4.γ. μερική επανάληψη, εισαγωγή στη βελτιστοποίηση υδατικών συστημάτων

Δρ Μ.Σπηλιώτης

Ολοκληρωμένη διαχείριση υδατικών πόρων (integrated water resources management), έμφαση στην εξέταση όλων των πτυχών της απόφασης, προσέγγιση με πολλαπλά κριτήρια, ινστιτούτα και δημοκρατικές δομές διαβούλευσης) (Loucks et al., 2006)

Figure 2.5. Stakeholders involved in river basin planning and management, each having different goals and information needs (*Engineering News Record*, 20 September 1993, with permission).

Βελτιστοποίηση

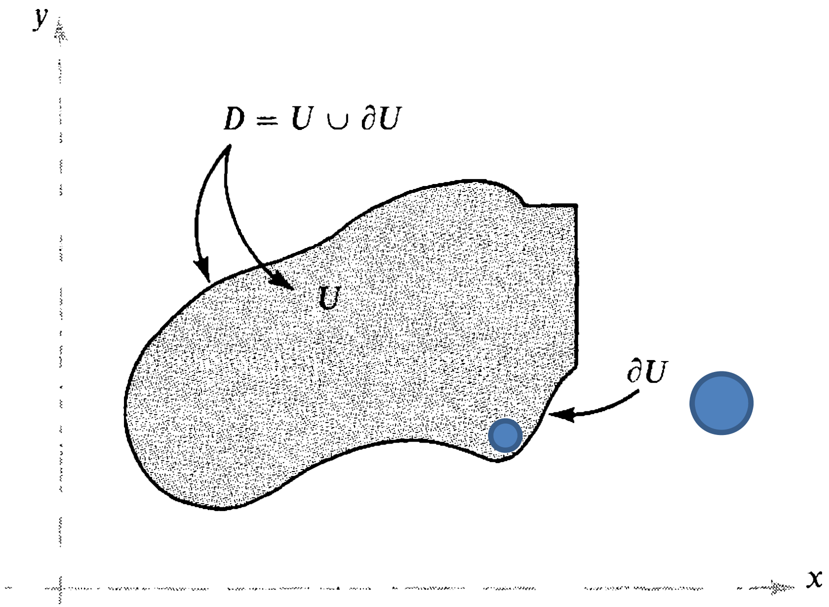
- **Χωρίς περιορισμούς:**
  – Επίλυση αναλυτικά (π.χ. μηδενισμός μερικών παραγώγων)
  – Αριθμητικά (π.χ. Newton –Raphson)
  – Παράδειγμα: **γραμμική παλινδρόμηση**, νευρωνικά δίκτυα
  – Ευρετικοί αλγόριθμοι (ενσωματώνουν την προσομοίωση)
- **Με περιορισμούς:**
  – Συμβατική μορφή:
    - Περίπτωση: **Γραμμικός προγραμματισμός**
    - Συμβατικές μέθοδοι επίλυσης (π.χ. πολλαπλασιαστές Lagrange (περιορισμοί ισοτήτων), πιο γενικά Kuhn-Tucker (περιορισμοί ισοτήτων και ανισοτήτων))
    - Αριθμητική επίλυση
  – Μη συμβατική μορφή (ευρετικοί αλγόριθμοι) ενσωμάτωση προσομοίωσης

Βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς (ή με απλό περιορισμό, ως καρτεσιανό γινόμενο)

- Μηδενισμός μερικών παραγώγων
- Έλεγχος δεύτερης τάξης παραγώγων
- Γραμμική παλινδρόμηση: ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού αθροίσματος των αποκλίσεων (μέτρηση- γραμμικό μοντέλο)
- Δες βοηθητικές σημειώσεις

Γενίκευση….

- Μία συνεχή συνάρτηση πολλαπλών μεταβλητών παίρνει μία ολική και μία μέγιστη τιμή σε κάθε κλειστή οριοθετημένη περιοχή στην οποία ορίζεται (διάβασε σύνολο εφικτών λύσεων).
- Τα (υποψήφια σημεία) είναι εσωτερικά σημεία ή τα σύνορα του πεδίου ορισμού.

