύο κριτηρίων  $i$  και  $j$

Επιτρέπεται η χρήση και ενδιάμεσων τιμών

### Πίνακας 2

| Πλήθος στοιχείων  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | $n$                |
|-------------------|---|---|---|---|----|----|----|--------------------|
| Πλήθος συγκρίσεων | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | $\frac{n(n-1)}{2}$ |

Το πλήθος των συγκρίσεων σε ένα τετραγωνικό πίνακα

- Αρχικά, συγκρίνεται κάθε κριτήριο ένα προς ένα με τα υπόλοιπα και συμπληρώνεται ο μισός (το άνω ή το κάτω τρίγωνο) πίνακας.

|           | Κριτήριο1 | Κριτήριο2 | Κριτήριο3 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Κριτήριο1 | (1)       | (3)       | (5)       |
| Κριτήριο2 |           | (1)       | (2)       |
| Κριτήριο3 |           |           | (1)       |



- Τα κελιά της διαγώνιου του πίνακα διμερών συγκρίσεων παίρνουν πάντα μονάδα.

$a_{12}=(w1/w2=3)$  σημαίνει ότι το κριτήριο 1 έχει μέτρια υπεροχή ως προς το κριτήριο 2

- Τα κελιά του άλλου μισού πίνακα συμπληρώνονται βάση της παρακάτω σχέσης:

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

|           | Κριτήριο1       | Κριτήριο2       | Κριτήριο3 |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------|
| Κριτήριο1 | (1)             | (3)             | (5)       |
| Κριτήριο2 | $(\frac{1}{3})$ | (1)             | (2)       |
| Κριτήριο3 | $(\frac{1}{5})$ | $(\frac{1}{2})$ | (1)       |

## Βήματα προσδιορισμού των βαρών από έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων

### 1) Με πρόσθεση στηλών και γραμμών

- α) **πρόσθεση όλων των κελιών κάθε στήλης** των αρχικών διμερών συγκρίσεων
- β) δημιουργία νέου πίνακα όπου τα κελιά κάθε στήλης προκύπτουν από το λόγο  $\alpha_{ij}/\Sigma \alpha_{ij}$  **(διαίρεση κάθε στοιχείου της στήλης με το άθροισμα)**
- γ) **πρόσθεση όλων των κελιών κάθε γραμμής** του νέου πίνακα. Τα αποτελέσματα είναι τα βάρη σε μη κανονικοποιημένη μορφή
- δ) κανονικοποίηση των βαρών **το μέσο όρο**

### 2) Με πολλαπλασιασμό γραμμών (Podvezko, 2009)

- α) πολλαπλασιασμός των κελιών κάθε γραμμής του πίνακα των διμερών συγκρίσεων
- β) εύρεση της νιοστής ρίζας των γινομένων που προέκυψαν για κάθε γραμμή, όπου  $n$ =αριθμός κριτηρίων
- γ) τα αποτελέσματα από το βήμα β αντιστοιχούν στις τιμές των μη κανονικοποιημένων βαρών, συνεπώς σε αυτό το βήμα κανονικοποιούνται τα βάρη

# 1) Μέθοδος πρόσθεσης

Ισχύει:  $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} = \frac{w_i}{w_j}$  και  $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} = \frac{w_j}{w_i}$

Έστω ο παρακάτω πίνακας 2x2

$$\begin{bmatrix} w_1 / w_1 & w_1 / w_2 \\ w_2 / w_1 & w_2 / w_2 \end{bmatrix}$$

Αθροίζω τις στήλες

$$\frac{(w_1 + w_2)}{w_1} \quad \frac{(w_1 + w_2)}{w_2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1 / w_1}{(w_1 + w_2)} & \frac{w_1 / w_2}{(w_1 + w_2)} \\ \frac{w_2 / w_1}{(w_1 + w_2)} & \frac{w_2 / w_2}{(w_1 + w_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{(w_1 + w_2)} & \frac{w_1}{(w_1 + w_2)} \\ \frac{w_2}{(w_1 + w_2)} & \frac{w_2}{(w_1 + w_2)} \end{bmatrix}$$

Δημιουργώ έναν νέο πίνακα όπου το κάθε κελί του θα λαμβάνει τιμή σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{a_{ij}}{\sum a_{ij}}$$

