ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ (ΔΥΠ)

Εισαγωγή

- Αύξηση του πληθυσμού ⇒ διαρκώς αυξανόμενες ανάγκες σε νερό και τροφή
- Ανάπτυξη ⇒ δραστηριότητες ⇒ αύξηση των αναγκών νερού
- Επομένως, ανάγκη για όλο και μεγαλύτερη αξιοποίηση των υδατικών πόρων
- Εξαιρετικά περιορισμένη ποσότητα γλυκού νερού στον πλανήτη μας (περίπου 0.33% της συνολικά εκτιμώμενης ποσότητας νερού στη γη)
- Επιτακτική η ανάγκη ανάπτυξης συστημάτων ελέγχου και διαχείρισης, που αποβλέπουν στη βέλτιστη διάθεση των υδατικών πόρων.
- Δύο ειδών δραστηριότητες που αφορούν τους υδατικούς πόρους:
  α) Έργα (έργα ανάπτυξης υδατικών πόρων, π.χ. δίκτυα ύδρευσης, γεωτρήσεις κ.λπ.)
  β) Εξασφάλιση βέλτιστης χρήσης νερού σήμερα, αλλά και στο μέλλον
- Η ΔΥΠ στηρίζεται και σε άλλες επιστημονικές περιοχές, π.χ. Οικονομική, Επιχειρησιακή Έρευνα.
- Η Υδρολογία παρέχει τις εκτιμήσεις των βασικών παραμέτρων, που απαιτούνται για οποιαδήποτε διαχείριση.

Στόχοι της ΔΥΠ

α) Να προμηθεύσει νερό επαρκούς ποσότητας και κατάλληλης ποιότητας για την, κατά το δυνατόν, ικανοποίηση των οικιακών, αγροτικών, βιομηχανικών, ενεργειακών και άλλων αναγκών.

β) Να προστατεύσει τους υδατικούς πόρους από τη ρύπανση.

γ) Να παρέχει ικανοποιητική προστασία από τα ακραία υδρολογικά φαινόμενα (πλημμύρες-ξηρασίες).

Κανόνες της ΔΥΠ

α) Ισομερής κατανομή του νερού μεταξύ των χρηστών με βάση αντικειμενικά κριτήρια

β) Οικονομική βελτιστοποίηση της χρήσης νερού τώρα και στο μέλλον

γ) Αποφυγή βλαβών και άλλων αρνητικών συνεπειών (όπως καταστροφή πόρων και περιβάλλοντος)

δ) Βιωσιμότητα της ανάπτυξης (long-term sustainability of the development)
(βιώσιμη ανάπτυξη: διατήρηση των πόρων και του περιβάλλοντος)

Ομάδες ενδιαφερομένων για τη ΔΥΠ

- Χρήστες του νερού
- Αυτοί που παίρνουν αποφάσεις (πολιτικοί, κυβέρνηση κ.λπ.)
- Μελετητές-Ερευνητές-Τεχνοκράτες

Δραστηριότητες της ΔΥΠ (ως οργανισμού)

- Έρευνα και μελέτη των υδατικών πόρων με οικονομικά και κοινωνικά κριτήρια
- Συλλογή και ανάλυση ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων για τους υφιστάμενους και αναξιοποίητους υδατικούς πόρους, καθώς και για τη ζήτηση σε όλους τους τομείς με βάση τα έργα που έχουν γίνει ή μπορούν να γίνουν.
- Ανάπτυξη στρατηγικής και προετοιμασίας σχεδίων
- Απόφαση για σχέδια και εξασφάλιση αποδοχής και συμμετοχής των διαφόρων ενδιαφερομένων ομάδων
- Εφαρμογή κάθε σχεδίου

Επίπεδα διαχείρισης υδατικών πόρων

- Γενικό επίπεδο (επίπεδο χώρας)
- Επίπεδο υδατικού διαμερίσματος
- Επίπεδο υδρολογικής λεκάνης

Δυνατότητα προσομοίωσης με κατανεμημένη στο χώρο και στο χρόνο πληροφορία (Softwares, GIS)

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΛΕΚΑΝΩΝ

- Αξιοποίηση υδατικών πόρων μιας περιοχής
  - Χωρική κλίμακα: λεκάνη απορροής
  - Συνήθεις χρονικές κλίμακες για τη ΔΥΠ: ετήσια και μηνιαία

  - Λεκάνες απορροής → σε φυσική κατάσταση
    → με ανθρωπογενείς επεμβάσεις

- Διαθέσιμοι υδατικοί πόροι, υδατικό δυναμικό

- Θεωρητικό Επιφανειακό Υδατικό Δυναμικό (ΘΕΥΔ):
  Εκφράζεται από την απορροή του κύριου υδατορρεύματος της λεκάνης στο στόμιο εξόδου της.

- Εκμεταλλεύσιμο Επιφανειακό Υδατικό Δυναμικό (ΕΕΥΔ):
  Τμήμα του ΘΕΥΔ που είναι απολήψιμο για χρήσεις νερού, όταν ληφθούν υπόψη όλα τα έργα αξιοποίησης υδατικών πόρων που υφίστανται ή έχουν μελετηθεί στην εξεταζόμενη λεκάνη απορροής.

- Μέση ετήσια απορροή (MAR: Mean Annual Runoff):
  Μέσω αυτής εκφράζεται το ΘΕΥΔ.

- Για την εκτίμηση του ΘΕΥΔ απαιτείται χρονοσειρά μετρημένης απορροής. Συνήθως αυτή είναι μικρής διάρκειας (κάτω από 15 έως 20 υδρολογικά έτη) ή υπάρχει παντελής έλλειψη μετρήσεων.

- Συνήθως είναι διαθέσιμες χρονοσειρές βροχομετρικών υψών και δυνητικής εξατμισοδιαπνοής.

- Παραγωγή χρονοσειράς εκτιμημένης ή συνθετικής απορροής βάσει ενός μοντέλου βροχής-απορροής

Ταξινόμηση μοντέλων βροχής-απορροής

Κριτήριο 1: Χωρική κατανομή των φυσικών διεργασιών μετασχηματισμού της βροχόπτωσης σε απορροή

- Αδρομερή (lumped): ενιαία λεκάνη απορροής
- Κατανεμημένα (distributed): η λεκάνη απορροής διασπάται σε στοιχειώδη τμήματα

Κριτήριο 2: Είδος μαθηματικών εξισώσεων και σχέσεων για την αναπαράσταση των φυσικών διεργασιών

- Μοντέλα "μαύρου κουτιού" (black box): οι φυσικές διεργασίες αναπαρίστανται από σχέσεις της γενικής θεωρίας της ανάλυσης συστημάτων χωρίς καμία θεώρηση των φυσικών νόμων και εμπειρικών σχέσεων της λεκάνης απορροής.
- Εννοιολογικά ή παραμετρικά μοντέλα (conceptual): οι φυσικές διεργασίες αναπαρίστανται με απλές εμπειρικές μαθηματικές σχέσεις, που περιλαμβάνουν άγνωστες παραμέτρους που εκτιμώνται με βαθμονόμηση (calibration).
- Μοντέλα φυσικής βάσης (physically-based): οι μαθηματικές σχέσεις αναπαριστούν τους φυσικούς νόμους που διέπουν το μετασχηματισμό της βροχόπτωσης σε απορροή.

<u>Κριτήριο 3:</u> Χειρισμός αβεβαιότητας των υδρολογικών μεγεθών

- Αιτιοκρατικά (deterministic): τα υδρολογικά μεγέθη έχουν συγκεκριμένες τιμές (γνωστές ή όχι) χωρίς αβεβαιότητα.
- Στοχαστικά (stochastic): ορισμένα υδρολογικά μεγέθη περιέχουν αβεβαιότητα και συνήθως αναπαρίστανται ως στοχαστικές ανελίξεις (stochastic processes).

<u>Κριτήριο 4:</u> Λειτουργία μοντέλου σε σχέση με το χρόνο

- Μοντέλα υδρολογικού γεγονότος (event-based): για μεμονωμένα επεισόδια βροχής ή πλημμυρικά γεγονότα
- Μοντέλα συνεχούς χρόνου (continuous time): αναπαριστούν την πλήρη χρονική εξέλιξη των υδρολογικών διεργασιών, τόσο σε υγρές όσο και σε ξηρές χρονικές περιόδους. Για την εκτίμηση του επιφανειακού υδατικού δυναμικού χρησιμοποιούνται αποκλειστικά τα μοντέλα συνεχούς χρόνου.

Βαθμονόμηση μοντέλων βροχής-απορροής

- Τα εννοιολογικά μοντέλα βροχής-απορροής, καθώς και τα μοντέλα "black box" περιέχουν άγνωστες παραμέτρους στις μαθηματικές σχέσεις τους.
- Οι παράμετροι αυτές ενσωματώνουν πληροφορίες σχετικά με
  (α) τις φυσικές διεργασίες στη θεωρούμενη λεκάνη απορροής
  (β) τις διεργασίες που δεν λαμβάνονται υπόψη
  (γ) το βαθμό επηρεασμού της απορροής από την κάθε υδρολογική διεργασία
  (δ) τα σφάλματα προσέγγισης των πραγματικών διεργασιών από το μοντέλο
- Απαιτείται εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων για κάθε λεκάνη που εξετάζεται.
- <u>Βαθμονόμηση (calibration)</u>: Εκτίμηση των παραμέτρων ενός μοντέλου βροχής-απορροής με βάση μετρήσεις των υδρολογικών μεγεθών εισόδου και εξόδου (δηλαδή της βροχής και της απορροής)

Κριτήρια βαθμονόμησης

- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean Square Error, MSE)

$$\boxed{MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(Q_t - QE_t)^2}$$

Q_t: χρονοσειρά μετρημένης απορροής

QE_t: χρονοσειρά συνθετικής (υπολογισμένης) απορροής

$t = 1, 2, \dots, n$ (t: χρόνος, n: συνολική χρονική διάρκεια)

- Οι τιμές των παραμέτρων που αντιστοιχούν στο ελάχιστο MSE, γίνονται δεκτές ως τιμές των παραμέτρων για την εξεταζόμενη λεκάνη.
- Εφαρμογή μεθόδου βελτιστοποίησης για την ελαχιστοποίηση του MSE

- Συντελεστής προσδιορισμού (coefficient of determination, R^2)

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{MSE}{Var[Q]}}$$

$-\infty < R^2 < 1$

- Υψηλή τιμή του R^2, κοντά στο 1 $\Rightarrow$ καλή προσαρμογή του μοντέλου
- Αρνητική τιμή του R^2 $\Rightarrow$ μη αποδεκτό μοντέλο

$Var[Q]$: διασπορά μετρημένων απορροών

- Μέση τιμή των απόλυτων τιμών του σφάλματος (Mean Absolute Error, MAE)

$$\boxed{MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|Q_t - QE_t|}$$

- Μέγιστο σφάλμα

$$\boxed{MAXE = \max(Q_t - QE_t)}$$

ΞΗΡΑΣΙΑ

- Γενικός ορισμός ξηρασίας (για ένα υδατικό σύστημα)

  Φαινόμενο κατά τη διάρκεια εμφάνισης του οποίου το υδατικό σύστημα βρίσκεται κάτω από ένα κρίσιμο επίπεδο σε σχέση με την κανονική του λειτουργία.