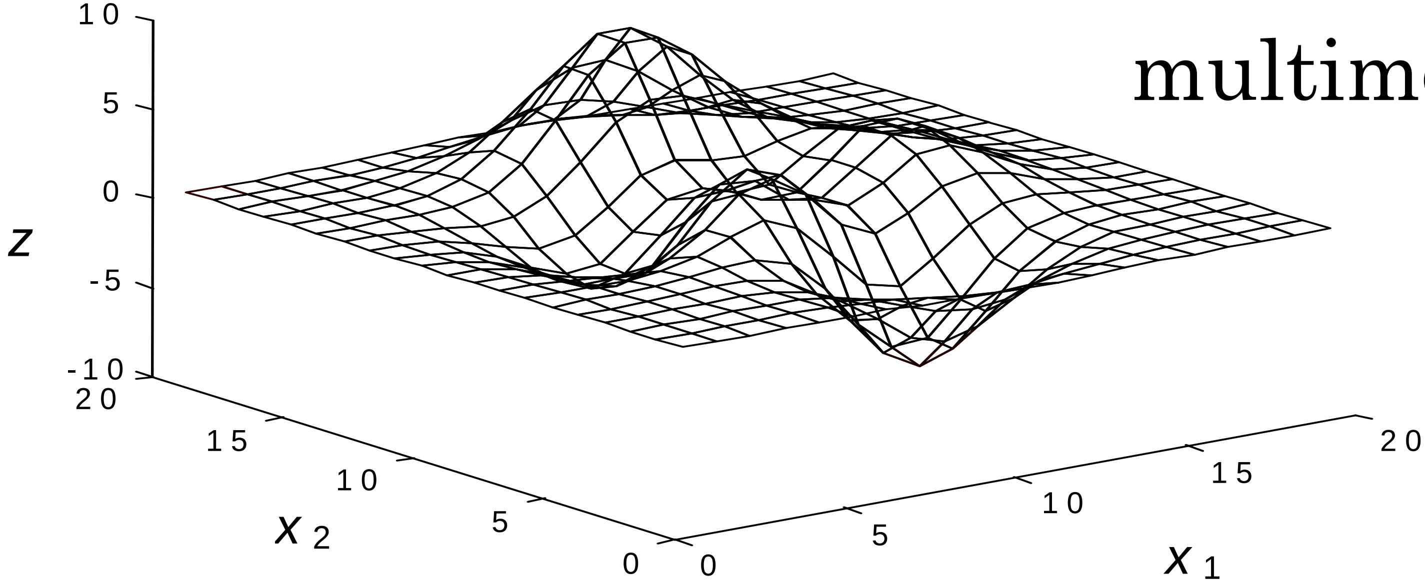


Θα υπάρχει σίγουρα ελάχιστο και μέγιστο η στο εσωτερικό U ή στο όριο

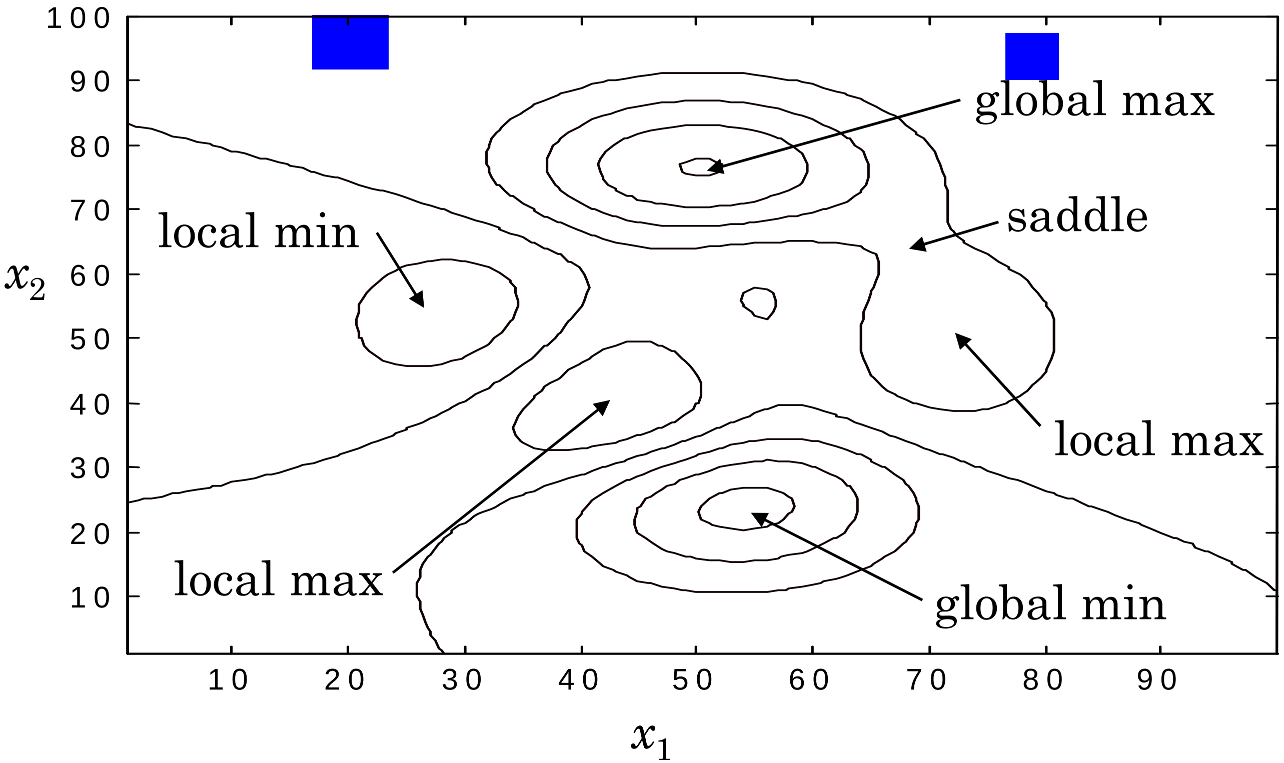
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ, ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΤΟΠΙΚΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ

$$z = 3(1-x_1)^2 \exp\left(-x_1^2-(x_2+1)^2\right)$$
$$-10(0.2x_1 - x_1^3 - x_2^5)\exp(-x_1^2 - x_2^2)$$
$$-1/3\exp\left(-(x_1+1)^2 - x_2^2\right)$$

