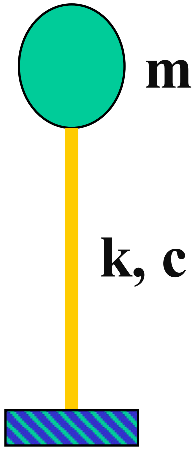
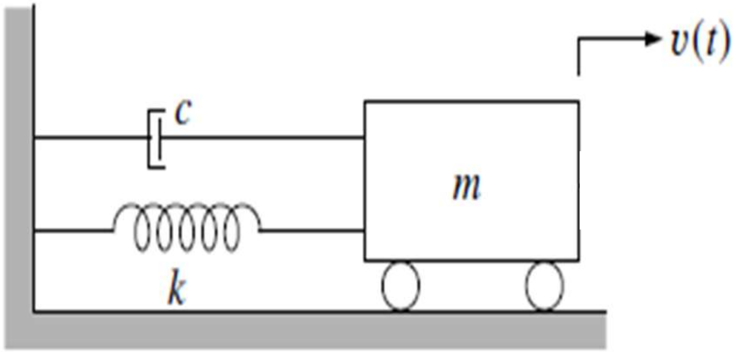
Μονοβάθμιος ταλαντωτής (SDOF)

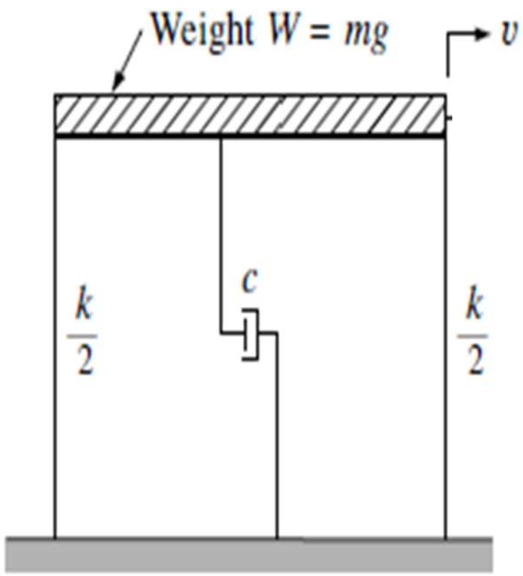
Προσομοίωση ενός SDOF:
Μια μάζα **m** συγκεντρωμένη στην κορυφή ενός ελατηρίου σταθεράς **k**
c= απόσβεση



Άλλες προσομοιώσεις ενός SDOF:



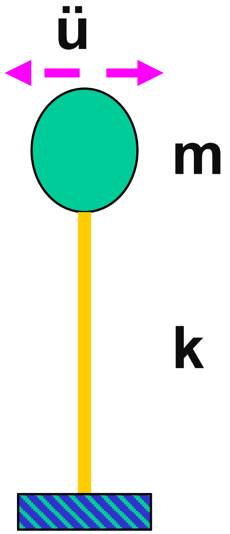
The traveling cart

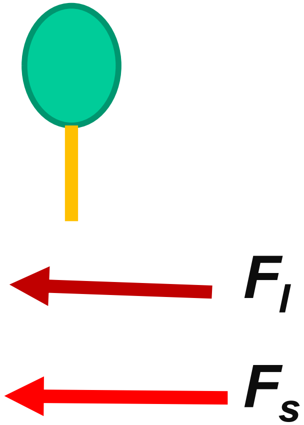


ένα πλαίσιο με μια πλάκα στην κορυφή

Μονοβάθμιος ταλαντωτής (SDOF) χωρίς απόσβεση:

Οι μηχανισμοί που αντιστέκονται στην κίνηση: αδράνεια και η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου k





$$F_I = m \cdot \ddot{u}$$

$$F_S = -k \cdot u$$

$$\boxed{F_I + F_S = 0}$$

Ισορροπία: ***δεν δρα άλλη δύναμη ή άλλη εξαναγκασμένη ταλάντωση στον SDOF:***

2ος N.N.:

$F_S = m \cdot \ddot{u}$

$-k \cdot u = m \cdot \ddot{u}$

$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0$

$\ddot{u} + (k/m) \cdot u = 0$

Αν ορίσω: $\omega^2 = k/m$

$$\boxed{\begin{gathered}\ddot{u} + \omega^2 \cdot u = 0, \\ \ddot{u} = -\,\omega^2 \cdot u\end{gathered}}$$

Μονοβάθμιος ταλαντωτής (SDOF) χωρίς απόσβεση:

(δεν δρα άλλη δύναμη ή άλλη εξαναγκασμένη ταλάντωση στον SDOF)

Από $\ddot{u} = -\omega^2 \cdot u$ ➔ η επιτάχυνση και η μετατόπιση συσχετίζονται γραμμικά μέσω $\omega^2 = k/m$

$\ddot{u} + \omega^2 \cdot u = 0$

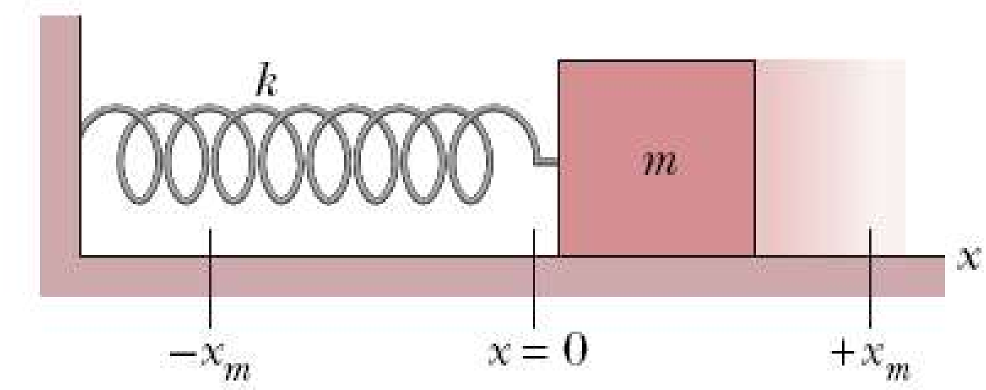
Διαφορική εξίσωση με λύση: $u(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$

Απλή αρμονική ταλάντωση!

Οι συντελεστές C_i καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος

Απλή αρμονική ταλάντωση:

Τεντώνω το ελατήριο μέχρι την θέση x_m και μετά το αφήνω:



$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$

Αρχική θέση: $x(t=0) = x_m \Rightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = x_m \Rightarrow c_2 = x_m$

Αρχική ταχύτητα:

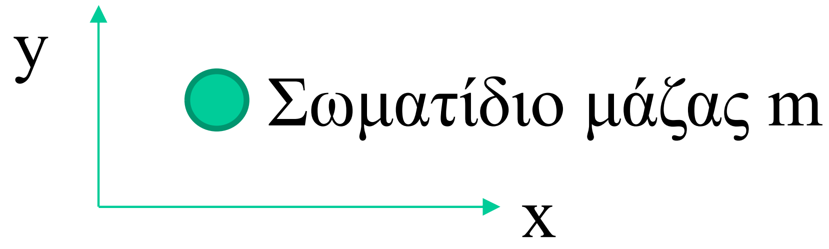
$v(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) - c_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow 0 = c_1 \cdot \omega \cdot 1 + 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\Rightarrow x(t) = x_m \cos(\omega t)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Newtons' second law of motion:
Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής σωματιδίου μάζας m είναι ίσος με τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό

Ορμή: $p = m \cdot v$



$$\frac{dp}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} = m \cdot \ddot{u} = \mathrm{F}$$

$\Rightarrow dp = Fdt$ = ώθηση (για πόσο χρόνο δρα η δύναμη)

D' Alembert's Principle: όταν ένα σώμα επιταχύνει/επιβραδύνει, υπάρχει μία δύναμη που δρα σε αυτό, ίση με μάζα × επιτάχυνση, που είναι αντίθετη της επιτάχυνσης. Η Δύναμη αυτή λέγεται αδρανειακή ($m \cdot \ddot{u}$)

Ισχύς: $F \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{dK}{dt}$

αν $F \cdot v \cdot \boldsymbol{dt} = \frac{dK}{dt} \cdot \boldsymbol{dt}$ ➔ $F \cdot \frac{du}{dt} \cdot \boldsymbol{dt} = \frac{dK}{dt} \cdot \boldsymbol{dt}$ ➔ $F \cdot du = dK$

Με ολοκλήρωση: $\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} = \int_{u,αρχ}^{u,τελ} \mathrm{F} \cdot du = W$

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

$$K_{τελ} - W = K_{αρχ} \xrightarrow{W=-\Delta U} K_{τελ} + (U_{τελ} - U_{αρχ}) = K_{αρχ} \Rightarrow K_{τελ} + U_{τελ} = K_{αρχ} + U_{αρχ}$$

Ενέργεια και Ταλάντωση ελατηρίου

ΔK=W= $\int_{u,\alpha\rho\chi}^{u,\tau\epsilon\lambda} \mathrm{F}\cdot du = \int_{u,\alpha\rho\chi}^{u,\tau\epsilon\lambda} -\mathrm{ku}\cdot du \rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv_{\tau\epsilon\lambda}{}^2 - \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}{}^2 = \underbrace{-\frac{1}{2}ku_{\tau\epsilon\lambda}{}^2 + \frac{1}{2}ku_{\alpha\rho\chi}{}^2}$$

Η συνάρτηση της Δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου k:

$$\boldsymbol{W = -\left(\frac{1}{2}ku_{\tau\epsilon\lambda}{}^2 - \frac{1}{2}ku_{\alpha\rho\chi}{}^2\right) = -\Delta U}$$

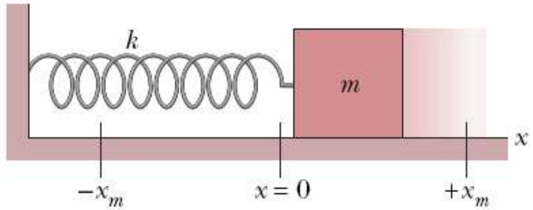
$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m{}^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

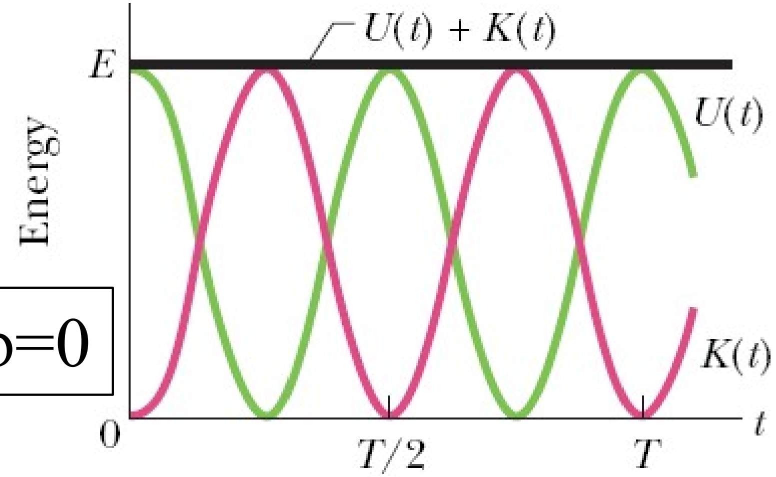
Η συν. της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m:

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m{}^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kx_m{}^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

Η συνολική μηχανική ενέργεια του συστήματος:

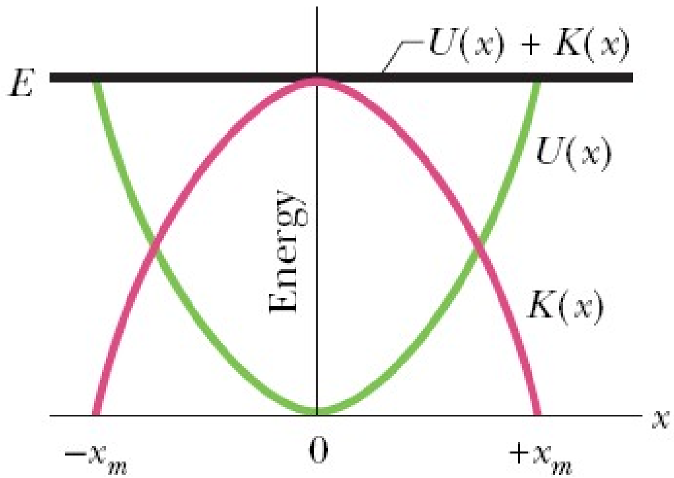
$$E = U + K = \frac{1}{2}kx_m{}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m{}^2 = \frac{1}{2}mv_m{}^2$$





φ=0

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Example, force law:

A block whose mass m is 680 g is fastened to a spring whose spring constant k is 65 N/m. The block is pulled a distance $x = 11$ cm from its equilibrium position at $x = 0$ on a frictionless surface and released from rest at $t = 0$.

(a) What are the angular frequency, the frequency, and the period of the resulting motion?

KEY IDEA The block–spring system forms a linear simple harmonic oscillator, with the block undergoing SHM.

Calculations: The angular frequency is given by Eq. 15-12:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65\ \text{N/m}}{0.68\ \text{kg}}} = 9.78\ \text{rad/s}$$

$$\approx 9.8\ \text{rad/s.} \qquad \text{(Answer)}$$

The frequency follows from Eq. 15-5, which yields

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.78\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}} = 1.56\ \text{Hz} \approx 1.6\ \text{Hz.} \qquad \text{(Answer)}$$

The period follows from Eq. 15-2, which yields

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.56\ \text{Hz}} = 0.64\ \text{s} = 640\ \text{ms.} \qquad \text{(Answer)}$$

Example, force law:

A block whose mass m is 680 g is fastened to a spring whose spring constant k is 65 N/m. The block is pulled a distance $x = 11$ cm from its equilibrium position at $x = 0$ on a frictionless surface and released from rest at $t = 0$.

(b) What is the amplitude of the oscillation?

KEY IDEA With no friction involved, the mechanical energy of the spring–block system is conserved.

Reasoning: The block is released from rest 11 cm from its equilibrium position, with zero kinetic energy and the elastic potential energy of the system at a maximum. Thus, the block will have zero kinetic energy whenever it is again 11 cm from its equilibrium position, which means it will never be farther than 11 cm from that position. Its maximum displacement is 11 cm:

$$x_m = 11 \text{ cm}. \qquad \text{(Answer)}$$

Example, force law: A block whose mass m is 680 g is fastened to a spring whose spring constant k is 65 N/m. The block is pulled a distance $x = 11$ cm from its equilibrium position at $x = 0$ on a frictionless surface and released from rest at $t = 0$.