- Ξηρότητα κλίματος (aridity)
  - Αναφέρεται στα μόνιμα μετεωρολογικά/υδρολογικά χαρακτηριστικά μιας περιοχής.
  - Δείκτης ξηρότητας: μέσο ετήσιο ύψος βροχής / μέσο ετήσιο ύψος δυνητικής εξατμισοδιαπνοής

υπερβολικά ξηρό	< 0.03
ξηρό	0.03 - 0.20
ημίξηρο	0.20 - 0.50
ύφυγρο	0.50 - 0.75
υγρό	> 0.75

- Μελέτη ξηρασίας
  → ανάλυση συχνότητας ελαχίστων τιμών βροχής, απορροής κλπ.
  → προσδιορισμός χαρακτηριστικών δεικτών (υδατικό έλλειμμα, ελλειμματική επιφάνεια)

- Περιοχή μελέτης
  → υδρολογική λεκάνη
  → σύνολο σημειακών πηγών (ταμιευτήρες)
  → σημείο (μετεωρολογικός σταθμός)

Ορισμοί της ξηρασίας

- Μετεωρολογική ξηρασία: Περίοδος χωρίς αρκετή βροχή.
- Υδρολογική ξηρασία: Περίοδος υδρολογικού ελλείμματος (απορροή, αποθήκευση σε ταμιευτήρες, υπόγεια υδροφόρα στρώματα).
- Γεωργική ξηρασία: Επίπεδα εδαφικής υγρασίας και επάρκειας του νερού για την ανάπτυξη των καλλιεργειών.
- Κοινωνικο-οικονομική ξηρασία: Ελλείμματα υδατικών πόρων λόγω υπερκατανάλωσης, ανεπαρκούς υποδομής και προετοιμασίας.
- Δείκτης Palmer (Palmer Drought Severity Index - PDSI): Αθροιστική διαφορά της κανονικής βροχής και της βροχής που απαιτείται για εξατμισοδιαπνοή.
- Σημειακή ξηρασία: Χρονική περίοδος κατά την οποία το ύψος βροχής δεν υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή του για το θεωρούμενο σταθμό.

  Χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αποθηκευμένος όγκος νερού σ' έναν ταμιευτήρα δεν υπερβαίνει τον κρίσιμο.

- Ξηρασία συστήματος: Χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός ταμιευτήρων του συστήματος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του κρίσιμου.

- Επιφανειακή ξηρασία:
  - Κρίσιμη τιμή του ύψους βροχής σε κάθε σταθμό
  - Κρίσιμη ελλειμματική επιφάνεια (ποσοστό της επιφάνειας της περιοχής μελέτης)
  - Ελλειμματική επιφάνεια για κάποια χρονική περίοδο: επιφάνεια επιρροής ενός σταθμού, όταν το ύψος βροχής στο σταθμό δεν υπερβαίνει μια κρίσιμη τιμή κατά τη διάρκεια της περιόδου αυτής.
  - Οταν σ' έναν αριθμό σταθμών της περιοχής μελέτης τα ύψη βροχής δεν υπερβαίνουν τις κρίσιμες τιμές τους και η αντίστοιχη συνολική ελλειμματική επιφάνεια είναι μεγαλύτερη ή ίση της κρίσιμης, τότε υπάρχει επιφανειακή ξηρασία στην υπόψη περιοχή.

Μελέτη επιφανειακής ξηρασίας

- Προσδιορισμός ποσοτικών δεικτών
  (υδατικό έλλειμμα, ελλειμματική επιφάνεια)
- Ανάλυση επικινδυνότητας μιας ξηρασίας με προκαθορισμένα χαρακτηριστικά
  (συναρτήσεις επικινδυνότητας, επαναφοράς και ευπάθειας)

Δείκτες ξηρασίας

Στιγμιαία ελλειμματική επιφάνεια A_S:

Μέρος της επιφάνειας μιας περιοχής, συνολικής έκτασης S, που πλήττεται από ξηρασία

$$\boxed{A_S(i) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, I[h(i,k)]}$$

$A_S(i)$: ελλειμματική επιφάνεια για την i περίοδο (υδρολογικό έτος)

a_k: συντελεστής επιρροής του βροχομετρικού σταθμού k $(0 \leq a_k \leq 1)$

$$a_k = S_k / S$$

S_k: επιφάνεια που αντιστοιχεί στο βροχομετρικό σταθμό k $(k = 1, 2, ---, n)$

S: συνολική έκταση της μελετώμενης περιοχής

$h(i,k)$: βροχομετρικό ύψος του σταθμού k για το υδρολογικό έτος i

Αν $h(i,k) < CL$, τότε $I[h(i,k)] = 1$

Αν $h(i,k) \geq CL$, τότε $I[h(i,k)] = 0$

CL: κρίσιμο ύψος βροχής (κατώφλι βροχής) για το βροχομετρικό σταθμό k

Επιφανειακή ξηρασία:

Γεγονός κατά τη διάρκεια του οποίου η στιγμιαία ελλειμματική επιφάνεια A_s υπερβαίνει ή είναι ίση με μια κρίσιμη τιμή CA ($A_s \geq CA$)

Διάρκεια ξηρασίας L:

Χρονικό διάστημα κατά το οποίο το φαινόμενο της ξηρασίας επηρεάζει τη μελετώμενη περιοχή.

$$\boxed{L = t_e - t_o + 1}$$

$$t_o \Rightarrow A_s(t_o) \geq CA \quad \text{και} \quad A_s(t_o - 1) < CA$$

$$t_e \Rightarrow A_s(t_e) \geq CA \quad \text{και} \quad A_s(t_e + 1) < CA$$

Στιγμιαίο υδατικό έλλειμμα D_s

$$\boxed{D_s(i) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left[CL - h(i,k) \right] I \left[h(i,k) \right]}$$

ένταση φαινομένου ξηρασίας

Μέση ελλειμματική επιφάνεια $\bar{A}$

$$\boxed{\bar{A} = \frac{\sum_{t_o}^{t_e} A_s(t)}{L}}$$

$A_s(t) \geq CA \qquad t_o \leq t \leq t_e$

Αθροιστικό υδατικό έλλειμμα D

$$\boxed{D = \sum_{t_o}^{t_e} D_s(t)}$$

Επικινδυνότητα μιας ξηρασίας (drought risk)

Βαθμός επικινδυνότητας:

Πιθανότητα να συμβεί ξηρασία σε οποιοδήποτε υδρολογικό έτος

$$\boxed{P(H < h) = \frac{1}{T}}$$

$P(H<h)$: πιθανότητα μη υπέρβασης της τιμής h

H : ετήσιο ύψος βροχής

T : περίοδος επαναφοράς σε έτη

Επαναφορά (resilience)

- Χρόνος επαναφοράς : Χρόνος αποκατάστασης ενός συστήματος μετά από ένα γεγονός ξηρασίας (t_r).
- Συνάρτηση επαναφοράς: Συνάρτηση κατανομής του χρόνου επαναφοράς μετά από διαφορετικά γεγονότα ξηρασίας.
- Δύο περιπτώσεις: → Χρόνος επαναφοράς = διάρκεια της προηγηθείσας ξηρασίας
  ↓ " " > " "
- Εκτίμηση του χρόνου επαναφοράς:

$$e(t) = h(t) - RL \qquad RL < h(t)$$

$$e(t) = 0 \qquad RL \geq h(t)$$

$e(t)$: υδατικό πλεόνασμα στο χρόνο t μετά το πέρας της ξηρασίας t_e

RL : βροχομετρικό ύψος επαναφοράς (recovery level) ($\geq CL$)

$$E(t) = \sum_{t_e}^{t} e(t)$$

$E(t)$: αθροιστικό υδατικό πλεόνασμα της περιόδου (t_e, t)

$$\boxed{t_r = \min\left[(t - t_e) : \; E(t)/D \geqslant AR\right]}$$

D : αθροιστικό υδατικό έλλειμμα

AR : ποσοστό επαναπληρώσεως (recovery rate),
ποσοστό του αθροιστικού υδατικού ελλείμματος που χρειάζεται να καλυφθεί.

Ευπάθεια (vulnerability)