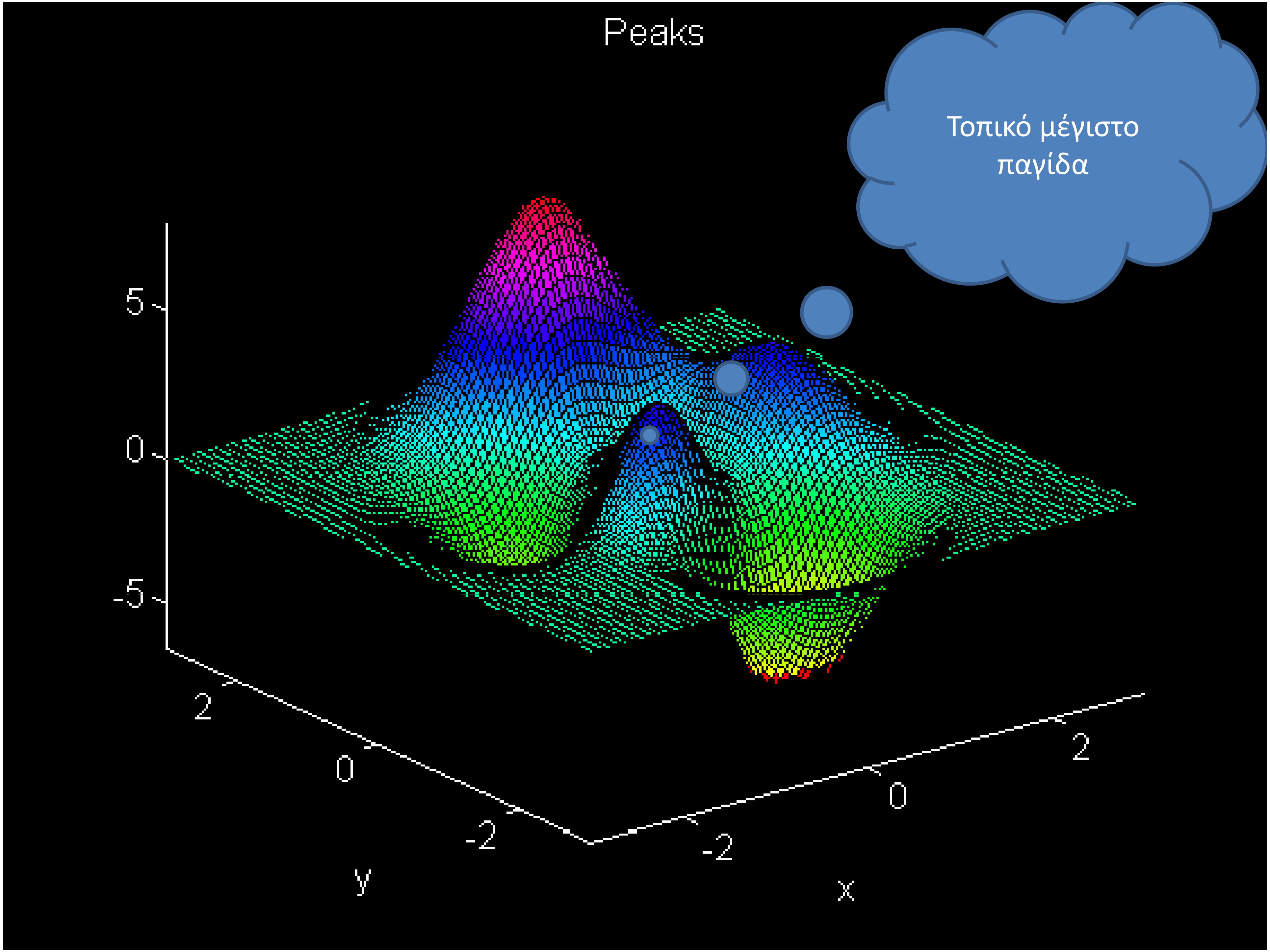
multimodal!



10
5
0
-5
-10
z
20
15
10
5
0
x_2
0
5
10
15
20
x_1



100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
x_2
10
20
30
40
50
60
70
80
90
x_1
global max
saddle
local min
local max
local max
global min


Peaks
Τοπικό μέγιστο
παγίδα
5
0
-5
2
0
-2
y
-2
0
2
x

Mathematical Description

Minimize : $f(\mathbf{x})$ objective function

Subject to: $\begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{equality constraints} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} & \text{inequality constraints} \end{cases}$

where $\mathbf{x} \in \Re^n$, is a vector of n variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$ is a vector of equalities of dimension m_1

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ is a vector of inequalities of dimension m_2

Γενική διατύπωση γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης συμβατικού τύπου