(c) What is the maximum speed v_m of the oscillating block, and where is the block when it has this speed?

KEY IDEA The maximum speed v_m is the velocity amplitude ωx_m in Eq. 15-6.

Calculation: Thus, we have

$$v_m = \omega x_m = (9.78 \text{ rad/s})(0.11 \text{ m})$$
$$= 1.1 \text{ m/s.} \qquad \text{(Answer)}$$

This maximum speed occurs when the oscillating block is rushing through the origin; compare Figs. 15-4*a* and 15-4*b*, where you can see that the speed is a maximum whenever $x = 0$.

Example, force law:

A block whose mass m is 680 g is fastened to a spring whose spring constant k is 65 N/m. The block is pulled a distance $x = 11$ cm from its equilibrium position at $x = 0$ on a frictionless surface and released from rest at $t = 0$.

(d) What is the magnitude a_m of the maximum acceleration of the block?

KEY IDEA The magnitude a_m of the maximum acceleration is the acceleration amplitude $\omega^2 x_m$ in Eq. 15-7.

Calculation: So, we have

$$a_m = \omega^2 x_m = (9.78 \text{ rad/s})^2(0.11 \text{ m}) = 11 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Answer)}$$

This maximum acceleration occurs when the block is at the ends of its path. At those points, the force acting on the block has its maximum magnitude; compare Figs. 15-4*a* and 15-4*c*, where you can see that the magnitudes of the displacement and acceleration are maximum at the same times.

Example, force law:

A block whose mass m is 680 g is fastened to a spring whose spring constant k is 65 N/m. The block is pulled a distance $x = 11$ cm from its equilibrium position at $x = 0$ on a frictionless surface and released from rest at $t = 0$.

(e) What is the phase constant ϕ for the motion?

Calculations: Equation 15-3 gives the displacement of the block as a function of time. We know that at time $t = 0$, the block is located at $x = x_m$. Substituting these *initial conditions*, as they are called, into Eq. 15-3 and canceling x_m give us

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$1 = \cos \phi. \qquad (15\text{-}14)$$

Taking the inverse cosine then yields

$$\phi = 0 \text{ rad}. \qquad \text{(Answer)}$$

(Any angle that is an integer multiple of 2π rad also satisfies Eq. 15-14; we chose the smallest angle.)

Example, force law:

A block whose mass m is 680 g is fastened to a spring whose spring constant k is 65 N/m. The block is pulled a distance $x = 11$ cm from its equilibrium position at $x = 0$ on a frictionless surface and released from rest at $t = 0$.

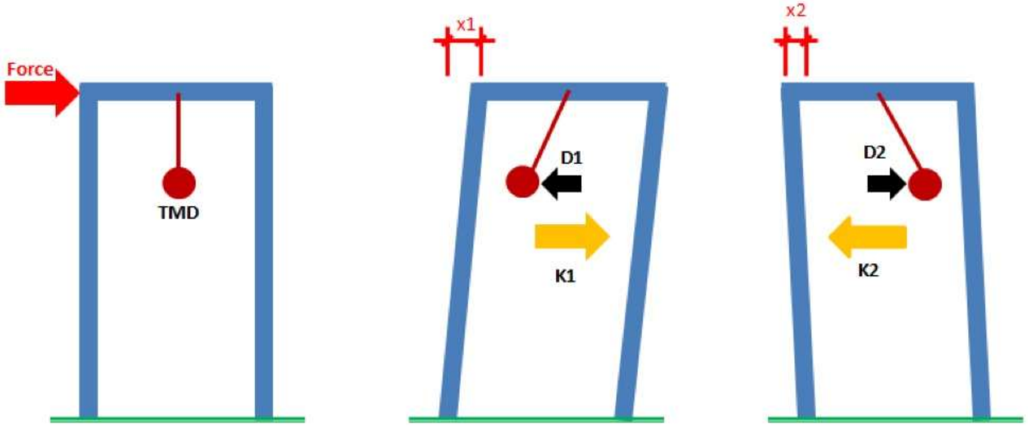
(f) What is the displacement function $x(t)$ for the spring–block system?

Calculation: The function $x(t)$ is given in general form by Eq. 15-3. Substituting known quantities into that equation gives us

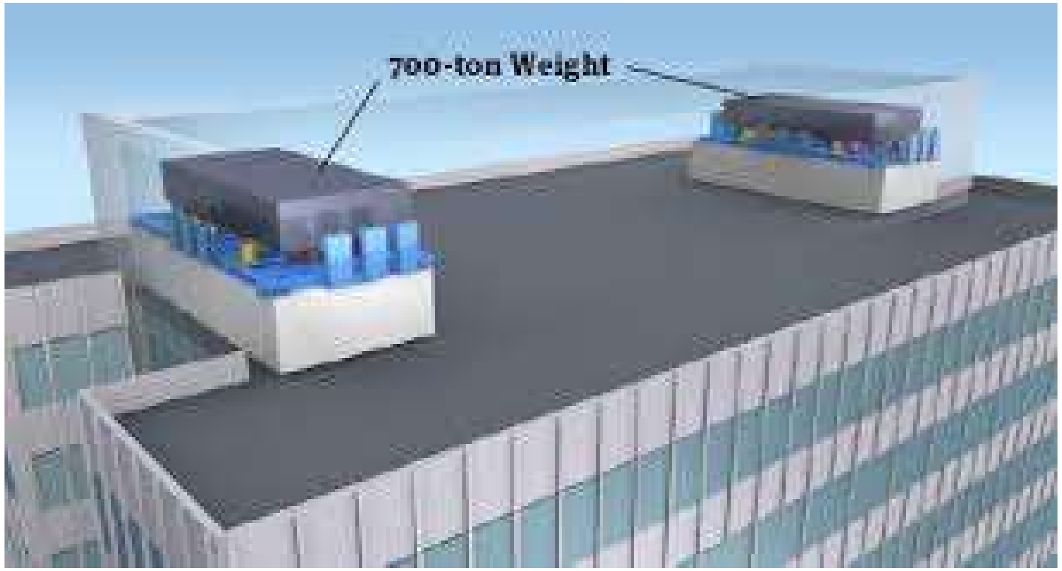
$$\begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= (0.11\text{ m}) \cos[(9.8\text{ rad/s})t + 0] \\ &= 0.11 \cos(9.8t), \qquad \text{(Answer)} \end{aligned}$$

where x is in meters and t is in seconds.

Example, energy in SHM:



Schematic B - Building With TMD



Many tall building have mass dampers, which are anti-sway devices to prevent them from oscillating in a wind. The device might be a block oscillating at the end of a spring and on a lubricated track. If the building sways, say eastward, the block also moves eastward but delayed enough so that when it finally moves, the building is then moving back westward. Thus, the motion of the oscillator is out of step with the motion of the building. Suppose that the block has mass $m = 2.72 \times 10^5$ kg (272 tons) and is designed to oscillate at frequency $f = 10.0$ Hz and with amplitude $x_m = 20.0$ cm.

(a) What is the total mechanical energy E of the spring-block system?