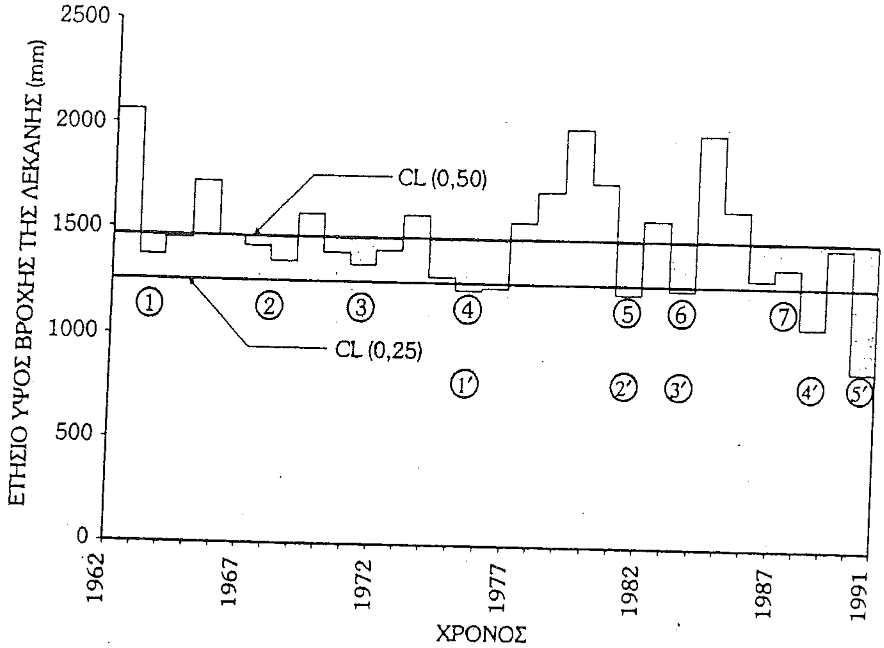
- Σοβαρότητα συνεπειών μιας ξηρασίας

$$\boxed{L_f = -\frac{1}{K} \ln\left(1 - \frac{D}{D_{max}}\right)}$$

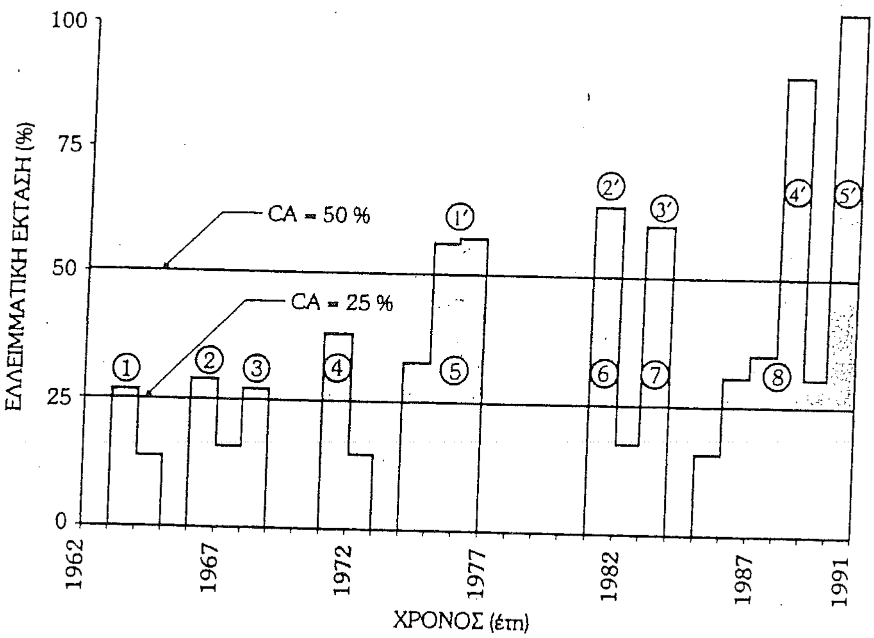
L_f : συνάρτηση απωλειών

D_{max} : οριακή τιμή του D που αντιστοιχεί σε μια ιδιαίτερη καταστροφική ξηρασία

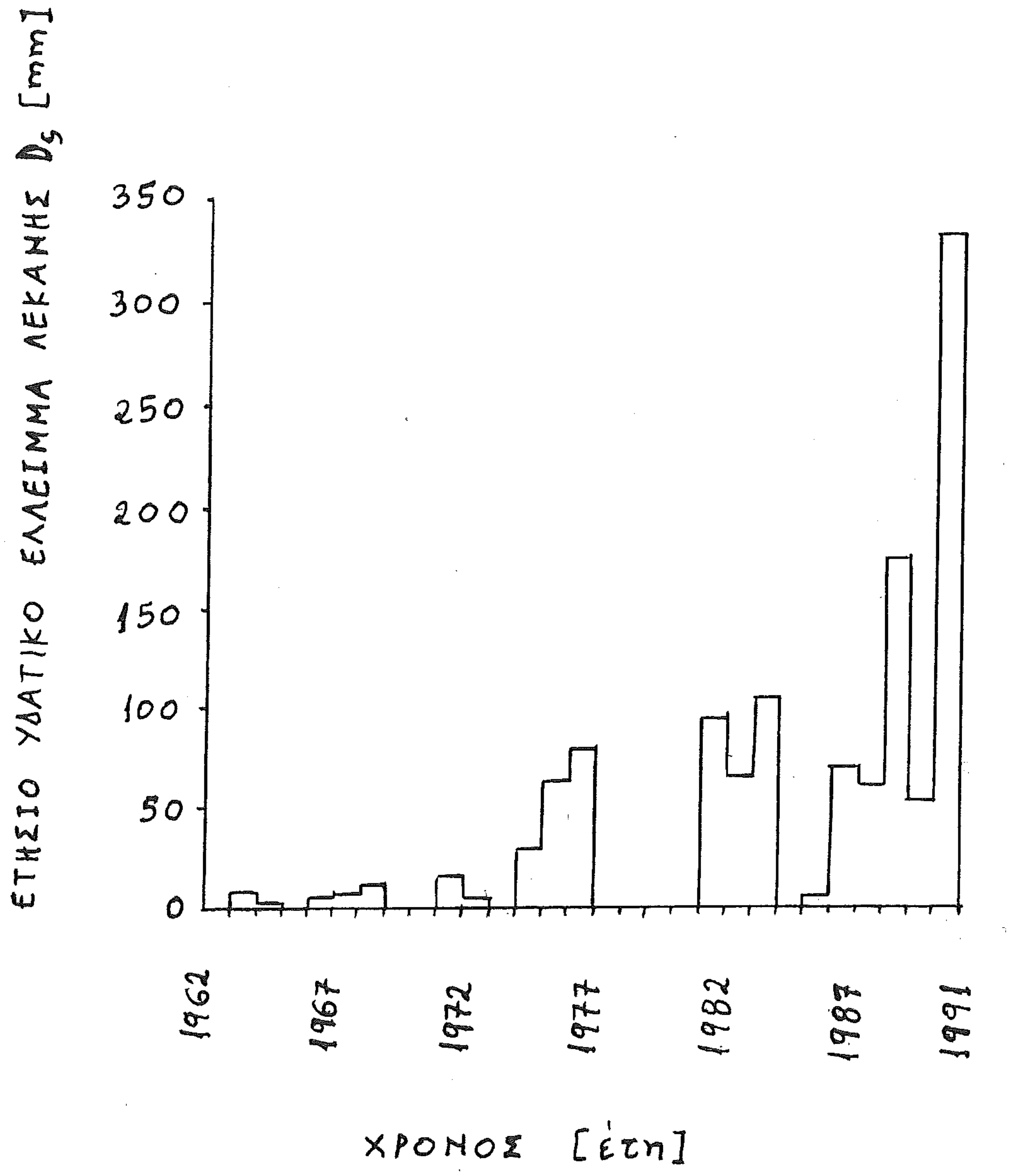
K : παράμετρος



Σχ. 13.6: *Γεγονότα ξηρασίας στην υδρολογική λεκάνη του Μόρνου για δύο επίπεδα κρίσιμου ετήσιου βροχομετρικού ύψους με πιθανότητα μη υπέρβασης 0.50 και 0.25 αντίστοιχα.*



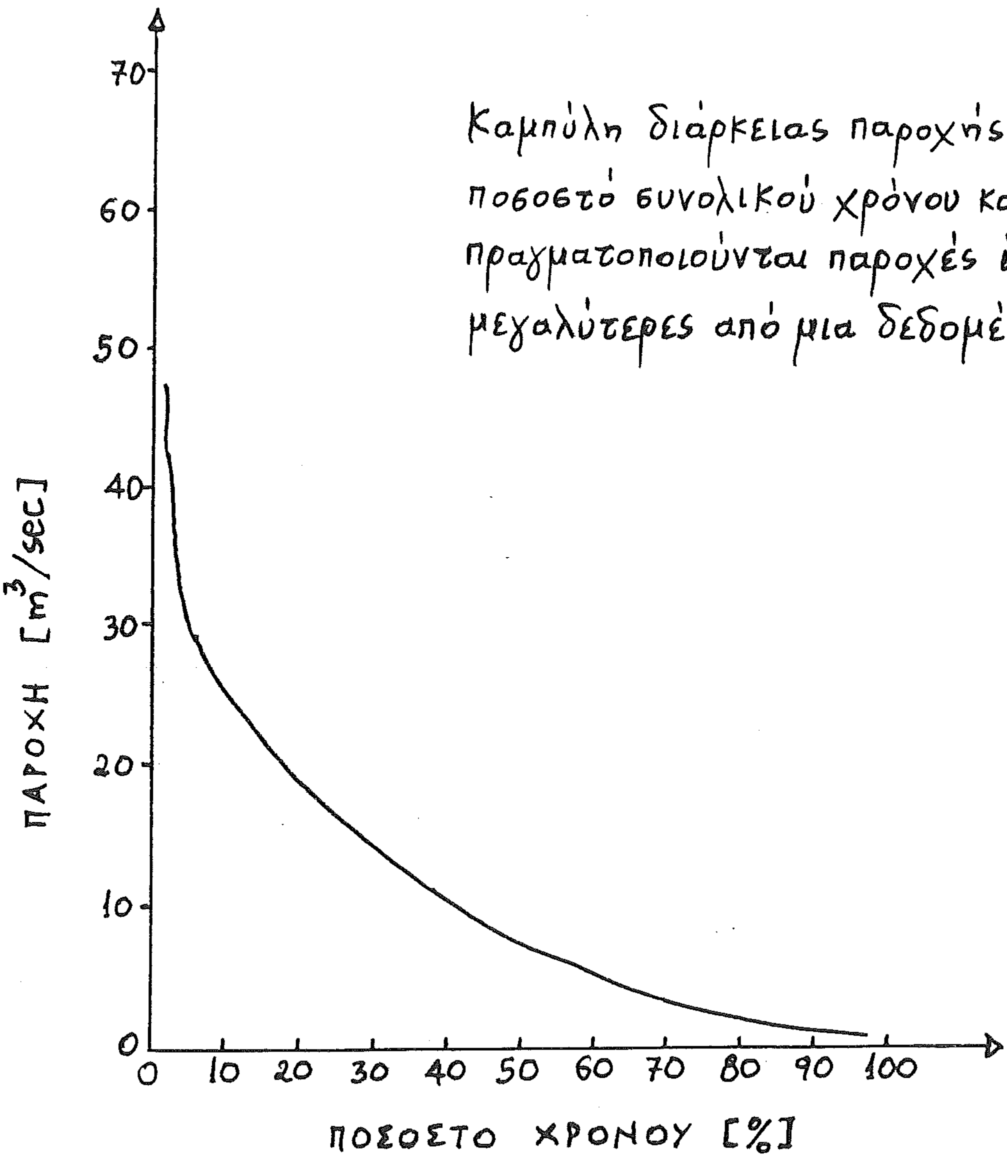
Σχ. 13.7: *Ελλειμματική έκταση για κρίσιμο βροχομετρικό ύψος πιθανότητας μη υπέρβασης 0.25 και κρίσιμη έκταση 50% και 25% αντίστοιχα.*