--χωρίς άμεση προσομοίωση

Γραμμικός προγραμματισμός

Συνάρτηση στόχου
Περιορισμοί } γραμμικές εξισώσεις

- Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

c_i : σταθεροί συντελεστές

x_i : μεταβλητές απόφασης

- Περιορισμοί: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$

m ανισότητες, n άγνωστοι

Χρυσάνθου, 2013

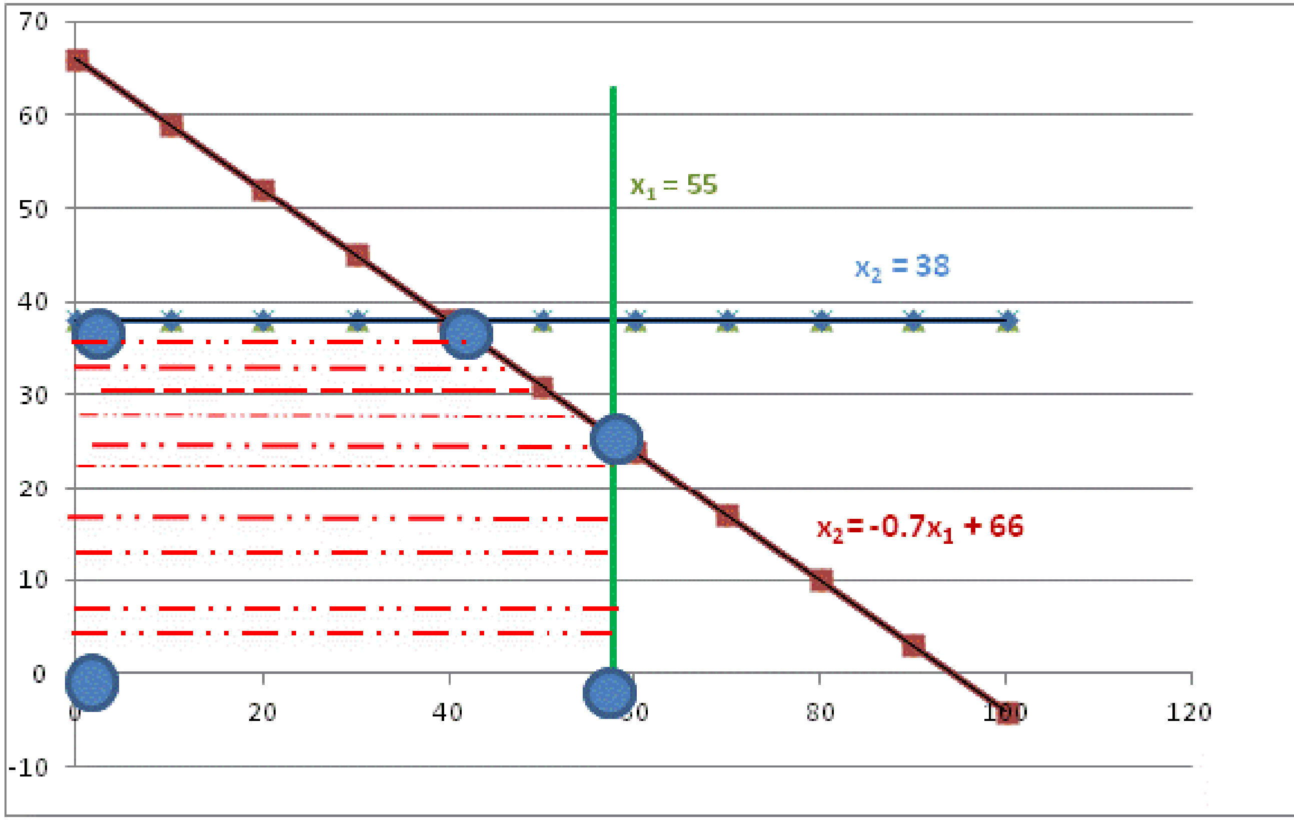
Συνθήκες προσήμου: $x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

(θετικές εισροές, αποθηκεύσεις κ.λπ.)

Κατανόηση γραμμικού προγραμματισμού

- Συνάρτηση στόχου: π.χ. επιδιωκόμενο κέρδος (μία συνάρτηση συμμετοχής)
- Μεταβλητές απόφασης, π.χ. απολήψιμες ποσότητες νερού (μη αρνητικές ποσότητες)
- Περιορισμοί, περιορισμοί διαθεσιμότητας νερού
  – Υλικοί περιορισμοί
- Λύση εντός του εφικτού πεδίου (που θα είναι κυρτό)
- ….στα σύνορα και μάλιστα στις κορυφές (για γραμμικό προγραμματισμό)