Example, energy in SHM:

Many tall building have mass dampers, which are anti-sway devices to prevent them from oscillating in a wind. The device might be a block oscillating at the end of a spring and on a lubricated track. If the building sways, say eastward, the block also moves eastward but delayed enough so that when it finally moves, the building is then moving back westward. Thus, the motion of the oscillator is out of step with the motion of the building. Suppose that the block has mass m = 2.72 x 10^5 kg and is designed to oscillate at frequency f = 10.0 Hz and with amplitude x_m = 20.0 cm.

(a) What is the total mechanical energy E of the spring-block system?

KEY IDEA The mechanical energy E (the sum of the kinetic energy $K = \frac{1}{2}mv^2$ of the block and the potential energy $U = \frac{1}{2}kx^2$ of the spring) is constant throughout the motion of the oscillator. Thus, we can evaluate E at any point during the motion.

Calculations: Because we are given amplitude x_m of the oscillations, let's evaluate E when the block is at position $x = x_m$, where it has velocity $v = 0$. However, to evaluate U at that point, we first need to find the spring constant k. From Eq. 15-12 ($\omega = \sqrt{k/m}$) and Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi f$), we find

$$\begin{aligned} k &= m\omega^2 = m(2\pi f)^2 \\ &= (2.72 \times 10^5 \text{ kg})(2\pi)^2(10.0 \text{ Hz})^2 \\ &= 1.073 \times 10^9 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

We can now evaluate E as

$$\begin{aligned} E &= K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}(1.073 \times 10^9 \text{ N/m})(0.20 \text{ m})^2 \\ &= 2.147 \times 10^7 \text{ J} \approx 2.1 \times 10^7 \text{ J}. \qquad \text{(Answer)} \end{aligned}$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Example, energy, continued:

(b) What is the block's speed as it passes through the equilibrium point?

Calculations: We want the speed at $x = 0$, where the potential energy is $U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$ and the mechanical energy is entirely kinetic energy. So, we can write

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$2.147 \times 10^7\ \text{J} = \tfrac{1}{2}(2.72 \times 10^5\ \text{kg})v^2 + 0,$$

or

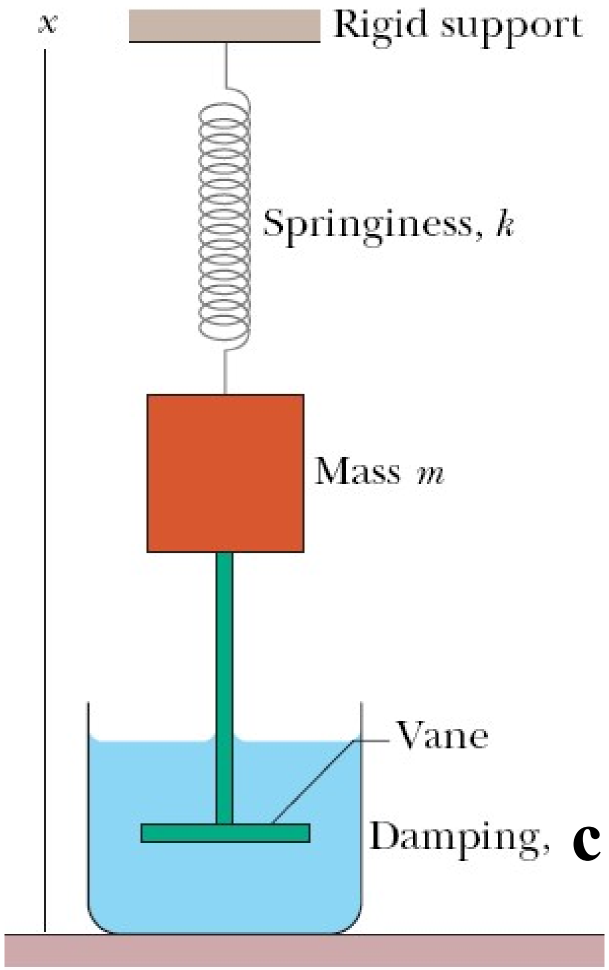
$$v = 12.6\ \text{m/s.} \mathbf{=45km/h} \qquad \text{(Answer)}$$

Because E is entirely kinetic energy, this is the maximum speed v_m.

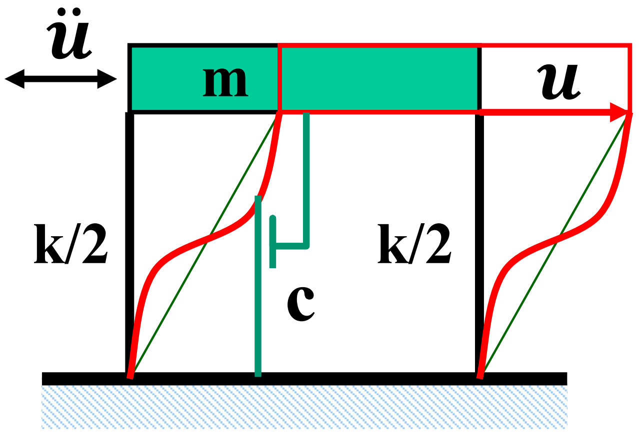
Απλή αρμονική ταλάντωση ΜΕ απόσβεση

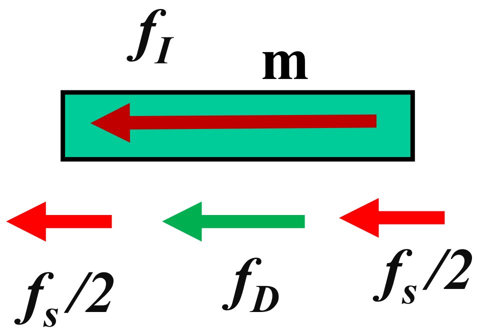
Η δύναμη απόσβεσης (damping) είναι ανάλογη της ταχύτητας v, **(c σε Kgr/sec)**:

$$F_D = -cv = c \cdot \dot{u}$$



επιτάχυνση **μετατόπιση**





$$f_I + f_D + f_S = 0$$

$$f_I = m \cdot \ddot{u}$$

$$f_S = k \cdot u$$

$$f_D = c \cdot \dot{u}$$

Η διαφορική εξίσωση κίνησης μονοβάθμιου ταλαντωτή σε ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

$$\boxed{m \cdot \ddot{u} \quad + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0}$$

Απλή αρμονική ταλάντωση ΜΕ απόσβεση

Η εξίσωση κίνησης μονοβάθμιου ταλαντωτή σε ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

$$m \cdot \ddot{u} \quad + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0$$

Λύση:

ταλάντωση　　απόσβεση

$$u(t) = \rho \cdot \cos(\,\omega_D \cdot t + \theta) \cdot e^{-\zeta\omega t}$$

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D}\right]^2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left[-\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D \cdot u(0)}\right]$$

$$2\pi/\mathrm{T} = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (ΑΑΤ χωρίς απόσβεση)}$$

