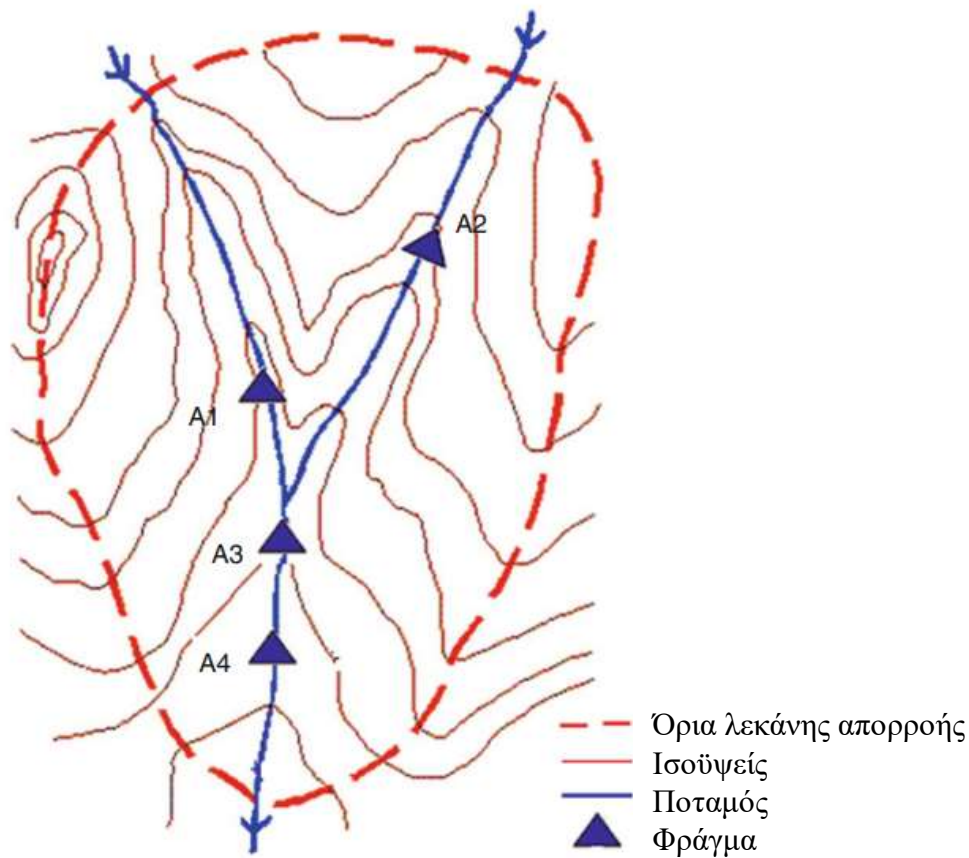


Η καλύτερη επιλογή για τη θέση ενός φράγματος, το οποίο θα κατασκευαστεί σε λεκάνη απορροής, βασίζεται σε τρία κριτήρια:

- 1. στο καθαρό όφελος (σε εκατομμύρια δολάρια),
- 2. στον αριθμό δικαιούχων (σε χιλιάδες άτομα) και
- 3. στην γεωλογική σταθερότητα (σε υποκειμενική κλίμακα μεταξύ 0 και 100).

Οι εναλλακτικές τοποθεσίες φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Τα διανύσματα αξιολόγησης για τις τέσσερις εναλλακτικές θέσεις δίνονται στις στήλες του Πίνακα 1. Καμία από τις εναλλακτικές δεν κυριαρχεί σε όλες τις άλλες.



Κριτήρια	Εναλλακτικές			
	E1	E2	E3	E4
K1	99.6	85.7	101.1	95.1
K2	4	19	40	50
K3	70	50	10	20

[Mahdi Zarghami](#) , [Ferenc Szidarovszky](#), 2011.
Multicriteria Analysis
Applications to Water and Environment
Management
Springer

Μέθοδοι βάσει απόστασης - Distance Based Methods (DBM)

Για όλα τα κριτήρια, οι **ιδανικές συνιστώσες σημείου** είναι οι **μέγιστες τιμές ταυτόχρονα** για όλα τα κριτήρια κάτι που δεν υπάρχει και οι **συνιστώσες του ναδύρ** είναι οι πραγματικές **ελάχιστες τιμές**.