Κυρτό πεδίο ορισμού, γραμμικός προγραμματισμός λύση στις κορυφές



$$max\ (x_1 + 1,5 \cdot x_2)$$

$$x_1 \leq 66$$

$$x_2 \leq 49$$

$$x_1 \leq 55$$

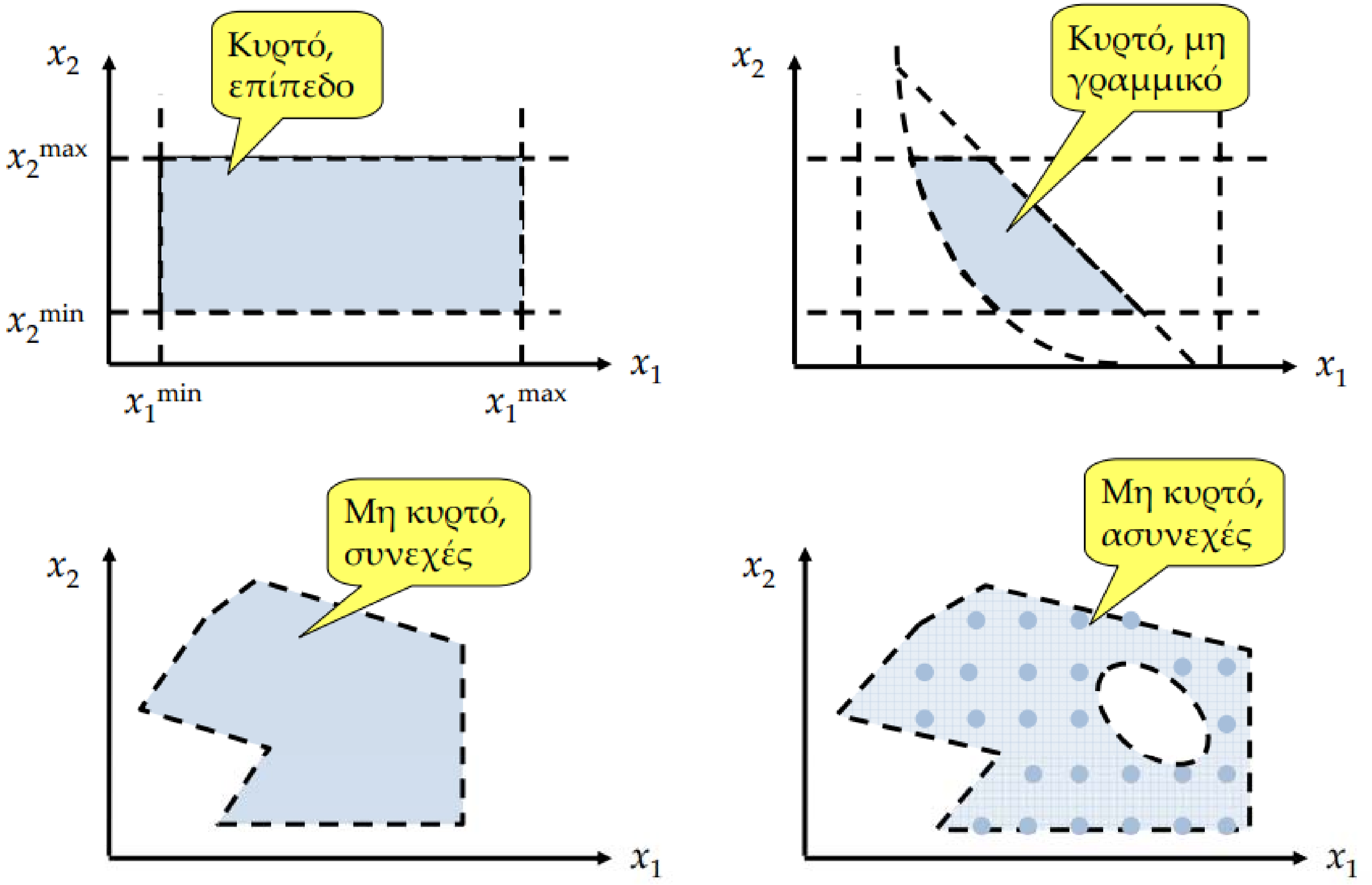
$$x_2 \leq 41$$

$$+0,7 \cdot x_1 + x_2 \leq 66$$

$$x_2 \leq 38$$

$$x_1,\ \ x_2 \geq 0$$

Παραδείγματα περιορισμών – εφικτών πεδίων



Πιο γενικά: Ευστρατιαδης, 2013

Αλγόριθμος Simplex

- Βέλτιστη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη) της συνάρτησης στόχου Ζ
- Αλγόριθμος Simplex

από κορυφή σε κορυφή

- Σύστημα ανισοτήτων ⇒ σύστημα γραμμικών εξισώσεων

Επίσης lingo, Matlab, εξέλ

- Εισαγωγή επιπλέον αγνώστων μεταβλητών x_{n+k}

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i + x_{n+k} = b_k & k=1,2,3,\ldots,m \\ x_{n+k} \geq 0 & k=1,2,3,\ldots,m \end{array}\right\} \text{Περιορισμοί}$$

(συνθήκες προσήμου)

- Με μορφή πινάκων:

Συνάρτηση στόχου: $Z = cx$

Περιορισμοί: $Ax = b$, $x \geq 0$

Χρυσάνθου, 2013

x : διάνυσμα γραμμής με $n+m$ στοιχεία

$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$

c : διάνυσμα γραμμής με $n+m$ στοιχεία

$c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{n+m}$

$c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{n+m} = 0$

b : διάνυσμα στήλης με m στοιχεία

$b_1, b_2, \ldots, b_m$

A : πίνακας με m γραμμές και $n+m$ στήλες

x_{n+k} για να γίνουν οι ανισότητες →ισότητες (βοηθητικές μεταβλητές)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $Ax = b \Rightarrow m$ γραμμικές εξισώσεις με $n+m$ αγνώστους
- Εύρεση της λύσης x που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στόχου Z (αλγόριθμος Simplex)

Τονίζεται ότι οι περιορισμοί είναι υπό την μορφή ανισοτήτων αλλά με τις βοηθητικές μεταβλητές μετατρέπονται σε ισότητες

MATLAB, με πίνακες

linprog

Solve linear programming problems

Equation

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$

f, *x*, *b*, *beq*, *lb*, and *ub* are vectors, and *A* and *Aeq* are matrices.