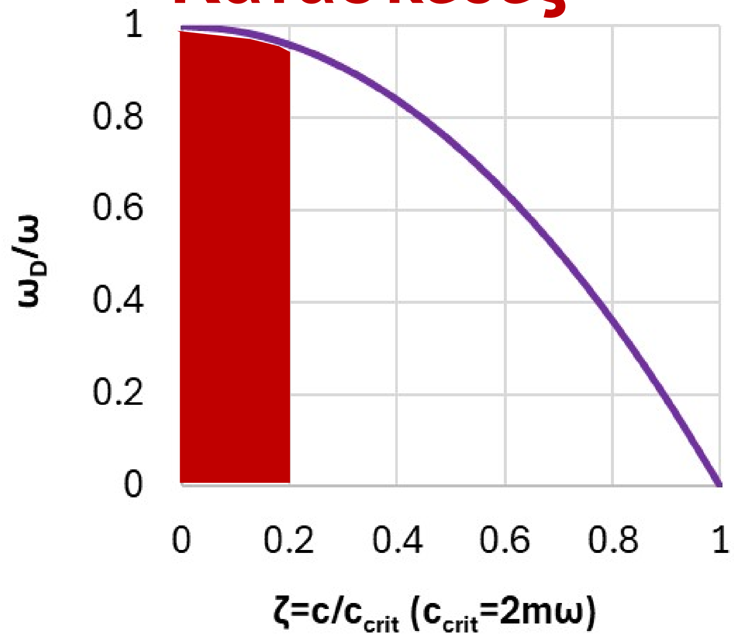
$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4mk - c^2}{4m^2}} \text{ (ταλ. με απόσβεση)}$$

$$\text{Για } c_{crit} = \sqrt{4mk} = 2m\omega \text{ (όταν } \omega_D = 0)$$

$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Κατασκευές



Διερεύνηση: $u(t) = \rho \cdot \cos(\omega_D \cdot t + \theta) \cdot e^{-\zeta\omega t}$ $\qquad \omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}}$$

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D}\right]^2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left[-\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D\cdot u(0)}\right]$$

Για ζ=0 ➔ $\omega_D = \omega$ ➔ ταλάντωση χωρίς απόσβεση (c=0)

$$\boldsymbol{u(t) = \rho\cdot\cos(\omega\cdot t+\theta)}, \quad \boldsymbol{\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2}}, \quad \boldsymbol{\theta = \arctan\left[-\frac{\dot{u}(0)}{\omega\cdot u(0)}\right]}$$

Για 0<ζ<1 ➔ ταλάντωση με απόσβεση πλάτους

Για ζ=1 ($c = c_{crit} = 2m\omega$) ➔ $\omega_D=0$ ➔ δεν υπάρχει ταλάντωση, μόνο απόσβεση κίνησης: $u(t) = \rho\cdot e^{-\omega t}, \rho = [u(0)]$

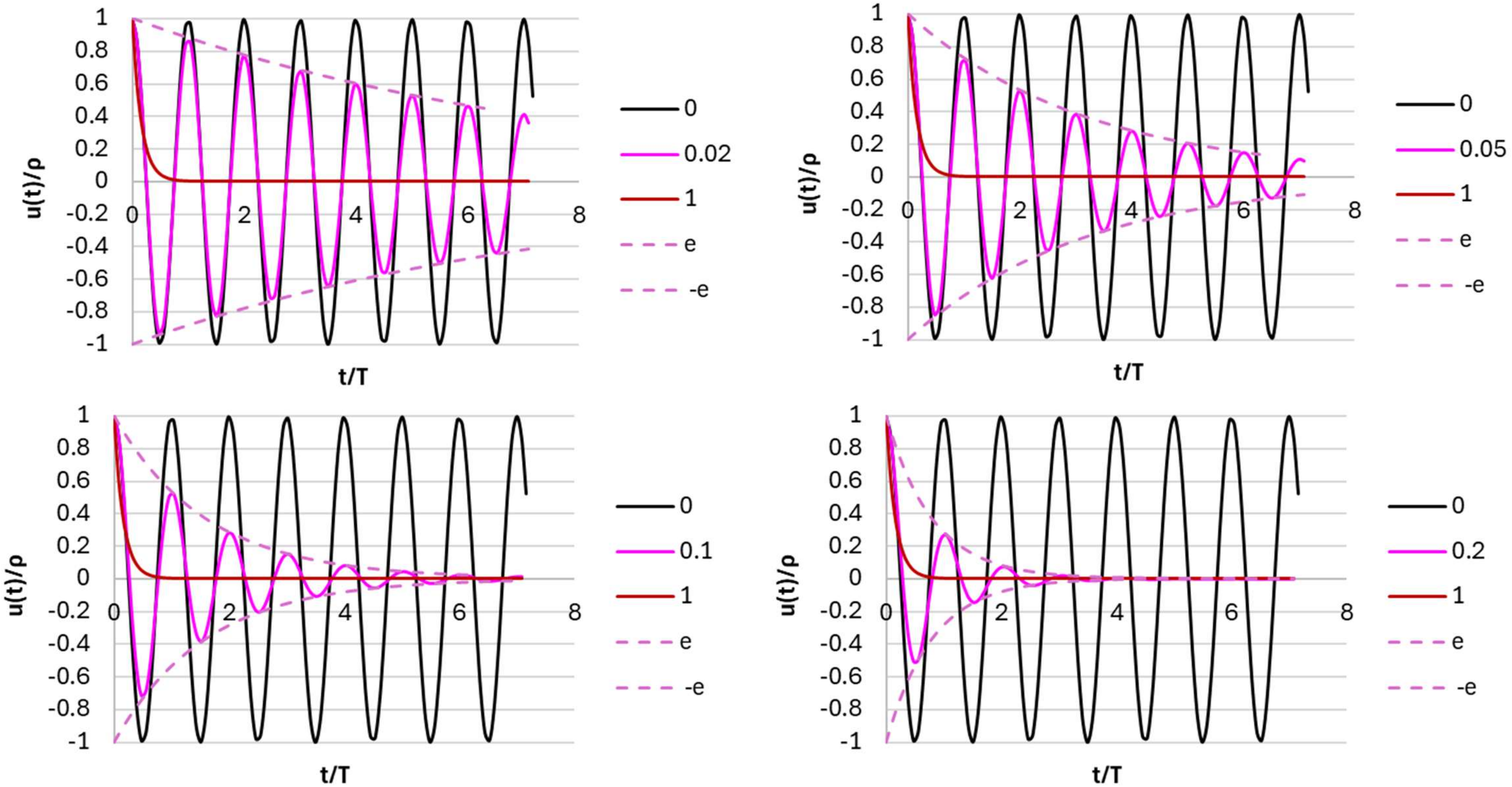
Για ζ>1 ➔ δεν υπάρχει ταλάντωση, μόνο υπεραπόσβεση κίνησης (δεν εξετάζεται)

$$u(t) = \left[A\sinh(\omega\cdot t\sqrt{\zeta^2-1}) + B\cosh(\omega\cdot t\sqrt{\zeta^2-1})\right]\cdot e^{-\zeta\omega t}$$