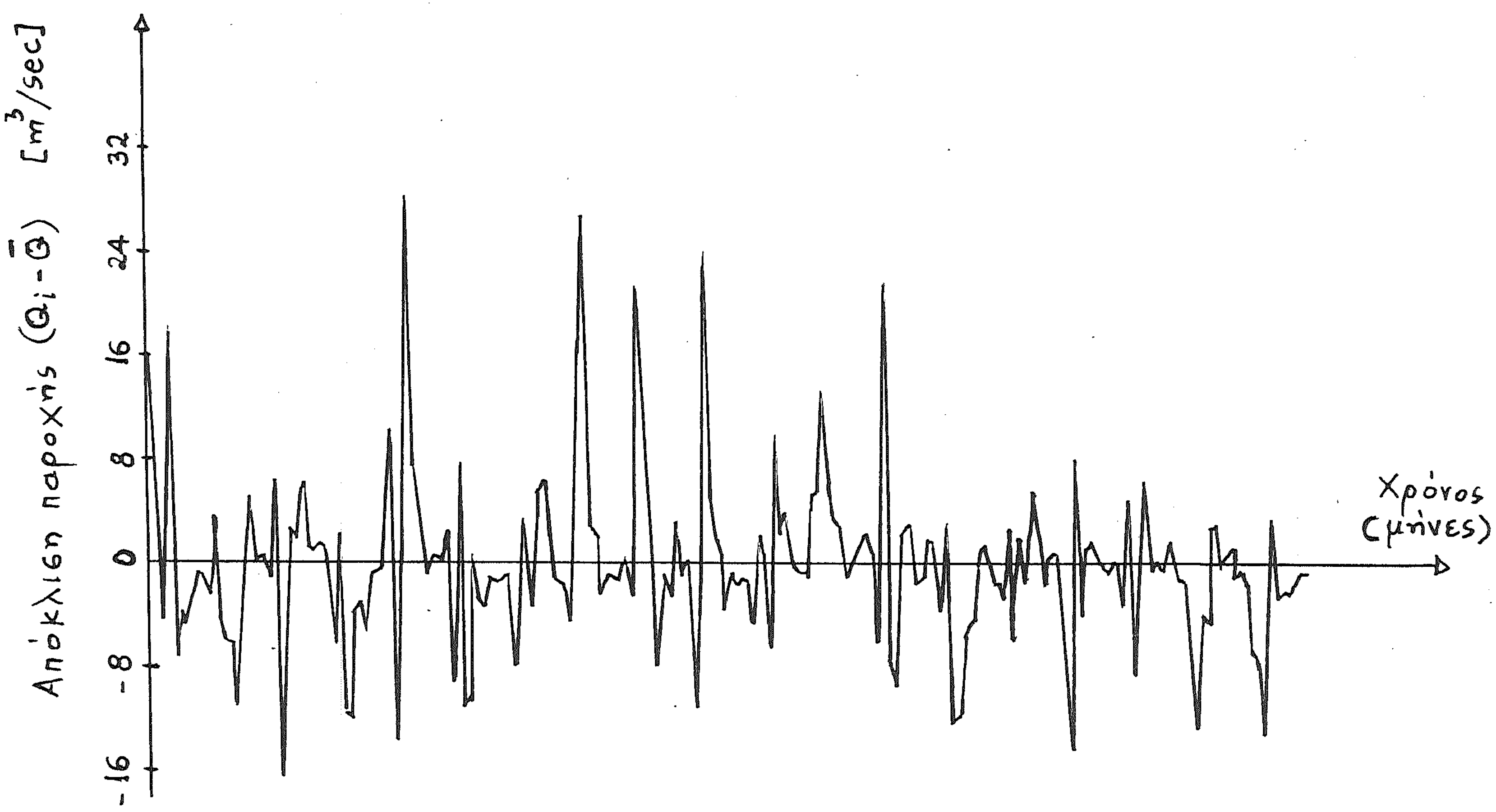
- Κρίσιμο ύψος βροχής που αντιστοιχεί σε πιθανότητα μη υπέρβασης 0.25

Δείκτες ξηρασίας με βάση τις χαμηλές απορροές

- Δείκτης υδρολογικής ξηρασίας:
  απόκλιση από τη μέση τιμή της παροχής συγκεκριμένης διάρκειας
- Δείκτης ξηρασίας με βάση την καμπύλη διάρκειας παροχής ενός ποταμού:
  π.χ. παροχή που ξεπερνιέται το 95% του χρόνου,
  ή το ποσοστό του χρόνου που το 1/4 της μέσης παροχής ξεπερνιέται.



Καμπύλη διάρκειας παροχής: ποσοστό συνολικού χρόνου κατά το οποίο πραγματοποιούνται παροχές ίσες ή μεγαλύτερες από μια δεδομένη τιμή.



- Ποταμός Μόρνος (θέση φράγματος)
- 228 μηνιαίες τιμές παροχής

- Δείκτες ξηρασίας με βάση τη διάρκεια περιόδων χαμηλής παροχής:

  π.χ. διαστήματα M συνεχών μηνών καθένας από τους οποίους έχει παροχή ≤ Q95,

  ή αριθμός των M ξηρότερων συνεχών μηνών μαζί με το ποσοστό της μέσης παροχής των M μηνών σε σχέση με τη μέση τιμή της όλης θεωρούμενης περιόδου.

- Δείκτες ξηρασίας από την ανάλυση συχνότητας ελαχίστων

<u>Κατανομή ακραίων τιμών τύπου III (Weibull)</u>

- Ανάλυση ελαχίστων τιμών στις οποίες υπάρχει όριο προς την κατεύθυνση των ακραίων τιμών.
- Για τις παροχές το όριο είναι το μηδέν.
- Διπαραμετρική κατανομή

Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (ή πυκνότητας πιθανότητας):

$$\boxed{p(x) = a x^{a-1} \beta^{-a} \exp\left[\left(-\frac{x}{\beta}\right)^{a}\right]}$$

Συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας:

$$\boxed{P(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{a}\right]}$$

- Από πίνακες: $1/a$ ως συνάρτηση του λόγου $\bar{x}/\hat{\sigma}$

- $$\boxed{\beta = \frac{\bar{x}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)}}$$

$\bar{x}$: μέση τιμή του δείγματος

$\hat{\sigma}$: τυπική απόκλιση του δείγματος

Γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών III (Weibull)

Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας:

$$\boxed{p(x) = \frac{a}{\beta - C}\left(\frac{x-C}{\beta-C}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{x-C}{\beta-C}\right)^{a}\right]} \qquad \text{για } x \geqslant C$$

Συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας:

$$\boxed{P(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-C}{\beta-C}\right)^{a}\right]} \qquad \text{για } x \geqslant C$$

$\beta > C, \quad a > 0$

Ανηγμένη μεταβλητή: $\boxed{y = \left(\frac{x-C}{\beta-C}\right)^{a}}$

$$g(y) = e^{-y}$$

$$G(y) = 1 - e^{-y}$$

$$\boxed{y_T = -\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)}$$

Εκτίμηση παραμέτρων:

$\mu = \beta - \sigma A_a$ $\qquad$ μ: μέσος όρος

$\sigma = \dfrac{\beta - C}{B_a}$ $\qquad$ σ: τυπική απόκλιση

$$\gamma = \left[\Gamma\left(\frac{3}{a}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right) + 2\Gamma^{3}\left(\frac{1}{a}+1\right)\right] B_a^{3}$$

γ: συντελεστής ασυμμετρίας

$$B_a = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\frac{2}{a}+1) - \Gamma^2(\frac{1}{a}+1)}}$$

$$A_a = [1 - \Gamma(\frac{1}{a}+1)] B_a$$

- Από πίνακα: a, A_a, B_a συναρτήσει του γ
- Προσδιορισμός των β και C από τις εξισώσεις του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- "Operations Research" (επιχειρησιακή έρευνα)
- Βέλτιστος σχεδιασμός
- Συνάρτηση στόχου
- Περιορισμοί (constraints)
- Βέλτιστη απόφαση: μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στόχου
- Βέλτιστο : μέγιστο ή ελάχιστο

Παράδειγμα

- Ταμιευτήρας για υδροδότηση και παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας
- Υδροδότηση : 150 δρχ./m^3, x_1 m^3
- Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας : 75 δρχ./m^3, x_2 m^3
- Συνάρτηση στόχου (Z) ⇒ συνάρτηση κέρδους

$$Z = 150x_1 + 75x_2 \Rightarrow max$$

- x_1, x_2 : μεταβλητές απόφασης
- $Z \Rightarrow max$, όταν $x_1 \to \infty$ και $x_2 \to \infty$ (μη ρεαλιστικό)
- Περιορισμός $x_1 + x_2 \leq S$

  S : χωρητικότητα ταμιευτήρα

- $Z \Rightarrow max$, όταν $x_1 = S$ και $x_2 = 0$ (μη ρεαλιστικό)

- Περιορισμός: $x_2 \geq A$

  A : όγκος νερού που πρέπει να αποδοθεί μέσω του εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας πίσω στον ποταμό, κατάντη του ταμιευτήρα

- Βέλτιστη λύση : $x_2 = A$ $x_1 = S - A$

- Εξίσωση συνέχειας :

$$S_{i+1} = S_i + I_i - x_{1,i} - x_{2,i}$$

S_i : αποθηκευμένος όγκος νερού το μήνα i

I_i : εισρέων όγκος νερού το μήνα i

$x_{1,i}$: εκρέων όγκος νερού για υδροδότηση το μήνα i

$x_{2,i}$: εκρέων όγκος νερού για παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας το μήνα i

S_{i+1} : αποθηκευμένος όγκος νερού το μήνα i+1

S_i : κατάσταση του ταμιευτήρα το μήνα i

S_{i+1} : " " " " " $i+1$

Εξίσωση συνέχειας ⇒ Εξίσωση μετασχηματισμού κατάστασης

Μέθοδοι βελτιστοποίησης
- → αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης
- → μέθοδοι προσομοίωσης

Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης
- → γραμμικός προγραμματισμός
- → δυναμικός προγραμματισμός

Γραμμικός προγραμματισμός

Συνάρτηση στόχου
Περιορισμοί

} γραμμικές εξισώσεις

- Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

  c_i : σταθεροί συντελεστές
  x_i : μεταβλητές απόφασης

- Περιορισμοί: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$

  m ανισότητες, n άγνωστοι

  Συνθήκες προσήμου: $x_i \geqslant 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$
  (θετικές εισροές, αποθηκεύσεις κ.λπ.)