Κριτήρια	Ενναλακτικές			
	E1	E2	E3	E4
K1	99.6	85.7	101.1	95.1
K2	4	19	40	50
K3	70	50	10	20

Άρα το ιδανικό σημείο και το ναδύρ είναι **(101.1, 50, 70)** και **(85.7, 4, 10)** αντίστοιχα.

Μέθοδοι βάσει απόστασης - Distance Based Methods (DBM)

Υπάρχουν δύο βασικές διαφορετικές εκδοχές αυτής της μεθόδου:

1. Υπολογίζεται το ιδανικό σημείο, τα συστατικά του οποίου είναι οι υποκειμενικές ή υπολογισμένες **καλύτερες τιμές** των διαφορετικών κριτηρίων. Το ιδανικό σημείο είναι ένα διάνυσμα. . Η εναλλακτική με τη μικρότερη απόσταση θεωρείται η καλύτερη.
2. Το ιδανικό σημείο καθορίζεται με το ναδίρ, τα συστατικά του οποίου είναι οι υποκειμενικές ή υπολογισμένες **χειρότερες τιμές** των κριτηρίων. Το ναδίρ έχει επίσης n συστατικά. Κάθε εναλλακτική j θα συγκριθεί με το ναδίρ υπολογίζοντας την απόσταση του διανύσματος αξιολόγησης X_j από το ναδίρ. Η εναλλακτική με τη μεγαλύτερη απόσταση επιλέγεται στη συνέχεια ως η καλύτερη επιλογή. Προκειμένου να αποφευχθούν οι δυσκολίες που προκύπτουν από τις διαφορετικές μονάδες των κριτηρίων, όλα τα κριτήρια κανονικοποιούνται, έτσι τα συστατικά του ιδανικού σημείου, το ναδίρ και τα διανύσματα αξιολόγησης κανονικοποιούνται όλα.

Μέθοδοι βάσει απόστασης - Distance Based Methods (DBM)

Στις περισσότερες εφαρμογές χρησιμοποιείται η σταθμισμένη απόσταση Minkowski. Έστω a_i^* συμβολίζει την i η συνιστώσα του ιδανικού σημείου και a_{i*} την i η συνιστώσα του ναδέρ, και υποθέτουμε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός χρησιμοποιείται για την κανονικοποίηση. Τότε η απόσταση της εναλλακτικής j από το ιδανικό σημείο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$D_j^p = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(w_i \frac{a_i^* - a_{ij}}{a_i^* - a_{i*}} \right)^p \right\}^{1/p} \quad (1)$$

Όπου το $p \geq 1$ είναι μια θετική παράμετρος μοντέλου που έχει επιλέξει ο χρήστης. Ομοίως η απόσταση του εναλλακτικού j από το ναδέρ ορίζεται με τη σχέση:

Η σημασία του p . Για πολύ μεγάλες τιμές του p , θεωρητικά συν άπειρο, λαμβάνεται υπόψη μόνο η μεγαλύτερη απόσταση (χειρότερη επίδοση) για να χαρακτηρίσει την επίδοση της εναλλακτικής

$$d_j^p = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(w_i \frac{a_{ij} - a_{i*}}{a_i^* - a_{i*}} \right)^p \right\}^{1/p} \quad (2)$$

Μέθοδοι βάσει απόστασης - Distance Based Methods (DBM)

Η επιλογή της παραμέτρου p είναι πολύ σημαντική, αφού έχει σημαντική επίδραση στην τελική επιλογή.