Αν είχα τις ιδανικές συνθήκες έχω σταθερή γραμμή, στην πράξη παίρνω το μέσο όριο

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{(w_1 + w_2)} \\ \frac{w_2}{(w_1 + w_2)} \end{bmatrix}$$

Ιδιοδιάνυσμα βαρών

# 1) Μέθοδος πολλαπλασιασμού

Έστω ο παρακάτω πίνακας 2x2

$$\begin{bmatrix} w_1 / w_1 & w_1 / w_2 \\ w_2 / w_1 & w_2 / w_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1^2}{w_1 \cdot w_2} \\ \frac{w_2^2}{w_1 \cdot w_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{w_1^2}{w_1 \cdot w_2}} \\ \sqrt{\frac{w_2^2}{w_1 \cdot w_2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ισχύει: } a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} = \frac{w_i}{w_j} \text{ και } a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} = \frac{w_j}{w_i}$$

Πολλαπλασιάζω τα κελιά κάθε γραμμής

Υπολογίζω τη νιοστή ρίζα για κάθε τιμή του κελιού της στήλης που προέκυψε. Ο βαθμός της ρίζας είναι ο αριθμός των κριτηρίων. Στην περίπτωσή μας υπολογίζω την τετραγωνική ρίζα αφού τα κριτήρια είναι 2, δηλαδή αφού έχω πίνακα 2x2

Για την κανονικοποίηση των βαρών αθροίζω την στήλη με τα μη κανονικοποιημένα βάρη και έπειτα διαιρώ το κάθε μη κανονικοποιημένο βάρος με το συνολικό άθροισμα

## Αξιολόγηση της ΑΗΡ με το δείκτη συνέπειας CI και το λόγο συνέπειας CR

$CI = (\lambda_{max} - n) / (n - 1)$  όπου  $n$  = αριθμός κριτηρίων

$CR = CI / RI$       Εάν  $CR \leq 0.1$  ο πίνακας  
είναι αποδεκτά συνεπής

όπου  $RI$  = τυχαίος δείκτης συνέπειας :

| n  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| RI | 0,00 | 0,00 | 0,58 | 0,90 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 | 1,49 |

Saaty, 1987



Σε έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων  $A_{n \times n}$ , αποδεικνύεται **ότι στην ιδεατή περίπτωση**, δηλαδή στην περίπτωση που οι αρχικές διμερείς συγκρίσεις εκφράζουν απόλυτα τους λόγους μεταξύ των βαρών των κριτηρίων  $w_i/w_j$  ισχύει:

$$\lambda_{\max} = n$$

Στο χώρο του  
ιδεατού η  $\lambda_{\max} = n$

Επαλήθευση  
στην ιδεατή  
κατάσταση

$$A\mathbf{w} = \lambda_{\max} \mathbf{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \frac{w_1}{w_4} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} & \frac{w_2}{w_4} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} & \frac{w_3}{w_4} \\ \frac{w_4}{w_1} & \frac{w_4}{w_2} & \frac{w_4}{w_3} & \frac{w_4}{w_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\max} w_1 \\ \lambda_{\max} w_2 \\ \lambda_{\max} w_3 \\ \lambda_{\max} w_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Στην πράξη η  $\lambda_{\max} > n$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4w_1 \\ 4w_2 \\ 4w_3 \\ 4w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\max} w_1 \\ \lambda_{\max} w_2 \\ \lambda_{\max} w_3 \\ \lambda_{\max} w_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{\max} = 4 = n$$

## Βήματα προσδιορισμού της $\lambda_{max}$ , του $CI$ και του $CR$

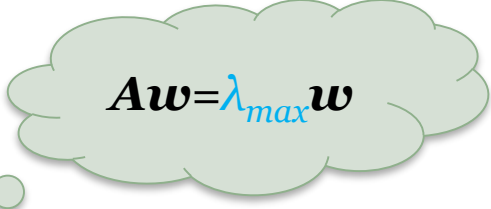
- έλεγχος το κατά πόσο ο πίνακας  $A$  των αρχικών διμερών συγκρίσεων είναι 'συνεπής' (consistent) με τα πραγματικά βάρη που διέπουν τα κριτήρια:

προσδιορισμός  $\lambda_{max} \Rightarrow$  υπολογισμός  $CI \Rightarrow$  υπολογισμός  $CR$

- α)** Πολλαπλασιάζεται ο πίνακας των διμερών συγκρίσεων  $n \times n$  με το διάνυσμα των βαρών  $n \times 1$  που προσδιορίστηκε και προκύπτει έτσι ένα νέο διάνυσμα  $n \times 1$ .
- β)** Διαιρείται το νέο διάνυσμα με το διάνυσμα των βαρών και προκύπτει τελικό διάνυσμα  $n \times 1$  όπου κάθε κελί αντιστοιχεί σε μία τιμή  $\lambda$ .
- γ)** Ως  $\lambda_{max}$ , λαμβάνεται η μέση τιμή των κελιών του τελικού διανύσματος.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_n + \dots + a_{mn}w_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_n + \dots + a_{mn}w_n \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$


$$Aw = \lambda_{max} w$$

Παίρνω τον μέσο όρο από το διάνυσμα  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

όπου  $a_{ij} = w_i / w_j$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΑΗΡ

Οι φοιτητές του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών αξιολογούνται σε κάθε μάθημα με βάση τέσσερα κριτήρια: α) προφορική εξέταση, β) θέμα, γ) test, δ) γραπτή εξέταση. Κάθε κριτήριο συμβάλλει στον τελικό βαθμό του μαθήματος διαφορετική βαρύτητα, δηλαδή δεν έχουν την ίδια σημαντικότητα.

Αξιοποιώντας τις παρακάτω πληροφορίες, να εξαχθούν τα βάρη του κάθε κριτηρίου (εφαρμόστε τη μέθοδο ΑΗΡ)

- Η **γραπτή εξέταση** είναι **μέτρια πιο** σημαντική από την **προφορική εξέταση**, **πολύ** πιο σημαντική από το **θέμα** και **πάρα πολύ** πιο σημαντική από το **test**
- Η **προφορική εξέταση** είναι **το ίδιο** σημαντική με το θέμα και **μέτρια πιο** σημαντική από το **test**
- Το **θέμα** είναι **πολύ** πιο σημαντικό από το **test**

# ΕΠΙΛΥΣΗ: Μέθοδος Πρόσθεσης

Με βάση την κλίμακα δεικτών κατασκευάζω τον πίνακα διμερών συγκρίσεων και προσθέτω τις στήλες

Πίνακας 1

| Πόσο σημαντικότερο είναι το κριτήριο i έναντι του κριτηρίου j | Δείκτης σύγκρισης |
|---------------------------------------------------------------|-------------------|
| ίδια                                                          | 1                 |
| μέτρια                                                        | 3                 |
| πολύ                                                          | 5                 |
| πάρα πολύ                                                     | 7                 |
| εξαιρετικά περισσότερα                                        | 9                 |

| ΚΡΙΤΗΡΙΑ          | Προφορική εξέταση | Θέμα | Test  | Γραπτή εξέταση |
|-------------------|-------------------|------|-------|----------------|
| Προφορική εξέταση | 1.00              | 1.00 | 3.00  | 0.33           |
| Θέμα              | 1.00              | 1.00 | 5.00  | 0.20           |
| Test              | 0.33              | 0.20 | 1.00  | 0.11           |
| Γραπτή εξέταση    | 3.00              | 5.00 | 9.00  | 1.00           |
|                   | 5.33              | 7.20 | 18.00 | 1.64           |

Δημιουργώ έναν δεύτερο πίνακα διαιρώντας το κάθε κελί με το άθροισμα της κάθε στήλης

| ΚΡΙΤΗΡΙΑ          | Προφορική εξέταση | Θέμα | Test | Γραπτή εξέταση |
|-------------------|-------------------|------|------|----------------|
| Προφορική εξέταση | 0.19              | 0.14 | 0.17 | 0.20           |
| Θέμα              | 0.19              | 0.14 | 0.28 | 0.12           |
| Test              | 0.06              | 0.03 | 0.06 | 0.07           |
| Γραπτή εξέταση    | 0.56              | 0.69 | 0.50 | 0.61           |

| w       |
|---------|
| 0.17394 |
| 0.18145 |
| 0.05335 |
| 0.59126 |

Για την αξιολόγηση της μεθόδου υπολογίζω το  $\lambda_{max}$ , το CI και το CR όπως περιεγραφήκαν σε προηγούμενη διαφάνεια