- Βέλτιστη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη) της συνάρτησης στόχου Z
- Αλγόριθμος Simplex
- Σύστημα ανισοτήτων ⇒ σύστημα γραμμικών εξισώσεων

- Εισαγωγή επιπλέον αγνώστων μεταβλητών x_{n+k}

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + x_{n+k} = b_k & k=1,2,3,----,m \\ \\ x_{n+k} \geq 0 & k=1,2,3,----,m \end{array}\right\} \text{Περιορισμοί}$$

(συνθήκες προσήμου)

- <u>Με μορφή πινάκων:</u>

Συνάρτηση στόχου: $Z = cx$

Περιορισμοί: $Ax = b, \quad x \geq 0$

x : διάνυσμα γραμμής με $n+m$ στοιχεία

$x_1, x_2, ----, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ------, x_{n+m}$

c : διάνυσμα γραμμής με $n+m$ στοιχεία

$c_1, c_2, ----, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, ------, c_{n+m}$

$c_{n+1}, c_{n+2}, ----, c_{n+m} = 0$

b : διάνυσμα στήλης με m στοιχεία

$b_1, b_2, ---, b_m$

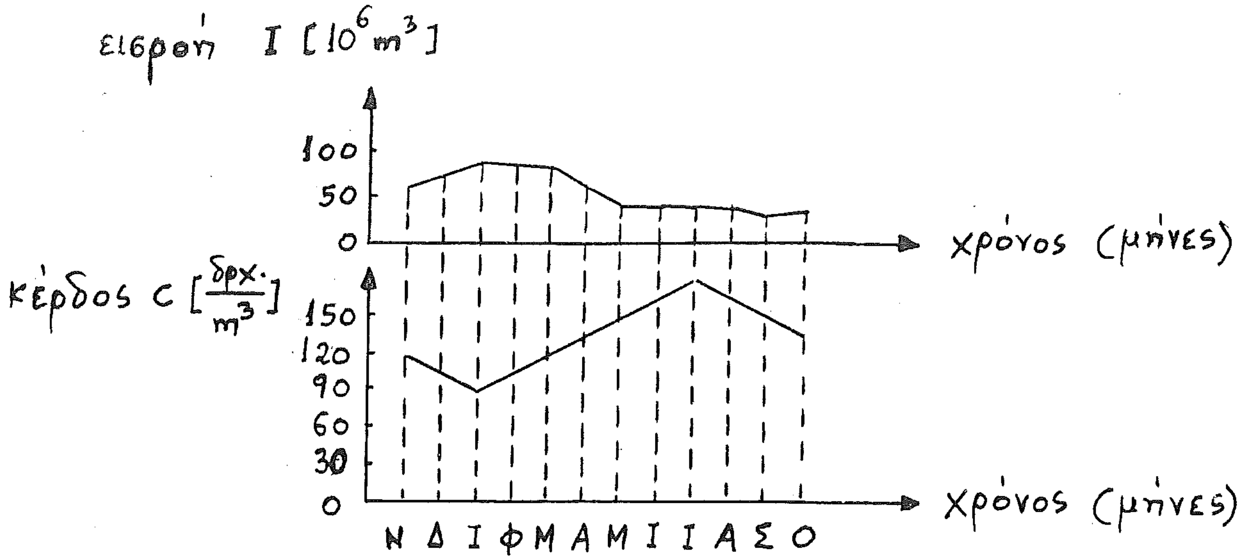
A : πίνακας με m γραμμές και $n+m$ στήλες

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $Ax = b \Rightarrow m$ γραμμικές εξισώσεις με $n+m$ αγνώστους
- Εύρεση της λύσης x που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στόχου Z (αλγόριθμος Simplex)

Παράδειγμα γραμμικού προγραμματισμού

- Ταμιευτήρας απλής σκοπιμότητας
- Δίδονται:
  - το υδρογράφημα εισροών σε μέση μηνιαία βάση
  - η καμπύλη του μηνιαίου κέρδους σε δρχ./m^3 νερού
  - χωρητικότητα ταμιευτήρα $S_{max} = 200 \cdot 10^6 \; m^3$
  - αποθηκευμένος όγκος νερού στην αρχή του έτους $S_o = 100 \cdot 10^6 \; m^3$
- Ζητούνται τα υδρογραφήματα των μηνιαίων εκροών και αποθηκεύσεων, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό ετήσιο κέρδος.



<u>Μαθηματική διατύπωση</u>

x_i : εκροή νερού από τον ταμιευτήρα κατά το μήνα i (μεταβλητή απόφασης)

c_i : τιμή του νερού ανά m^3 κατά το μήνα i (άρδευση)

<u>Συνάρτηση στόχου</u>: $Z = \sum_{i=1}^{12} c_i x_i = \max$

<u>Περιορισμοί</u>:

α. Θετικές αποθηκεύσεις στον ταμιευτήρα

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} I_i + S_o \qquad n = 1, 2, ----, 11 \qquad \text{(11 συνθήκες)}$$

β. Ετήσιο ισοζύγιο

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = \sum_{i=1}^{12} I_i \qquad \text{(1 συνθήκη)}$$

γ. Μη υπερχείλιση του ταμιευτήρα

$$S_{max} \geqslant S_o + \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad n = 1,2,----,11 \qquad (11 \text{ συνθήκες})$$

δ. Ελάχιστη παροχή νερού στον ποταμό κατάντη του ταμιευτήρα: $20 \cdot 10^6$ m^3 ανά μήνα

$$x_i \geqslant 20 \cdot 10^6 \ m^3 \qquad i = 1,2,----,12 \qquad (12 \text{ συνθήκες})$$

ε. Μέγιστη επιτρεπόμενη εκροή: $140 \cdot 10^6$ m^3 ανά μήνα

$$x_i \leq 140 \cdot 10^6 \, m^3 \qquad i = 1,2,----,12 \qquad (12 \text{ συνθήκες})$$

46 ανισότητες και μία εξίσωση $\Rightarrow m = 47$

Λύση

Συνάρτηση στόχου

$$Z = 120x_1 + 105x_2 + 90x_3 + 105x_4 + 120x_5 + 135x_6 + 150x_7 + 165x_8 +$$
$$+ 180x_9 + 165x_{10} + 150x_{11} + 135x_{12}$$

x_1 : εκροή το Νοέμβριο
x_2 : εκροή το Δεκέμβριο
κ.λπ.

Περιορισμοί

α. $x_1 \leq I_1 + S_o \qquad (n=1)$

$$x_1 + x_{13} = I_1 + S_o = (58.6 + 100) \cdot 10^6 = 158.6 \cdot 10^6$$

για $n=2$

$$x_1+x_2+x_{14}=I_1+I_2+S_o=(58.6+72.2+100)\cdot 10^6=230.8\times 10^6$$

⋮

για $n=11$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i + x_{23} = \sum_{i=1}^{11} I_i + S_o =$$

$$=(58.6+72.2+83.2+81.9+83.5+58.6+39.3+40.8+38.7+35.3+30.9)\cdot 10^6 +$$
$$+100\times 10^6 = 723\times 10^6 \ m^3$$

β. $\sum_{i=1}^{12} x_i = 655.7\times 10^6$

γ. για $n=1$

$$S_{max} \geqslant S_o + I_1 - x_1 \Rightarrow 200\times 10^6 \geqslant (100+58.6)\cdot 10^6 - x_1$$

$$-x_1+x_{24}=(200-158.6)\cdot 10^6 = 41.4\times 10^6 \ m^3$$

για $n=2$

$$-x_1-x_2+x_{25}=-30.8$$

δ. για $i=1$ $\quad x_1 \geqslant 20\times 10^6 \ m^3 \Rightarrow x_1 = 20\times 10^6 + x_{35}$

$$x_1 - x_{35} = 20\times 10^6$$

για $i=2$ $\quad x_2 - x_{36} = 20\times 10^6 \ m^3$

ε. ανάλογοι συλλογισμοί

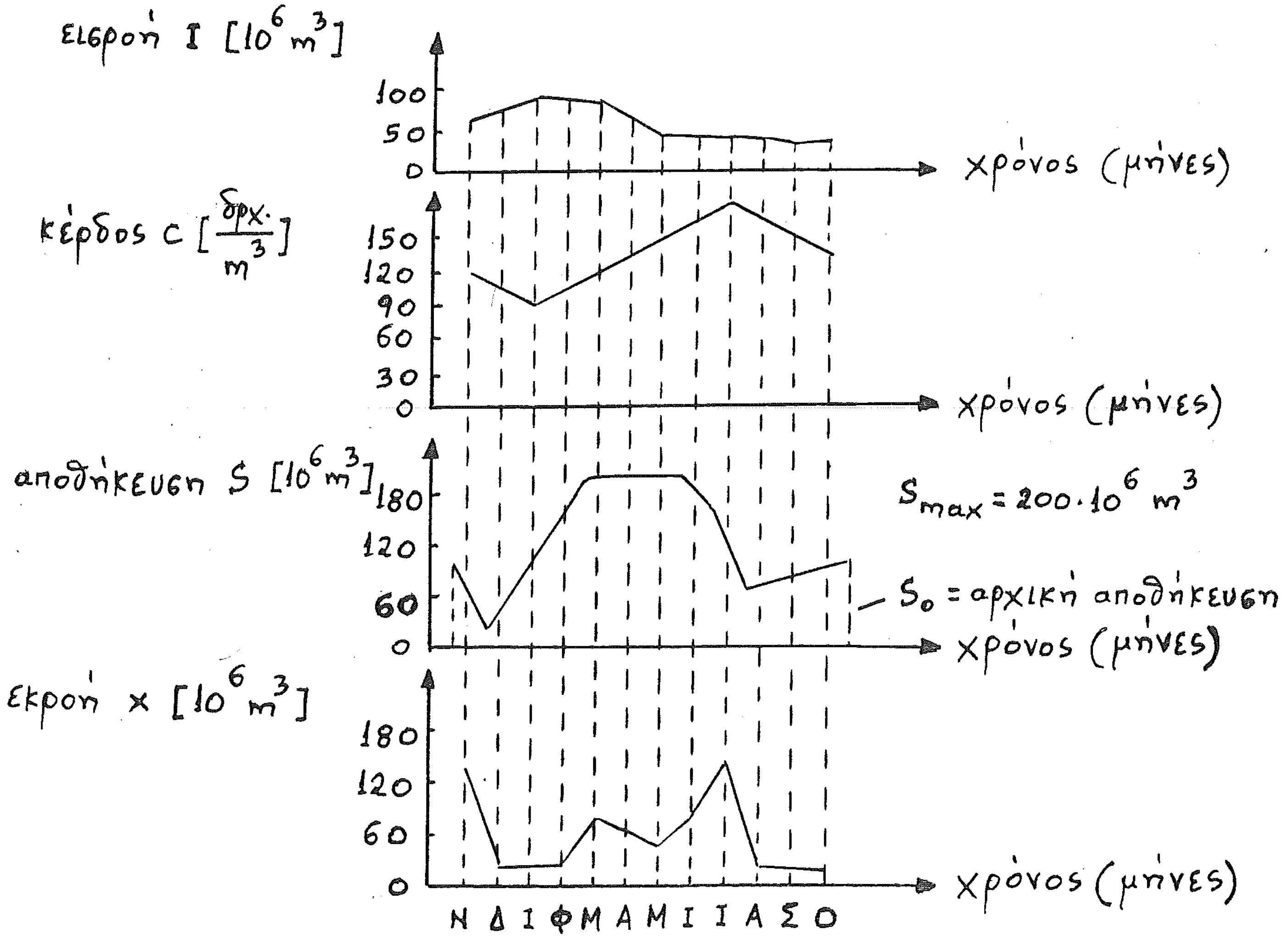
- Περιορισμοί : 47 εξισώσεις $(m=47)$
- Αριθμός αγνώστων : κατ' αρχήν 12 $(x_1, x_2, ---, x_{12})$ $(n=12)$