Απλή αρμονική ταλάντωση ΜΕ απόσβεση

$$\frac{u(t)}{\rho} = \cos(\omega_D \cdot t + \theta) \cdot e^{-\zeta\omega t}$$

Ελεύθερη ταλάντωση για επίπεδα απόσβεσης: ζ = 0, 2, 5, 10, 20%, 100%



Οι διακεκομμένες καμπύλες δηλώνουν την απόσβεση του πλάτους

Απλή αρμονική ταλάντωση ΜΕ απόσβεση

$$u(t) = \rho \cdot \cos(\,\omega_D \cdot t + \theta) \cdot e^{-\zeta\omega t}$$

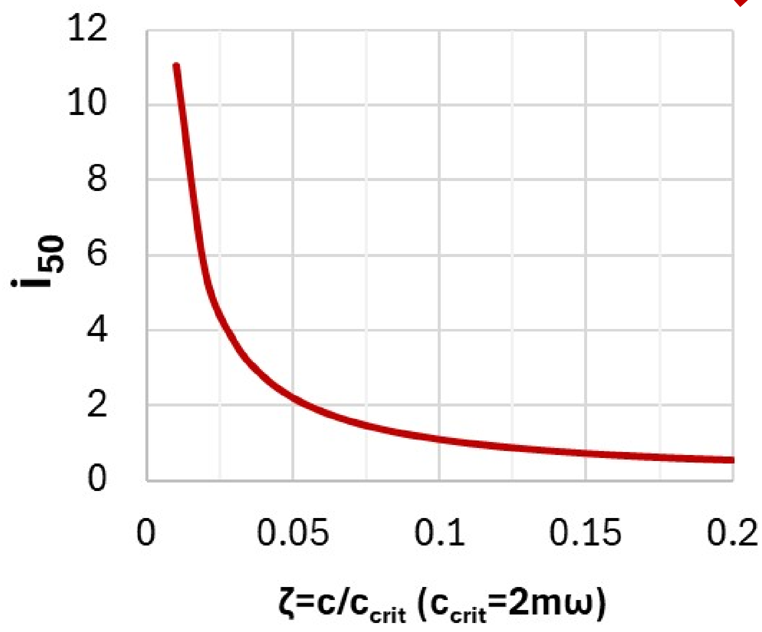
$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D}\right]^2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left[-\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D \cdot u(0)}\right]$$

Στον χρόνο t=0 το πλάτος είναι u(0)= ρ. Σε πόσο χρόνο θα μειωθεί στο μισό;

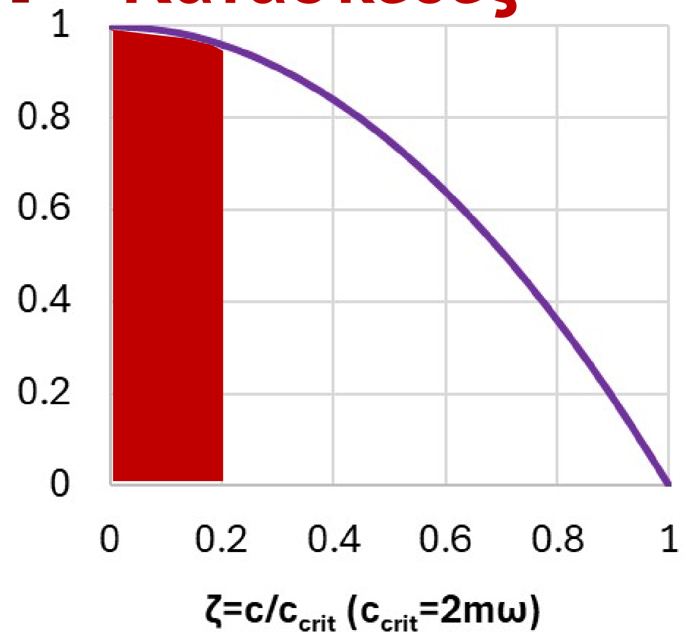
$$0.5\rho = \rho \cdot e^{-\zeta\omega t} \Rightarrow e^{-\zeta\omega t} = 0.5 \Rightarrow -\zeta\omega t = \ln(0.5) \;\Rightarrow t = -\frac{\ln(0.5)}{\zeta\omega}$$

$$\boldsymbol{i_{50} = t/\mathrm{T} = -\frac{ln(0.5)}{2\pi\zeta}}$$ **: αριθμό περιόδων για μείωση του πλάτους στο μισό**

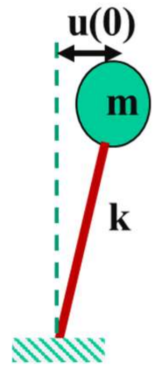
Όσο πιο μικρή η απόσβεση, τόσο περισσότεροι κύκλοι χρειάζονται για μείωση του πλάτους στο μισό



Κατασκευές



Παράδειγμα σε κατασκευή: Ένα μονώροφο κτήριο προσομοιώνεται ως μία άκαμπτη δοκός στηριζόμενη σε αβαρή υποστηλώματα. Για τον προσδιορισμό των δυναμικών χαρακτηριστικών της κατασκευής, λαμβάνει χώρα δοκιμή ελεύθερης ταλάντωσης: επί της δοκού επιβάλλεται δύναμη γρύλου F=89kN προκαλώντας πλευρική μετατόπιση της δοκού κατά u(0)=0,508cm=0.00508m, και ακολούθως η δύναμη σταματά απότομα. Η κατασκευή εκτέλεσε ελεύθερη ταλάντωση και καταγράφηκε ότι η μετατόπιση μετά τον 1^{o} κύκλο ήταν 0.406 cm με περίοδο αυτού του κύκλου T = 1.40 sec.
Ποια είναι τα δυναμικά χαρακτηριστικά της κατασκευής που μπορούν να υπολογισθούν;



Δύναμη ελατηρίου: $F = k\ x\ u \Rightarrow$ k=89/0.00508 $\Rightarrow$ **k =17520 kN/m**

Περίοδος: $\mathbf{T = 1.40\ (s)} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{W}{gk}}$ (ω=2π/T=4.49 rad/s)

$$\Rightarrow \boldsymbol{W} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g \times k = \left(\frac{1.4}{2\pi}\right)^2 9.81 \times 17520 = 8533kN\ (\boldsymbol{m = 869,83\ tons})$$

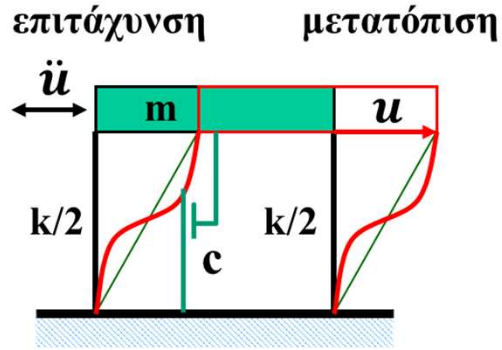
$$u(t) = \rho \cdot \cos(\omega_D \cdot t + \theta) \cdot e^{-\zeta\omega} \quad \rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D}\right]^2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left[-\frac{\dot{u}(0) + u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D \cdot u(0)}\right]$$

Για t=0 η μετατόπιση = πλάτος της ταλάντωσης είναι ρ=u(0)=0.508 =ρ & $\theta = 0$
Μετά από έναν κύκλο το πλάτος της ταλάντωσης είναι u(T)=0.406=ρ · $\boldsymbol{e^{-\zeta\omega T}}$

$$0.406 = 0.508 \cdot \boldsymbol{e^{-\zeta 2\pi}} \Rightarrow \boldsymbol{\zeta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}} \times \boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{0.508}}{\mathbf{0.406}}\right) = \mathbf{3.5\%}$$