Για την εξαγωγή των βαρών  $w$  όρος γραμμής

$$\lambda(\text{average}) = \lambda_{max} = 1.10, \quad CI = 0.033, \quad CR = 0.037 < 0.10$$

# Έλεγχος συνέπειας

**A**

**w**

| ΚΡΙΤΗΡΙΑ          | Προφορική εξέταση | Θέμα | Test  | Γραπτή εξέταση |  | w       |
|-------------------|-------------------|------|-------|----------------|--|---------|
| Προφορική εξέταση | 1.00              | 1.00 | 3.00  | 0.33           |  | 0.17394 |
| Θέμα              | 1.00              | 1.00 | 5.00  | 0.20           |  | 0.18145 |
| Test              | 0.33              | 0.20 | 1.00  | 0.11           |  | 0.05335 |
| Γραπτή εξέταση    | 3.00              | 5.00 | 9.00  | 1.00           |  | 0.59126 |
|                   | 5.33              | 7.20 | 18.00 | 1.64           |  |         |



| Aw          | $\lambda = Aw/w$ |
|-------------|------------------|
| 0.712525025 | 4.096394209      |
| 0.74039039  | 4.080475821      |
| 0.213315399 | 3.998397342      |
| 2.500469219 | 4.229029442      |

$4 \times 4 * 4 \times 1 = 4 \times 1 = Aw$   
 Διαιρώ με το κάθε βάρος και παίρνω το μέσο όρο =  $\lambda$

Για την αξιολόγηση της μεθόδου υπολογίζω το  $\lambda_{max}$ , το CI και το CR όπως περιεγραφήκαν σε προηγούμενη διαφάνεια

Θεωρητικά  $\lambda = \text{αριθμός κριτηρίων}$

$\lambda (\text{average}) = \lambda_{max} = 4.10$  ,  $CI = 0.033$  ,  $CR = 0.037 < 0.10$

# ΕΠΙΛΥΣΗ: Μέθοδος Πολλαπλασιασμού

Με βάση την κλίμακα δεικτών υπολογίζω το γινόμενο κάθε γραμμής του πίνακα

Πίνακας 1

| Πόσο σημαντικότερο είναι το κριτήριο i έναντι του κριτηρίου j | Δείκτης σύγκρισης |
|---------------------------------------------------------------|-------------------|
| ίδια                                                          | 1                 |
| μέτρια                                                        | 3                 |
| πολύ                                                          | 5                 |
| πάρα πολύ                                                     | 7                 |
| εξαιρετικά περισσότερο                                        | 9                 |

| ΚΡΙΤΗΡΙΑ          | Προφορική εξέταση | Θέμα | Test | Γραπτή εξέταση |                |
|-------------------|-------------------|------|------|----------------|----------------|
| Προφορική εξέταση | 1.00              | 1.00 | 3.00 | 0.33           | 1.0000000000   |
| Θέμα              | 1.00              | 1.00 | 5.00 | 0.20           | 1.0000000000   |
| Test              | 0.33              | 0.20 | 1.00 | 0.11           | 0.0074074074   |
| Γραπτή εξέταση    | 3.00              | 5.00 | 9.00 | 1.00           | 135.0000000000 |

Υπολογίζω τη νιοστή ρίζα του κάθε κελιού (στην περίπτωση μας την τέταρτη ρίζα) και το ολικό άθροισμα της στήλης που προέκυψε

|        | w       | Aw    | $\lambda = Aw/w$ | RI (από πίνακα)                               | CI    | CR                   |
|--------|---------|-------|------------------|-----------------------------------------------|-------|----------------------|
| 1.000  | 0.17538 | 0.704 | 4.016            | 0.9                                           | 0.005 | 0.006 ( $\geq 0.1$ ) |
| 1.000  | 0.17538 | 0.728 | 4.149            |                                               |       |                      |
| 0.293  | 0.05145 | 0.211 | 4.109            |                                               |       |                      |
| 3.409  | 0.59780 | 2.464 | 4.122            |                                               |       |                      |
| 5.7020 |         |       | 4.0989           | $\lambda_{\max} = \text{average of } \lambda$ |       |                      |