  εν γένει $n+m$

  τελικά $n+m-1$ (μια εξίσωση)

Αποτελέσματα

- Αριστερά μέλη των εξισώσεων περιορισμών ⇒ πίνακας A
- Δεξιά " " " " ⇒ διάνυσμα b
- Συντελεστές της συνάρτησης στόχου ⇒ διάνυσμα c
- $Z_{max} = 96.3 \times 10^9$ δρχ. ανά έτος (κέρδος)



Δυναμικός προγραμματισμός

- Ένα σύνθετο πρόβλημα με πολλές μεταβλητές αναλύεται σε πολλά επιμέρους προβλήματα με λίγες μεταβλητές (decomposition)
- Διαδοχική επίλυση των επιμέρους προβλημάτων
- Αρχή του βέλτιστου κατά Bellman
- Γραμμικότητα (ή μη γραμμικότητα) της συνάρτησης στόχου και των περιορισμών : άνευ σημασίας

Εισαγωγικό παράδειγμα

- Ταμιευτήρας πολλαπλής σκοπιμότητας

- Αποθηκευμένος όγκος νερού S
  - $\rightarrow$ όγκος A_1 για άρδευση
  - $\rightarrow$ όγκος A_2 για παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας
  - $\rightarrow$ όγκος A_3 για υδροδότηση μιας πόλης

- Μεγιστοποίηση του κέρδους από την πώληση του νερού

Συνάρτηση στόχου

- Άρδευση $Z_1 = c_1\sqrt{A_1}$
- Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας $Z_2 = c_2 A_2$
- Υδροδότηση $Z_3 = c_3\sqrt{A_3}$

$Z = Z_1+Z_2+Z_3 = c_1\sqrt{A_1} + c_2 A_2 + c_3\sqrt{A_3}$ ⇒ μη γραμμική

A_1, A_2, A_3 : μεταβλητές απόφασης

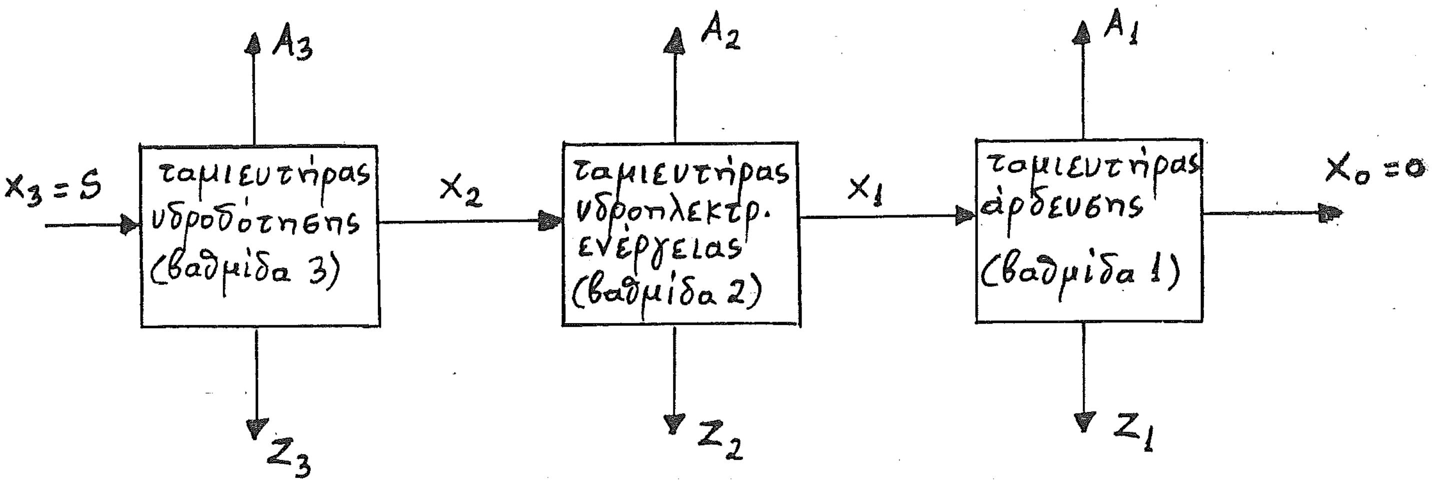
- Προσδιορισμός των A_1, A_2, A_3 έτσι ώστε $Z \Rightarrow max$

<u>Περιορισμοί</u>

$A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$, $A_3 \geq 0$

$A_1 + A_2 + A_3 = S$

<u>Αποσύνθεση</u> (decomposition)



x_1, x_2, x_3 : μεταβλητές κατάστασης

Μετασχηματισμός κατάστασης:

$$x_n - A_n = x_{n-1} = t_n(x_n, A_n)$$

Αρχή του βέλτιστου κατά Bellman

Πρώτη βαθμίδα

$z_1 = f_1(A_1, x_1) = c_1\sqrt{A_1} \quad , \quad A_1 \leq x_1$

$f_1^*(x_1) = \max f_1(A_1, x_1) = \max\{c_1\sqrt{A_1}\} , \quad A_1 \leq x_1$

ή $f_1^*(x_1) = c_1\sqrt{x_1}$

$A_1^* = x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq S$

A_1^* : απόφαση που παρέχει το μέγιστο $f_1^*(x_1)$

Δεύτερη βαθμίδα

$f_2(A_1, A_2, x_1, x_2) = c_2 A_2 + c_1\sqrt{A_1}$

$f_2^*(x_1, x_2) = \max\{f_2(A_1, A_2, x_1, x_2)\} , \quad A_1 \leq x_1 \ , \ A_2 \leq x_2$

Μετάβαση από τη βαθμίδα 1 στη βαθμίδα 2:

$t_2(A_2, x_2) = x_2 - A_2 = x_1$

$f_2^*(x_1, x_2) = \max\{c_2 A_2 + \max[c_1\sqrt{A_1}\,]\} , \quad A_2 \leq x_2 \ , \ A_1 \leq t_2(A_2, x_2)$

$f_2^*(x_2) = \max\{c_2 A_2 + f_1^*[t_2(A_2, x_2)]\} , \quad A_2 \leq x_2$

A_2^* : τιμή του A_2 που παρέχει το μέγιστο $f_2^*(x_2)$

Γενίκευση για τη βαθμίδα n :

$$\boxed{f_n^*(x_n) = \max\{Z_n + f_{n-1}^*[t_n(A_n, x_n)]\}, \quad A_n \leq x_n} \quad \text{(Bellman)}$$

A_n^* : τιμή του A_n που παρέχει το βέλτιστο $f_n^*(x_n)$

Πρώτη βαθμίδα : άρδευση, $n=1$

- Μετασχηματισμός κατάστασης:

$$t_1(A_1, x_1) = x_1 - A_1 = x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = A_1$$

- Μερική συνάρτηση στόχου:

$$z_1 = f_1(x_1, A_1) = c_1\sqrt{A_1}$$

- Μέγιστο: $f_1^*(x_1) = c_1\sqrt{x_1}$

- Βέλτιστη απόφαση : $A_1^* = x_1$

Δεύτερη βαθμίδα: άρδευση και υδροηλεκτρική ενέργεια, $n=2$

- Μετασχηματισμός κατάστασης:

$$t_2(x_2, A_2) = x_2 - A_2 = x_1$$

- Μερική συνάρτηση στόχου:

$$f_2(x_2, A_2) = Z_2 + f_1^*[t_2(x_2, A_2)]$$

- Μέγιστο: $f_2^*(x_2) = \max\{c_2 A_2 + f_1^*(x_2 - A_2)\}, \quad A_2 \leq x_2$

$$f_1^*(x_2-A_2)=c_1\sqrt{x_2-A_2}$$

$$f_2^*(x_2)=\max\{c_2A_2+c_1\sqrt{x_2-A_2}\}\ ,\quad A_2\leq x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial A_2}=0 \Rightarrow c_2-\frac{c_1}{2\sqrt{x_2-A_2}}=0 \Rightarrow A_2^*=x_2-\frac{c_1^2}{4c_2^2}$$

$$f_2^*(x_2)=c_2x_2+\frac{c_1^2}{4c_2}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial A_2^2}=-\frac{c_1}{4\sqrt{(x_2-A_2)^3}}<0 \Rightarrow f_2^*(x_2) \text{ είναι μέγιστο (και όχι ελάχιστο)}$$

<u>Τρίτη βαθμίδα: άρδευση + υδροηλεκτρική ενέργεια + υδροδότηση, n=3</u>

- Μετασχηματισμός κατάστασης:

$$t_3(x_3,A_3)=x_3-A_3=x_2 \Rightarrow x_2=S-A_3 \qquad (x_3=S)$$

- Συνάρτηση στόχου:

$$f_3(x_3,A_3)=Z_3+f_2^*[t_3(x_3,A_3)]$$

- Μέγιστο:

$$f_3^*(x_3)=\max\left\{c_3\sqrt{A_3}+c_2(S-A_3)+\frac{c_1^2}{4c_2}\right\}\ ,\quad A_3\leq S$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial A_3}=\frac{c_3}{2\sqrt{A_3}}-c_2=0 \Rightarrow A_3^*=\frac{c_3^2}{4c_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial A_3^2}=-\frac{c_3}{4\sqrt{A_3^3}}<0$$

$$A_2^* = x_2 - \frac{c_1^2}{4c_2^2} = S - A_3 - \frac{c_1^2}{4c_2^2} = S - \frac{c_3^2 + c_1^2}{4c_2^2}$$