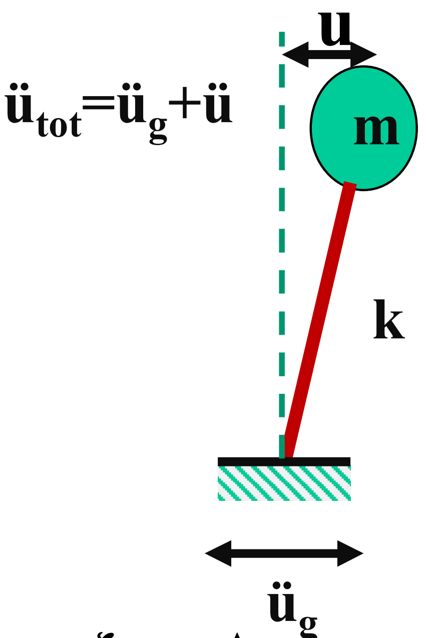
$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}} \Rightarrow \boldsymbol{c} = \zeta \times c_{crit} = 0.035 \times 2m\omega = \mathbf{273388\ kg/s}$$

$$\boldsymbol{\omega_D} = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = 0.999\omega \cong \omega = \mathbf{4.49/sec}$$



Το πλάτος μετά από 6 περιόδους είναι: u(6T=)=0,508 · $\boldsymbol{e^{-\zeta(6\times 2\pi)}} = \mathbf{0,13\ cm}$

Απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή υπό αρμονική διέγερση $\ddot{u}_g$



Ισορροπία: $m \cdot \ddot{u}_{tot} + k \cdot u = 0$

$\ddot{u}_{tot}=\ddot{u}_g+\ddot{u}$: $m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = - m \cdot \ddot{u}_g$

$k/m=\omega^2$

$$\ddot{u} + \omega^2 \cdot u = - \ddot{u}_g \qquad \boxed{\omega^2 \cdot u = - \ddot{u}_{total}}$$

Από την ισορροπία προκύπτει ότι η σχετική μετάθεση των άκρων του ΜΤ σχετίζεται με την συνολική επιτάχυνση

<u>Έστω</u> εξωτ. Αρμονική Διέγερση (π.χ. σεισμός) $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{go} \cdot \underline{sin(\bar{\omega} \cdot t)}$

- $m \cdot \ddot{u}_g = P_{eff}$ ← **ο σεισμός λαμβάνεται ως δύναμη P_{eff} που δρα στο ΜΤ = μάζα του x επιτάχυνση του εδάφους**

(εναλλακτικά το $\ddot{u}_g$ μπορεί να είναι μια χρονοϊστορία (προηγούμενο μάθημα)

ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

ΛΥΣΗ: αν ισχύει ότι ξεκινά από ηρεμία (ταχύτητα και μετατόπιση = 0)

$$u(t) = \underline{\frac{\ddot{u}_{go}}{\omega^2} \cdot \left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]} \cdot [sin\bar{\omega}t - \beta \cdot sin\omega t), \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \leq 1$$

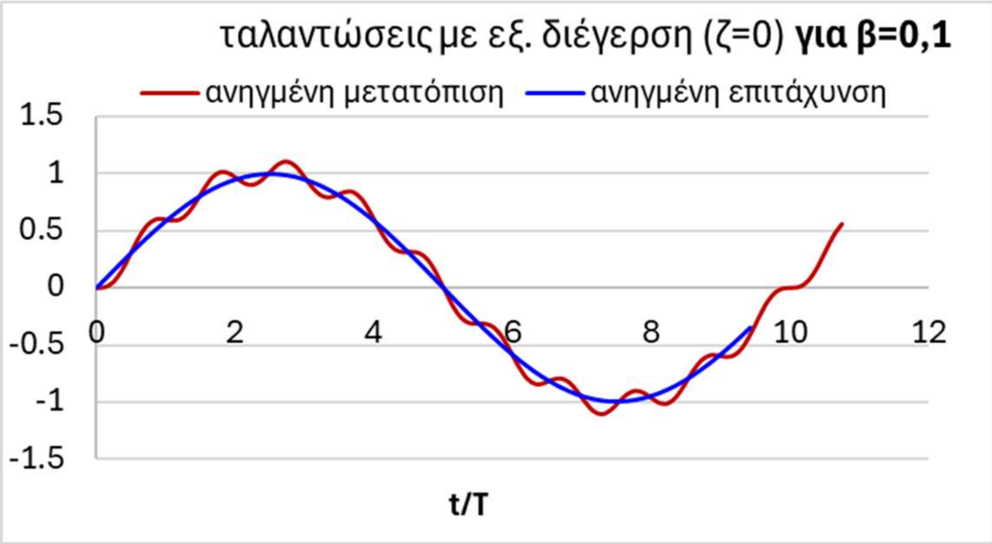
Συντελεστής μεγέθυνσης πλάτους

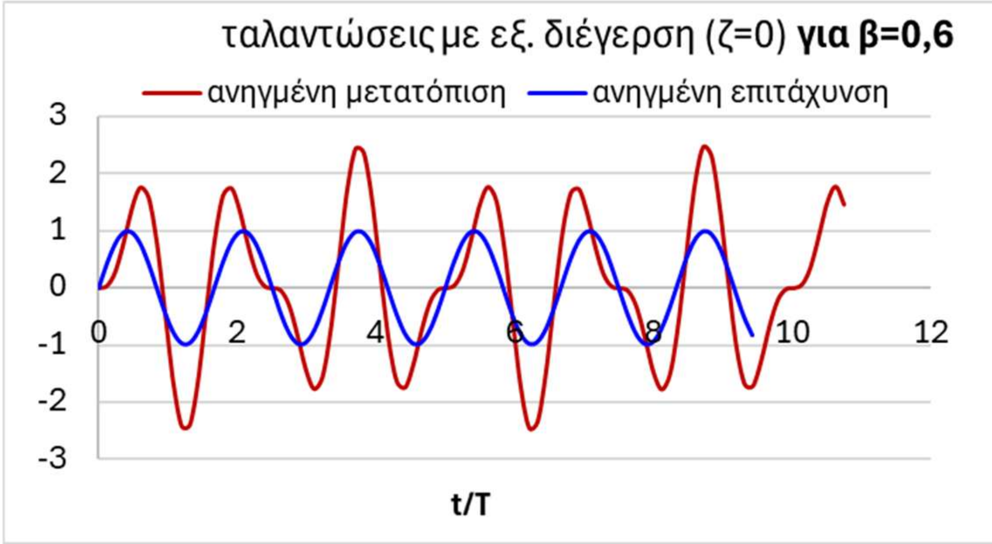
Αδιάστατοι όροι στον y άξονα: σύγκριση σχημάτων ταλάντωσης του συστήματος και της εξωτερικής διέγερσης

Αδιάστατοι όροι:

$$\boxed{\ddot{u}_g(t)/\ddot{u}_{go} \quad u(t)/(\frac{\ddot{u}_{go}}{\omega^2})}$$

Απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή υπό αρμονική διέγερση $\ddot{u}_g$