Για την αξιολόγηση της μεθόδου υπολογίζω το  $\lambda_{\max}$ , το CI και το CR όπως περιεγραφήκαν σε προηγούμενη διαφάνεια

Για την εξαγωγή των βαρών προσθέτω τις γραμμές και κανονικοποιώ

**Ευχαριστούμε για την προσοχή**

**Thanks for attention**

# ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ



## Shannon's method of Entropy (1948)



Η εκτίμηση των βαρών των κριτηρίων **μέσα από τα δεδομένα** με τη μέθοδο της εντροπίας για έναν πίνακα  $A=n \times m$  από  $n$  εναλλακτικές  $x$  και  $m$  κριτήρια  $c$  πραγματοποιείται με την εξής διαδικασία:

➤ Κατασκευή κανονικοποιημένου πίνακα  $r$  όπου το σημείο του πίνακα δίνεται από τη σχέση:

$$r_j^i = \frac{x_j^i}{\sum_{i=1}^n (x_j^i)},$$

$$r_j^i = \frac{x_j^i}{\sum_{i=1}^n (x_j^i)}.$$

όπου  $x_{i,j}$  η τιμή του κάθε κριτηρίου για κάθε εναλλακτική

Κανονικοποιημένος πίνακας (από Δεληγιώργη κ.α., 2015)

➤Υπολογισμός του μέτρου της εντροπίας  $e_j$

$$e_j = -k \sum_{i=1}^n r_j^i \ln r_j^i$$

όπου  $k=1/\ln(n)$   
και  $n$ =το σύνολο των εναλλακτικών

➤Εκτίμηση της απόκλισης από τη μέση πληροφορία που περιέχεται σε κάθε κριτήριο :

$$d_j = 1 - e_j$$

➤Υπολογισμός του βάρους για κάθε κριτήριο:

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{k=1}^m d_k}$$

Κανονικοποιημένος πίνακας (από Δεληγιώργη κ.α.,2015)

καταλήγει σε  
διάνυσμα

εξασφαλίζει ότι  
 $0 \leq e_j \leq 1$

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



## Η έννοια της ιδιοτιμής $\lambda$ ενός πίνακα $n \times n$

- Για έναν τετραγωνικό πίνακα  $A$   $n \times n$  υπάρχει ένα διάνυσμα  $x$ , που ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα, τέτοιο ώστε αν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα  $A$ , το  $Ax$  που θα προκύψει είναι βαθμωτό μέγεθος πολλαπλάσιο του  $x$ , για κάποιο βαθμωτό  $\lambda$  δηλαδή ισχύει:


$$Ax = \lambda x$$

Το βαθμωτό μέγεθος  $\lambda$  ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα  $A$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{π.χ. } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3x \quad \text{οπότε } \lambda = 3$$

## Εύρεση ιδιοτιμών $\lambda$ σε ένα πίνακα $n \times n$

Ξαναγράφεται η εξίσωση  $Ax = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda Ix$  όπου  $I = \text{o μοναδιαίος πίνακας}$



ή ισοδύναμα  $(\lambda I - A)x = 0$

**Ποιες όμως από όλες τις λύσεις που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα θεωρούνται ιδιοτιμές?**

- Οι **μη τετριμμένες λύσεις** που λαμβάνονται αν και μόνο αν ισχύει η παρακάτω **χαρακτηριστική εξίσωση**:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \text{όπου } \det(\lambda I - A) = \text{η ορίζουσα του πίνακα } (\lambda I - A)$$

- Ανάπτυξη της  $\det(\lambda I - A)$  οδηγεί στο **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (πολυώνυμο του  $\lambda$ ):

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Σε πίνακα  $n \times n$  υπάρχουν  
 **$n$  ιδιοτιμές  $\lambda$**