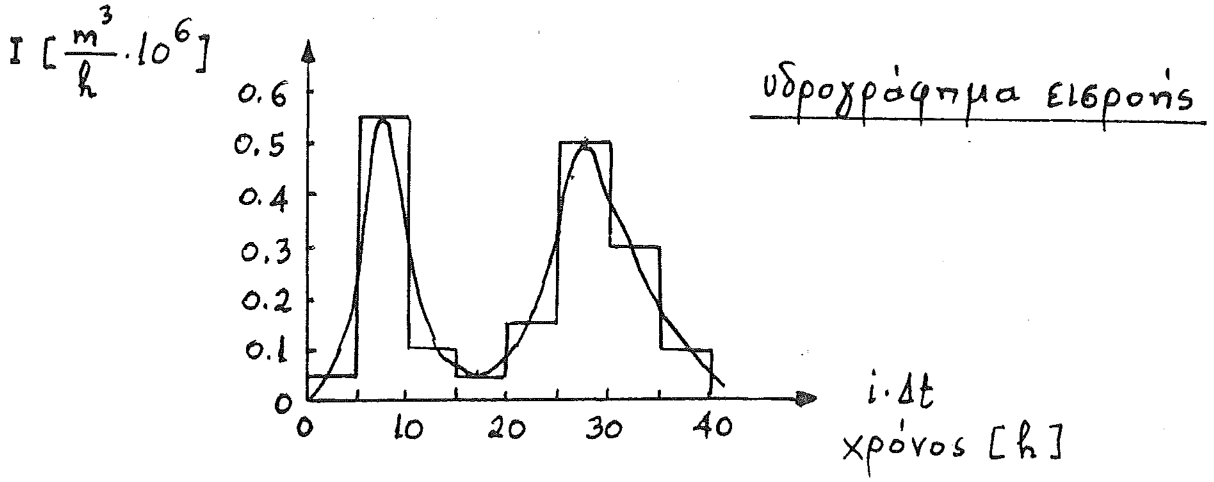
- Εξίσωση περιορισμού: $A_1^* = S - A_2^* - A_3^* = \dfrac{c_1^2}{4c_2^2}$

- Μέγιστη τιμή της συνάρτησης στόχου:

$$Z = c_1\sqrt{A_1^*} + c_2 A_2^* + c_3\sqrt{A_3^*}$$

$$Z = c_2 S + \frac{c_1^2 + c_3^2}{4c_2}$$

Εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού σ' έναν ταμιευτήρα ανάσχεσης πλημμυρών



- Χωρητικότητα ταμιευτήρα: $K = 1.5 \times 10^6 \, m^3$
- Να ελαχιστοποιηθούν οι προκαλούμενες ζημιές

Συνάρτηση στόχου (μη χρηματική)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} A_i^2 = \min$$ (i : χρονικό βήμα)

$$A_i = \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} Q(t)\,dt$$ (A_i : μεταβλητή απόφασης)

$Q(t)$: παροχή εκροής

A_i : όγκος εκροής στο χρονικό διάστημα μεταξύ t_i και $t_i + \Delta t$

Περιορισμοί

- $S_i \leq k$

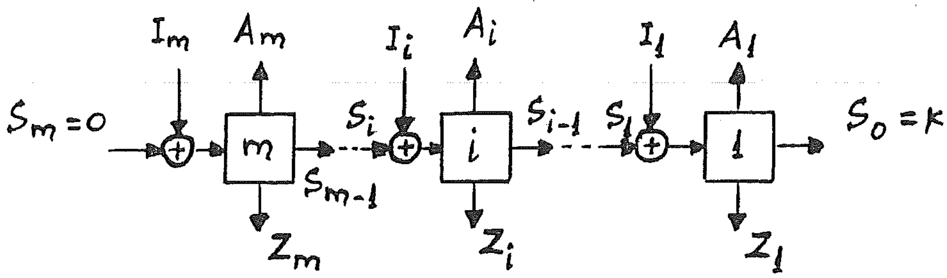
- $S_i \geqslant 0 \qquad A_i \geqslant 0$

- $S_i + I_i \geqslant A_i \geqslant \begin{cases} S_i + I_i - k & \text{(μη υπερχείλιση του ταμιευτήρα)} \\ 0, \text{ όταν } S_i + I_i - k \leq 0 \end{cases}$

- $m = 8$ χρονικά διαστήματα $\Rightarrow$ 32 περιορισμοί

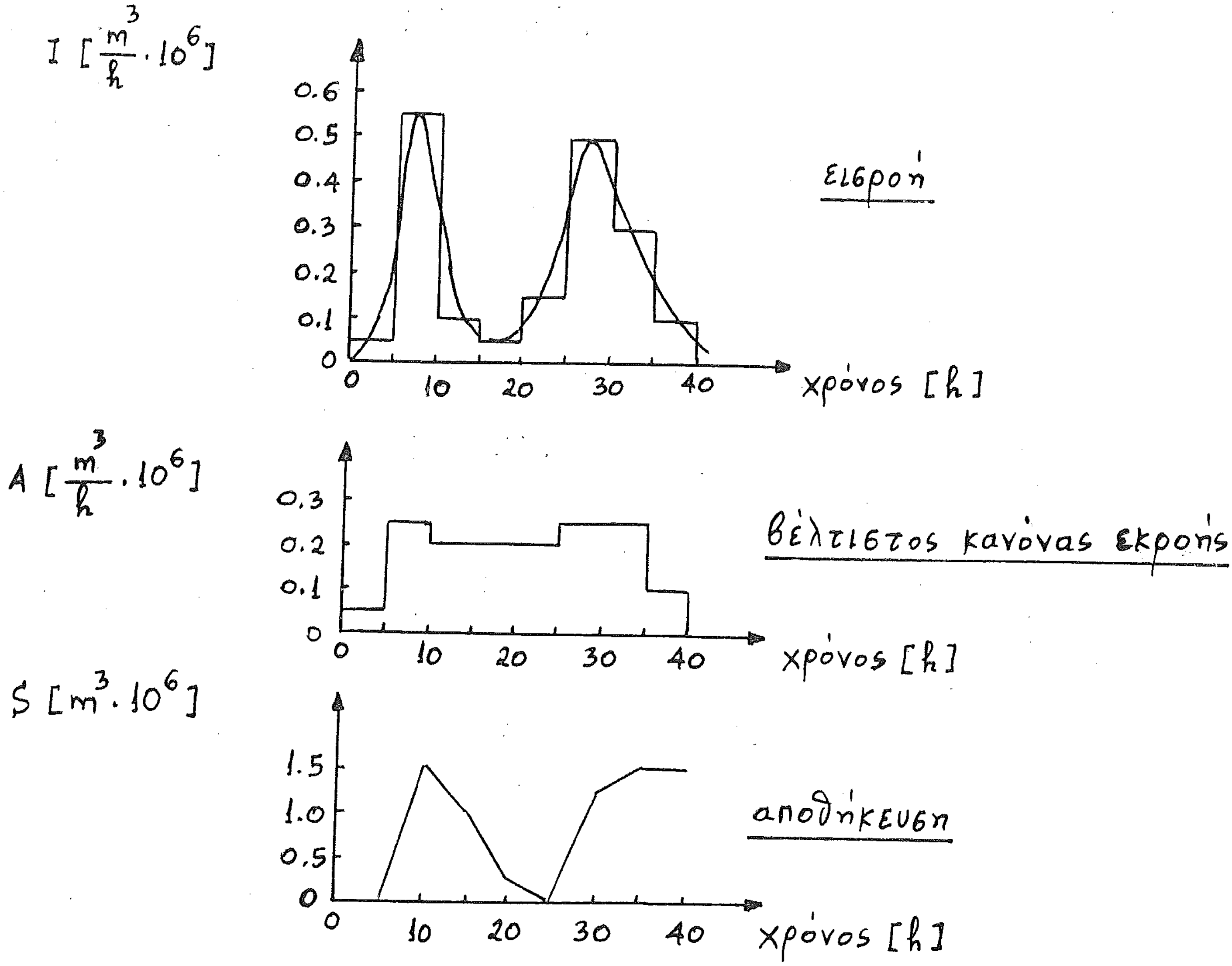
Μετασχηματισμός κατάστασης

- Αρχική κατάσταση $(i=m)$: $S_m = 0$ (κενός ταμιευτήρας)
- Τελική κατάσταση $(i=0)$: $S_0 = k$ (πλήρης ταμιευτήρας)
- Εξίσωση συνέχειας : $t_i(S_i, A_i) = S_{i-1} = S_i + I_i - A_i$



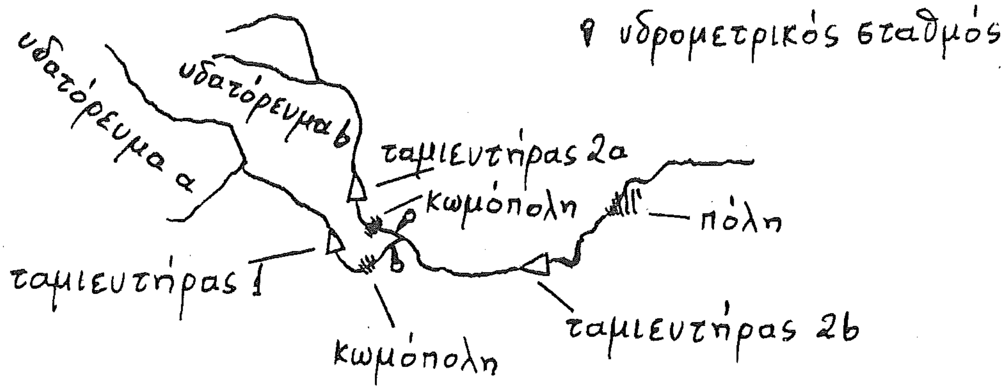
Εξίσωση Bellman

$$f_i^*(S_i) = \min \{ A_i^2 + f_{i-1}^* [t_i(S_i, A_i)] \}$$



I [m³/h · 10⁶]
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
εισροή
χρόνος [h]
A [m³/h · 10⁶]
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
βέλτιστος κανόνας εκροής
χρόνος [h]
S [m³ · 10⁶]
1.5
1.0
0.5
0
0
10
20
30
40
αποθήκευση
χρόνος [h]

Εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού σε μια ομάδα ταμιευτήρων ανάσχεσης πλημμυρών



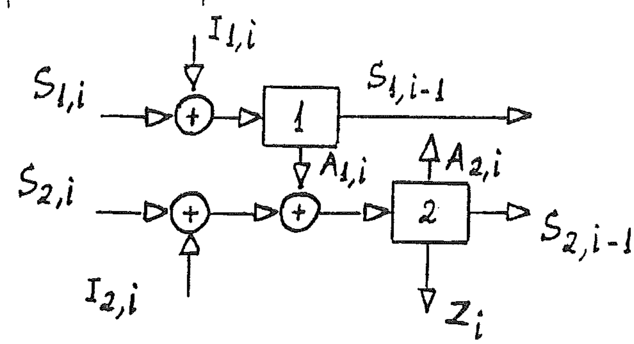
- Για ποια διάταξη ταμιευτήρων, για ένα δεδομένο πλημμυρικό κύμα, επιτυγχάνεται η μέγιστη προστασία μιας πόλης από πλημμύρες;
- Συνολική χωρητικότητα ταμιευτήρων : 10^6 m^3
- Δύο εναλλακτικές λύσεις:

  Ταμιευτήρες 1 και 2a (εν παραλλήλω)

  Ταμιευτήρες 1 και 2b (εν σειρά)

Δύο ταμιευτήρες εν σειρά

Βαθμίδα i



Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_i Z_i = \sum_i A_{2,i}^2 = \min$