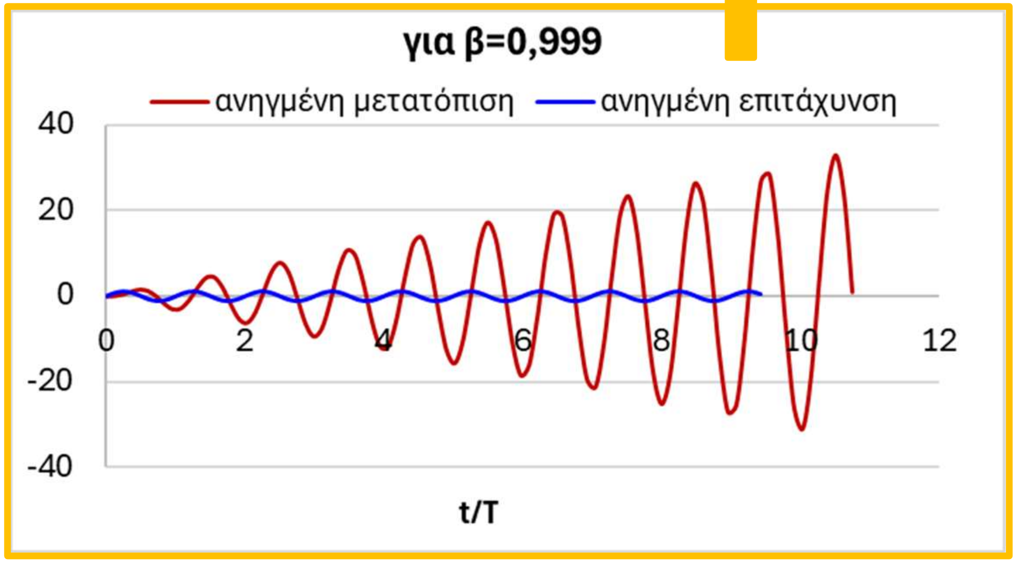




Αδιάστατοι όροι στον y άξονα

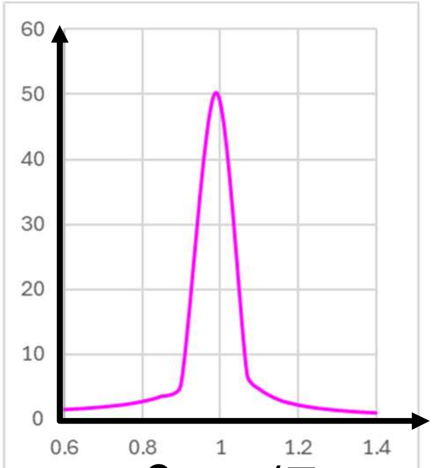
$\ddot{u}_g(t)/\ddot{u}_{go}$ $\quad$ $u(t)/(\frac{\ddot{u}_{go}}{\omega^2})$

Όταν το β= $\omega/\bar{\omega}$ → 1 τότε: ***Συντονισμός***
ω, η φυσική γωνιακή συχνότητα (ιδιοσυχνότητα)
$\bar{\omega}$, η συχνότητα της εξωτερικά ασκούμενης διέγερσης



➔ Η μετατόπιση αποκτά την μεγαλύτερη τιμή (ομοίως οι $\dot{u}$, $\ddot{u}$)

$$\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]$$



β= $\omega/\bar{\omega}$

SDPF resonance vibration test
https://www.youtube.com/watch?v=LV_UuzEznHs&ab_channel=mstkwon

Απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή υπό αρμονική διέγερση $\ddot{u}_g$

$f_3 < f_2 < f_1$ ή $T_3 > T_2 > T_1$

k=3EI/H^3

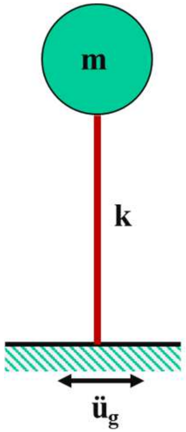
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{H^3 m}}$$

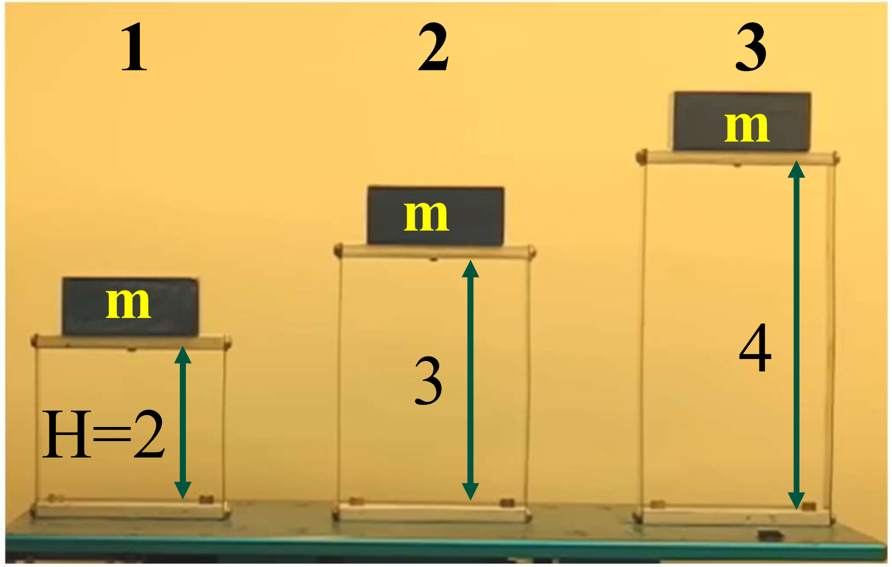
$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{(2)^3 m}} \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{(3)^3 m}} \qquad f_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{(4)^3 m}}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = 1.8371 \Rightarrow f_1{=}1.8371\, f_2$$

$$\frac{f_2}{f_3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} = 1.5396 \Rightarrow f_2{=}1.5396\, f_3$$

Αν f_3=4Hz : f_2=6.15Hz ➔ f_1=11.3Hz





Δεν γνωρίζω την μάζα, όμως μπορώ να εκτιμήσω μέσω της φωτο την συσχέτιση των υψών…

Ελέγξτε τις τιμές ως προς τις πειραματικές!

Όταν το β= $\omega/\bar{\omega} \rightarrow$ 1 τότε $\omega \cong \bar{\omega}$

Συντονισμός ➔ Η μετατόπιση αποκτά την μεγαλύτερη τιμή

ΠΕΙΡΑΜΑ: SDPF resonance vibration test

https://www.youtube.com/watch?v=LV_UuzEznHs&ab_channel=mstkwon

Απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή ΜΕ απόσβεση υπό αρμονική διέγερση $\ddot{u}_g$

$$m\cdot\ddot{u}+c\cdot\dot{u}+k\cdot u=-m\cdot\ddot{u}_g$$

Έστω: $\ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_{go}\cdot\sin(\bar{\omega}\cdot t)$

$$c=2\zeta\cdot m\cdot\omega\;\;;\;\;\omega^2=\frac{k}{m}\;\;;\;\omega_D=\omega\sqrt{1-\zeta^2}\;\;;\;\beta=\frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\boldsymbol{u(t)}=\boldsymbol{\rho\cdot\cos(\omega_D\cdot t+\theta)\cdot e^{-\zeta\omega t}}+\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{go}}}{\boldsymbol{\omega^2}}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{\sin(\bar{\omega}t+\bar{\theta})}$$

$$\rho=\sqrt{[u(0)]^2+\left[\frac{\dot{u}(0)+u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D}\right]^2}\qquad\theta=\arctan\left[-\frac{\dot{u}(0)+u(0)\cdot\zeta\cdot\omega}{\omega_D\cdot u(0)}\right]\qquad\bar{\boldsymbol{\theta}}=\arctan\left[-\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}\right]$$

Όρος που αφορά ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

Όρος που αφορά την επιβαλλόμενη ταλάντωση κυκλ. συχνότητας $\bar{\omega}$