Syntax

```
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog(...)
[x,fval,exitflag] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...)
```

Description

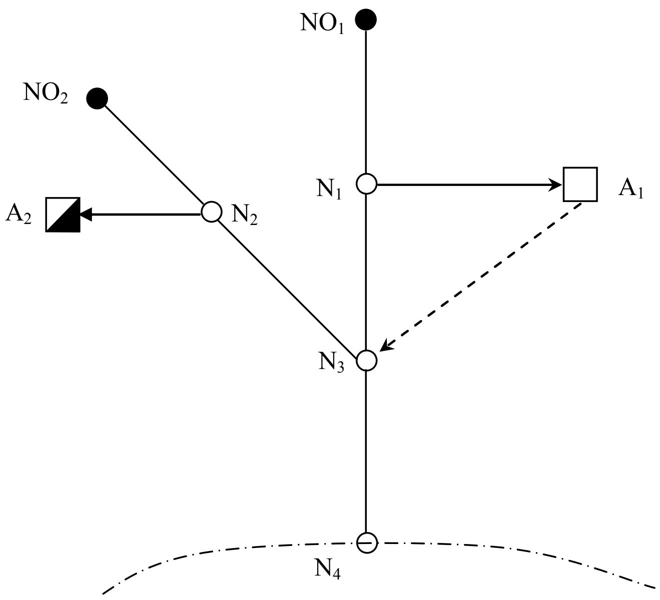
`linprog` solves linear programming problems.

`x = linprog(f,A,b)` solves min `f'*x` such that `A*x ≤ b`.

`x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)` solves the problem above while additionally satisfying the equality constraints `Aeq*x = beq`. Set `A = []` and `b = []` if no inequalities exist.

Εφαρμογή σε πρόβλημα διανομής νερού.

Στο σχήμα 1 έχει απεικονιστεί ένα απλό σύστημα διανομής νερού. Από τους κόμβους N_1 και N_2 τροφοδοτούνται τα κέντρα κατανάλωσης 1 (άρδευση) και 2 (βιομηχανία) αντίστοιχα. Ζητείται να προσδιορισθούν οι ποσότητες ύδατος που μεταφέρονται από τους κόμβους N_1 και N_2 στα κέντρα κατανάλωσης 1 και 2 αντίστοιχα με τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται όσο το δυνατόν μεγαλύτερο κέρδος.



Σχήμα 1: Σχηματική παρουσίαση του υδατικού συστήματος.

Η ποσότητα όγκου αναμεταξύ των κόμβων NO_1 και N_1 (για την περίοδο της ανάλυσης είναι 66UV(μονάδες όγκου). Η ποσότητα όγκου αναμεταξύ των κόμβων NO_2 και N_2 (για την περίοδο της ανάλυσης) είναι 49UV. Το κέρδος από την χρήση του νερού για το κέντρο κατανάλωσης 1 είναι 1 νομισματική μονάδα ανά μονάδα όγκου. Το κέρδος από την χρήση του νερού για το κέντρο κατανάλωσης 2 είναι 1,5 νομισματική μονάδα ανά μονάδα όγκου:

$$c_1 = 1BU/UV \quad , c_2 = 1.5BU/UV \; .$$

Οι μέγιστες ποσότητες κατανάλωσης ύδατος για τα κέντρα κατανάλωσης 1, 2 είναι 55UV και 41UV αντίστοιχα. Το ποσοστό νερού που από το κέντρο κατανάλωσης 1 επιστρέφει στον κόμβο N_3 είναι 30%.

Η ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα νερού στους κλάδους N_3N_4 και N_2N_3 είναι 49UV και 11UV αντίστοιχα.