Εξίσωση Bellman για τη βαθμίδα i

$$f_i^*(S_{1,i}, S_{2,i}) = \min \{ A_{2,i}^2 + f_{i-1}^* [t_{1,i}(A_{1,i}, S_{1,i}), t_{2,i}(A_{2,i}, S_{2,i})] \}$$

Μετασχηματισμός κατάστασης

$$t_{1,i}(S_{1,i}, A_{1,i}) = S_{1,i-1} = S_{1,i} + I_{1,i} - A_{1,i}$$

$$t_{2,i}(S_{2,i}, A_{2,i}) = S_{2,i-1} = S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} - A_{2,i}$$

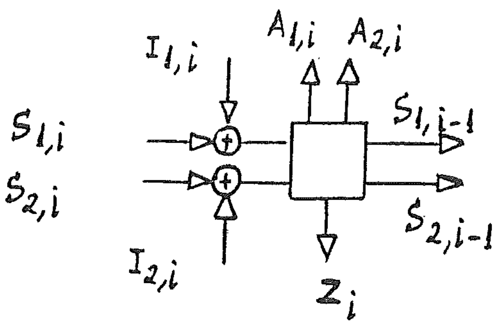
Περιορισμοί

$0 \leq S_{1,i} \leq K_1$ $\qquad$ $0 \leq S_{2,i} \leq K_2$

$$S_{1,i} + I_{1,i} \geq A_{1,i} \geq \begin{cases} S_{1,i} + I_{1,i} - K_1 \\ 0, \text{ όταν } S_{1,i} + I_{1,i} - K_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} \geq A_{2,i} \geq \begin{cases} S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} - K_2 \\ 0, \text{ όταν } S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} - K_2 \leq 0 \end{cases}$$

Δύο ταμιευτήρες εν παραλλήλω



Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_i Z_i = \sum_i (A_{1,i} + A_{2,i})^2 = min$

Εξίσωση Bellman για τη βαθμίδα i

$$f_i^*(S_{1,i}, S_{2,i}) = min\{(A_{2,i} + A_{1,i})^2 + f_{i-1}^*[t_{1,i}(A_{1,i}, S_{1,i}), t_{2,i}(A_{2,i}, S_{2,i})]\}$$

Μετασχηματισμός κατάστασης

$$t_{1,i}(S_{1,i}, A_{1,i}) = S_{1,i-1} = S_{1,i} + I_{1,i} - A_{1,i}$$

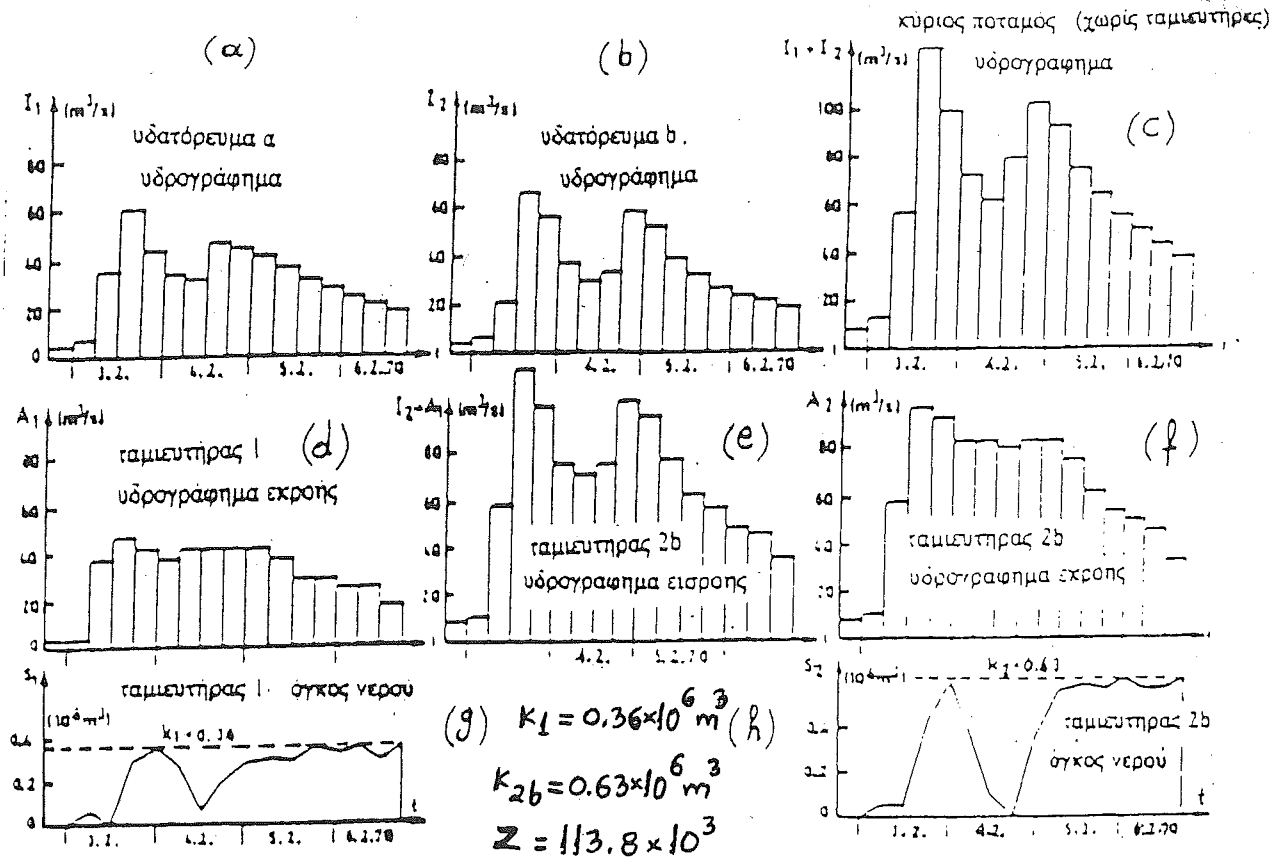
$$t_{2,i}(S_{2,i}, A_{2,i}) = S_{2,i-1} = S_{2,i} + I_{2,i} - A_{2,i}$$

Περιορισμοί

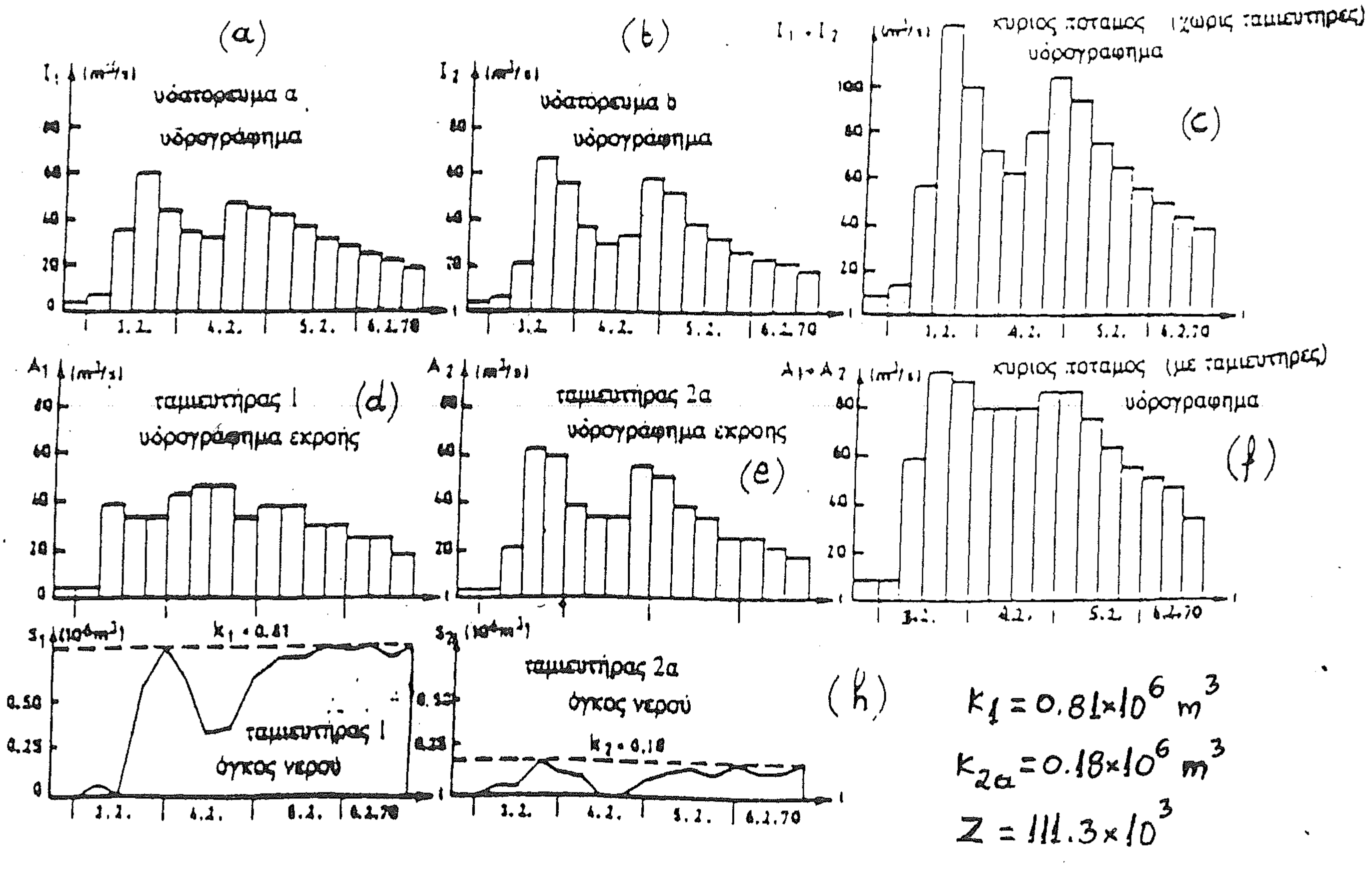
$0 \leq S_{1,i} \leq K_1$ $\qquad$ $0 \leq S_{2,i} \leq K_2$

$$S_{1,i} + I_{1,i} \geq A_{1,i} \geq \begin{cases} S_{1,i} + I_{1,i} - K_1 \\ 0, \text{ όταν } S_{1,i} + I_{1,i} - K_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$S_{2,i} + I_{2,i} \geq A_{2,i} \geq \begin{cases} S_{2,i} + I_{2,i} - K_2 \\ 0, \text{ όταν } S_{2,i} + I_{2,i} - K_2 \leq 0 \end{cases}$$



Βέλτιστος κανόνας εκροής για δύο ταμιευτήρες εν σειρά



Βέλτιστος κανόνας εκροής για δύο ταμιευτήρες εν παράλληλω