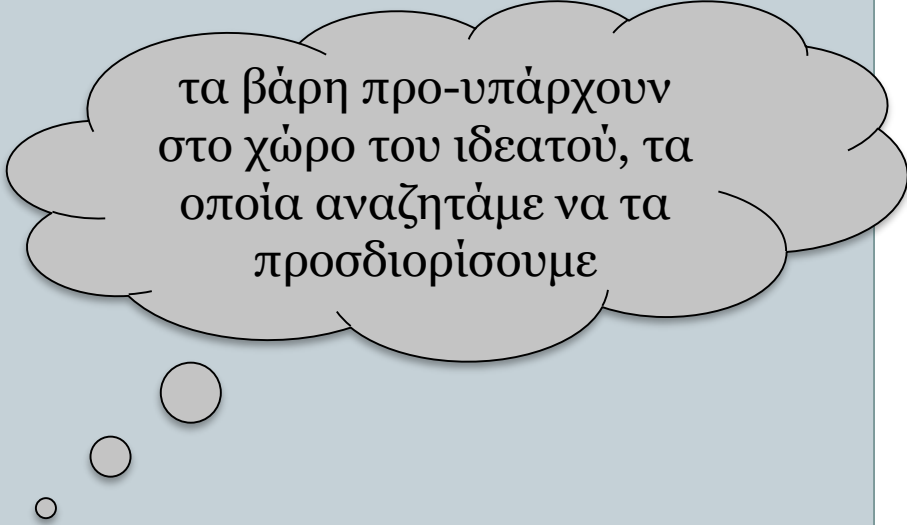
ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου  $\lambda^n$  ισούται με τη μονάδα ( $a_n = 1$ )

# ΑHP και ο ρόλος της ιδιοτιμής $\lambda(\max)$ (1)



➤ ΑHP: Βασίζεται σε δυαδικές συγκρίσεις, όπου ο αποφασίζων εκφράζει τις προτιμήσεις του με προκαθορισμένη κλίμακα.

✓ Ο πίνακας των αρχικών διμερών συγκρίσεων αποτελεί μία προσέγγιση των λόγων των βαρών μεταξύ των κριτηρίων.



τα βάρη προ-υπάρχουν  
στο χώρο του ιδεατού, τα  
οποία αναζητάμε να τα  
προσδιορίσουμε

! Για κάθε διμερή σύγκριση υποθέτω  
(ιδεατή κατάσταση)  $a_{ij} = w_i / w_j$

## ΑΗΡ και ο ρόλος της ιδιότητας $\lambda(\max)$ (2)

Ισχύει:  $Aw = \lambda w$



- Υπάρχουν  $n$  ιδιοτιμές  $\lambda$  που αν πολλαπλασιαστούν με το διάνυσμα των βαρών  $w$  θα ισούνται με το γινόμενο του πίνακα  $A$  των διμερών συγκρίσεων με το διάνυσμα των βαρών  $w$ .
- Από τη θεωρία των ιδιοτιμών (eigen value theory) ισχύει ότι μια μικρή διατάραξη γύρω από μια απλή ιδιοτιμή  $\lambda$  ενός συνεπούς πίνακα  $A$   $n \times n$ , οδηγεί στη μορφή:

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

όπου ο  $A$  παραμένει αντίστροφος πίνακας όμως πλέον μπορεί να μην είναι συνεπής (Saaty, 1990)

$$Aw = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = nw.$$

Κατά Saaty (1990)  $\Rightarrow \lambda_{\max} = n$  (για συνεπή πίνακα) και  $\lambda_{\max} \geq n$  (για ασυνεπή πίνακα)

❖ Αυτό γιατί στην πράξη η απαίτηση  $a_{ij} = w_i/w_j$  δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για όλα τα στοιχεία του πίνακα, θέλουμε όμως η  $\lambda_{\max}$  να τείνει στο  $n$ .



Σε έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων  $A_{n \times n}$ , αποδεικνύεται **ότι στην ιδεατή περίπτωση**, δηλαδή στην περίπτωση που οι αρχικές διμερείς συγκρίσεις εκφράζουν απόλυτα τους λόγους μεταξύ των βαρών των κριτηρίων  $w_i/w_j$  ισχύει:

$$\lambda_{\max} = n$$

Στο χώρο του  
ιδεατού η  $\lambda_{\max} = n$

Στην πράξη η  $\lambda_{\max} > n$

$$\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \frac{w_1}{w_4} \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} & \frac{w_2}{w_4} \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} & \frac{w_3}{w_4} \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \frac{w_4}{w_1} & \frac{w_4}{w_2} & \frac{w_4}{w_3} & \frac{w_4}{w_4} \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$