- $p = 1$ αντιστοιχεί σε απλό μέσο όρο - αντιστάθμιση (ένα κριτήριο με κακή επίδραση «καπελώνει» τα άλλα),
- $p = 2$ στον τετραγωνικό μέσο όρο – ευκλείδεια απόσταση
- $p = \infty$ επιλέγεται εάν ληφθεί υπόψη μόνο η μεγαλύτερη απόκλιση – απόσταση ιδεατού

Δύο συγκεκριμένες μέθοδοι είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς σε εφαρμογές:

1. Συμβιβαστικός Προγραμματισμός (**CP**) και
2. Technique for Order Performance by Similarity to Ideal Solution (**TOPSIS**).

Στην περίπτωση του συμβιβαστικού προγραμματισμού (Zeleny 1973) η απόσταση (3,5) ελαχιστοποιείται.

Για όλα τα κριτήρια, οι ιδανικές συνιστώσες σημείου είναι οι μέγιστες τιμές και οι συνιστώσες του ναδύρ είναι οι πραγματικές ελάχιστες τιμές. Άρα το ιδανικό σημείο και το ναδύρ είναι (101.1, 50, 70) και (85.7, 4, 10) αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο απόστασης (1) με $p = 2$ και βάρη ($w_1 = 0.2, w_2 = 0.3, w_3 = 0.5$) οι αποστάσεις D_j^2 υπολογίζονται:

Κριτήρια	Εναλλακτικές			
	E1	E2	E3	E4
K1	99.6	85.7	101.1	95.1
K2	4	19	40	50
K3	70	50	10	20

$$D_1 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{101.1 - 99.6}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{50 - 4}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{70 - 70}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.301$$

$$D_2 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{101.1 - 85.7}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{50 - 19}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{70 - 50}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.33$$

Η πρώτη εναλλακτική δίνει τη μικρότερη απόσταση, άρα είναι η καλύτερη επιλογή.

$$D_3 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{101.1 - 101.1}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{50 - 40}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{70 - 10}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.504$$

$$D_4 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{101.1 - 95.1}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{50 - 50}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{70 - 20}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.424$$

Η κατάταξη των εναλλακτικών μπορεί επίσης να ληφθεί ταξινομώντας τις σε αυξανόμενες τιμές D_j^2 . Στην περίπτωση μας:

$$E_1 > E_2 > E_4 > E_3$$

TOPSIS συνδυάζει τις αποστάσεις D_j^1 και d_j^1 από το ιδανικό σημείο και από το ναδίρ σε ένα συνδυασμένο μέτρο:

$$F_j^p = \frac{d_j^p}{D_j^p + d_j^p} \quad (3)$$

$$d_1^2 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{99.6 - 85.7}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{4 - 4}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{70 - 10}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.532$$

$$d_2^2 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{85.7 - 85.7}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{19 - 4}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{50 - 10}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.347$$

$$d_3^2 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{101.1 - 85.7}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{40 - 4}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{10 - 10}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.308$$

$$d_4^2 = \left\{ 0.2^2 \left(\frac{95.1 - 85.7}{101.1 - 85.7} \right)^2 + 0.3^2 \left(\frac{50 - 4}{50 - 4} \right)^2 + 0.5^2 \left(\frac{20 - 10}{70 - 10} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 0.334$$

Παρατηρήστε ότι οι ποσότητες μέσα στις παρενθέσεις είναι οι κανονικοποιημένοι αριθμοί αξιολόγησης που αναφέρονται στον Πίνακα 1.

Τα συνδυασμένα μέτρα «καλότητας» της μεθόδου TOPSIS υπολογίζονται στην συνέχεια:

$$F_1^2 = \frac{0.532}{0.532 + 0.301} \approx 0.639$$

$$F_2^2 = \frac{0.347}{0.347 + 0.330} \approx 0.513$$

$$F_1^2 = \frac{0.308}{0.308 + 0.504} \approx 0.379$$

$$F_1^2 = \frac{0.334}{0.334 + 0.424} \approx 0.441$$

Δεδομένου ότι η μεγαλύτερη τιμή F_j^p υποδηλώνει καλύτερη εναλλακτική, η κατάταξη των τεσσάρων θέσεων φράγματος έχει ως εξής:

$$E_1 > E_2 > E_4 > E_3$$