$$\underset{115}{V_1 + V_2} - 0.7 \cdot x_1 - x_2 \geq QN_1 = 49\,UV$$

$$\underset{49}{V_2} - x_2 \geq QN_2 = 11\,UV$$

Περιβαλλοντικοί περιορισμοί

$$+0,7 \cdot x_1 + x_2 \leq 66$$

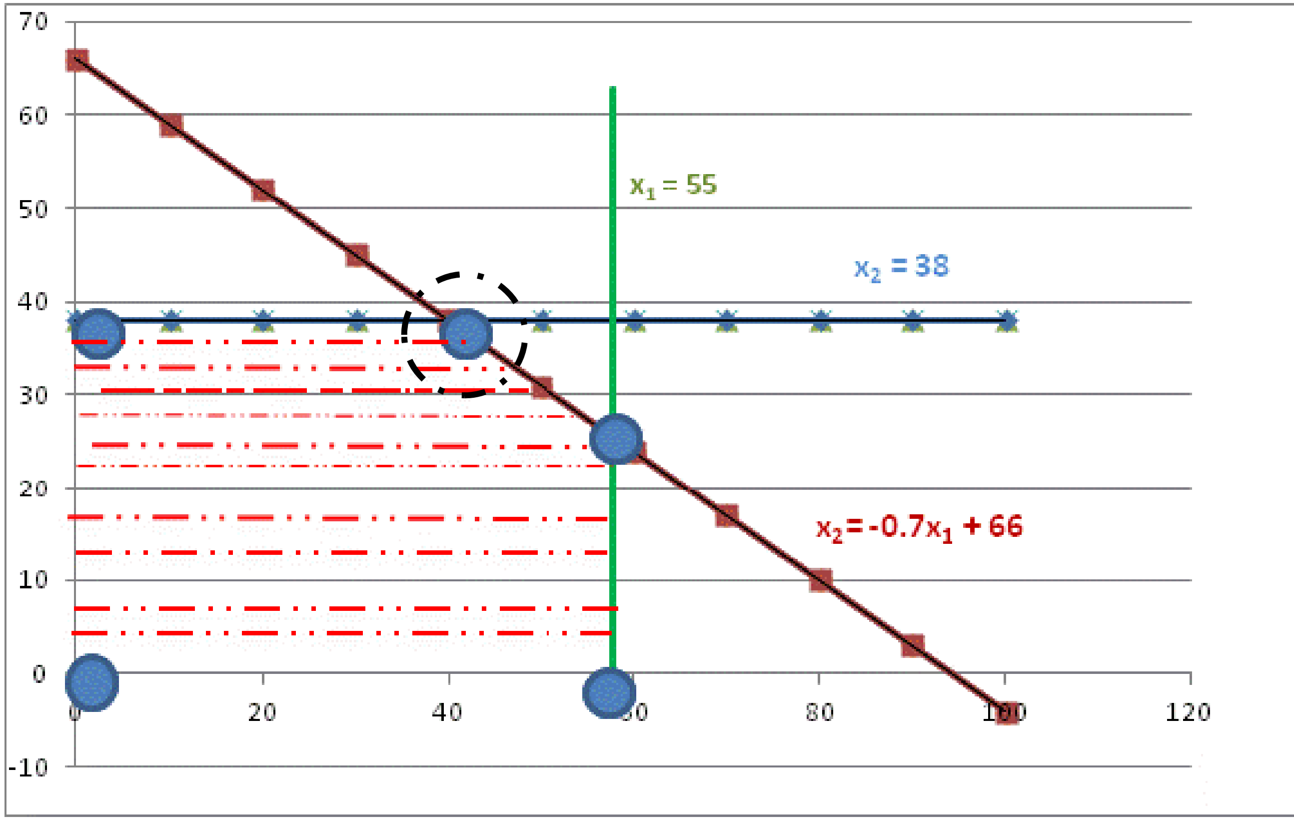
$$x_2 \leq 38$$

Περιορισμοί διαθεσιμότητας νερού

$$x_1 \leq V_1 = 66UV$$

$$x_2 \leq V_2 = 49UV$$

Κυρτό πεδίο ορισμού, γραμμικός προγραμματισμός λύση στις κορυφές



$$max\ (x_1 + 1.5 \cdot x_2)$$

$$x_1 \le 66$$

$$x_2 \le 49$$

$$x_1 \le 55$$

$$x_2 \le 41$$

$$+0.7 \cdot x_1 + x_2 \le 66$$

$$x_2 \le 38$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Σχηματοποίηση Υδατικού Συστήματος

- Σχηματοποίηση
  - Υδατικού συστήματος
  - Κόμβοι
  - Κλάδοι

- Καταναλώσεις: «σημειακές» από κόμβους)
- Διαθεσιμότητα νερού: από τον αμέσως ανάντη κλάδο (προσέγγιση). Γνώση από προσομοίωση

- Ανά κλάδο, θεώρηση, ή μη απωλειών η εμπλουτισμού
  η σταθερή παροχή όπως εδώ

- Άλλη προσέγγιση διαθεσιμότητα ανάντη κόμβου στον κατάντη κόμβο κατανάλωσης

- Άλλη προσέγγιση:

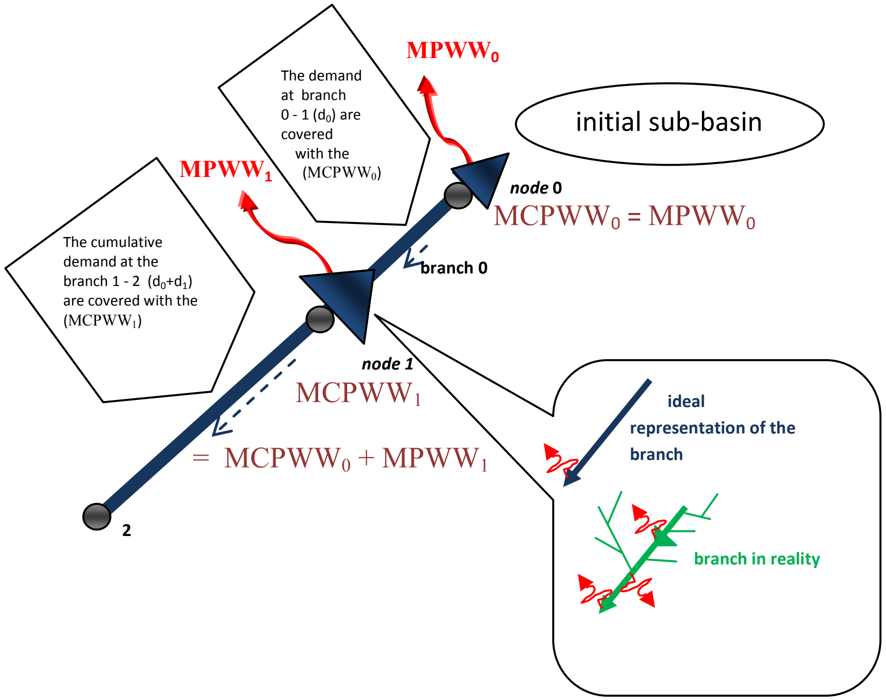


Fig.1: Calculation of the Maximum Cumulative Potential Withdrawal

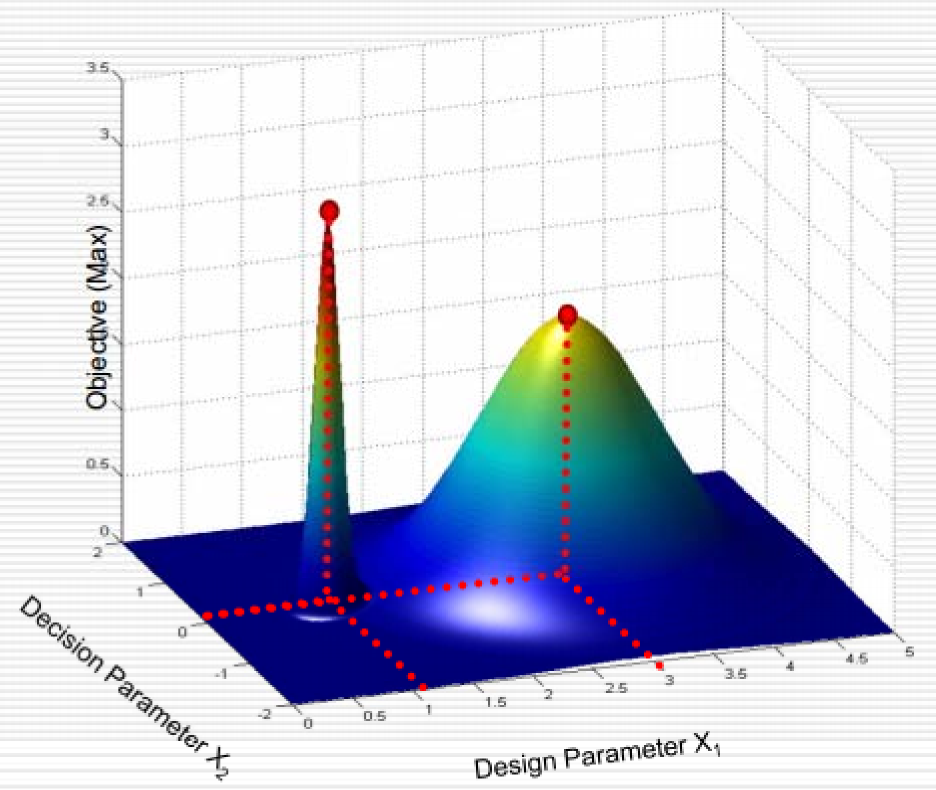
Μερικές διαφορές γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού

- Ακόμη και αν το πεδίο εφικτών λύσεων είναι κυρτό σύνολο (π.χ. λόγω ύπαρξης μόνο γραμμικών περιορισμών) το βέλτιστο δεν είναι απαραίτητα στο σύνορο του πεδίου ορισμού
- Το πεδίο των εφικτών λύσεων δεν είναι πάντα κυρτό
- Δυναμική ενσωμάτωση της προσομοίωσης με ευρετικούς αλγορίθμους

Μαρκόπουλος και Ευστρατιάδης, 2013
https://www.itia.ntua.gr/getfile/1109/1/documents/Week1_Introduction_full.pdf

Βέλτιστη λύση: όχι πάντα η κορυφή της καμπύλης

- Αβεβαιότητα στις παραμέτρους
- Αβεβαιότητα στην αντίληψή μας για το πρόβλημα
- Μεταβολές στα δεδομένα και τις διεργασίες του συστήματος
- «Εύρωστη» λύση (robust solution)



Κριτική/ μετάβαση στο επόμενο μάθημα

- Ύπαρξη πολλαπλών στόχων → κριτήρια → στη βελτιστοποίηση, συναρτήσεις στόχου. *(βλπ πολλαπλά κριτήρια, αποτελεσματικές λύσεις)*
- Δεν μπορούμε να παραμείνουμε σε μία απλή συνθετική συνάρτηση (σύνθεση διαφορετικών ποσοτήτων, βάρη???, ισόρροπες αποφάσεις???)
- Ενσωμάτωση της αβεβαιότητας στην απόφαση *(βλπ ασαφή λογική)*
- Ανάγκη πρόβλεψης ευκαμψίας, οι οριακές λύσεις (π.χ. μετά από βελτιστοποίηση με αυστηρούς περιορισμούς) σε μία περίπτωση βλάβης οδηγούν σε καθολική αστοχία απόφαση (βλπ δίκτυα διανομής νερού) *(βλπ ασαφή λογική και πολλαπλά κριτήρια)*
- Αλληλεπιδραστική διαδικασία
- Ανάγκη για πιστότερη προσομοίωση του συστήματος *(βλπ προσομοίωση+βελτιστοποίηση ή ευρετικοί αλγόριθμοι)*