# ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



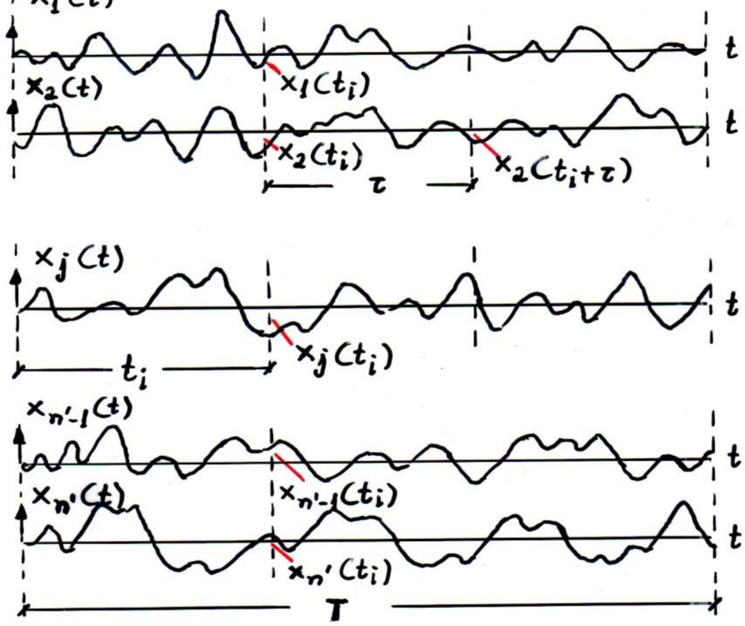
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Ανάλυση χρονοσειρών: Στατιστική τυχαίων συναρτήσεων του χρόνου.

- Εφαρμογή σε θέματα Πολιτικού Μηχανικού:

  Μεταβλητότητα ως προς το χρόνο διαφόρων φορτίσεων.

  - Δυναμικές καταπονήσεις διαφόρων κατασκευών λόγω του ανέμου ή λόγω του τυρβώδους του νερού.
  - Επιβάρυνση της ποιότητας του νερού ενός ποταμού λόγω εισροής λυμάτων.




- $x_j(t)$ : χρονική συνάρτηση (συνεχής ή διακριτή)
  $j$ αποτέλεσμα ενός πειράματος

- Χρονοσειρά έκτασης $m$ : Δείγμα από $m$ χρονικές συναρτήσεις
  $x_j(t)$, όπου $j = 1, 2, \ldots m$

- Πληθυσμός $n'$ πιθανών χρονικών συναρτήσεων (μπορεί $n' \to \infty$)

Στατιστικές παράμετροι των $m$ χρονικών συναρτήσεων μιας χρονοσειράς για τη χρονική στιγμή $t_i$

Μέση τιμή: $$m_{x_i} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j(t_i)$$

Διασπορά: $$s_{x_i}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} [x_j(t_i) - m_{x_i}]^2$$

Αυτοσυσχέτιση: $$R_{x_i x_i}(\tau) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} x_j(t_i)\, x_j(t_i+\tau)$$

Αυτοσυσκεδασμός ή αυτοσυνδιασπορά:

$$Co_{x_i x_i}(\tau) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} [x_j(t_i) - m_{x_i}][x_j(t_i+\tau) - m_{x_{i+\tau}}]$$

Στάσιμη στοχαστική διαδικασία:

Οι ανωτέρω στατιστικές παράμετροι είναι ανεξάρτητες του χρόνου $t_i$.

Οι στατιστικές παράμετροι προκύπτουν με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο.

## Στατιστικές παράμετροι πληθυσμού για στάσιμη διαδικασία

Μέση τιμή: $\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt$ (ροπή πρώτης τάξης)

Διασπορά: $\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t)-\mu_x]^2\,dt$ (κεντροβαρής ροπή δεύτερης τάξης)

Αυτοσυσχέτιση: $R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$

Αυτοσυνδιασπορά: $Co_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t)-\mu_x][x(t+\tau)-\mu_x]\,dt$

2T: ολική διάρκεια της στοχαστικής διαδικασίας

## Προβλήματα στα οποία εφαρμόζεται η ανάλυση χρονοσειρών

- Το πρόβλημα της πρόβλεψης ("πραγματικού χρόνου")
- Το πρόβλημα Monte Carlo (τεχνητή παραγωγή χρονοσειρών)
- Το πρόβλημα της προσομοίωσης
- Το πρόβλημα της ανάλυσης της διασποράς (φάσμα: γραφική παράσταση της κατανομής της διασποράς σε μια ορισμένη περιοχή συχνοτήτων)

# ΔΟΜΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

$$\boxed{x(t) = x_t(t) + x_p(t) + x_r(t)}$$

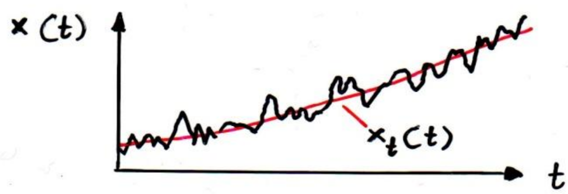
$x_t(t)$ : τάση (trend)

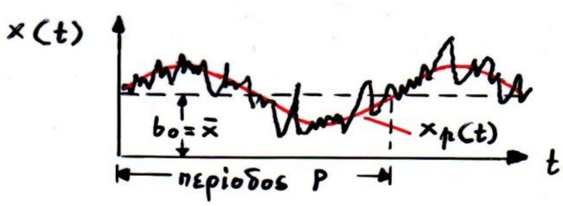
$x_p(t)$ : περιοδική συνιστώσα

$x_r(t)$ : τυχαία συνιστώσα

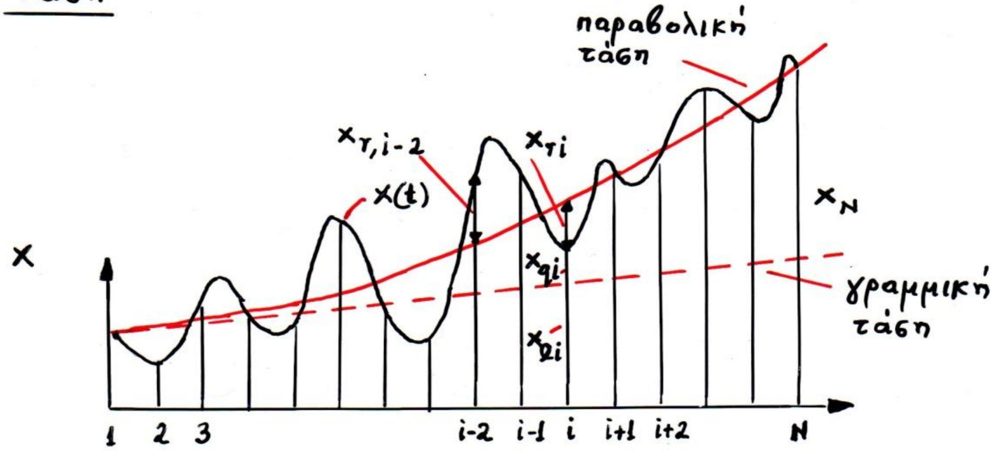
$\left.\begin{array}{l}\text{τάση}\\ \text{περιοδική συνιστώσα}\end{array}\right\}$ ντετερμινιστικό τμήμα, μη στάσιμο

τυχαία συνιστώσα $\Rightarrow$ στοχαστικό τμήμα, στάσιμο



## Τάση




$$x_t(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

<u>Υπολογισμός της τάσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων</u>

$$S = \int_0^T [x(t) - x_t(t)]^2 dt = \min$$

Γραμμική τάση: $x_t(t) = a_0 + a_1 t$

$$S = \int_0^T [x(t) - a_0 - a_1 t]^2 dt = \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial a_0}(x-a_0-a_1t)^2 dt = -2\int_0^T (x-a_0-a_1t)dt = 0$$

$$\int_0^T (x-a_0-a_1t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^T x dt - a_0T - \frac{a_1}{2}T^2 = 0$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x dt$$

$$\bar{x}T - a_0T - \frac{a_1}{2}T^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = \bar{x} - a_1\frac{T}{2}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial a_1}(x-a_0-a_1t)^2 dt = -2\int (x-a_0-a_1t)t dt = 0$$

$$\int_0^T (x-a_0-a_1t)t\, dt = 0 \Rightarrow \int_0^T xt dt - \frac{a_0}{2}T^2 - \frac{a_1}{3}T^3 = 0$$

$$\int_0^T xt dt - \frac{1}{2}\bar{x}T^2 = \frac{a_1}{12}T^3 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{12}{T^3}\int_0^T xt dt - \frac{6}{T}\bar{x}}$$

- $x(t)$ σε διακριτοποιημένη μορφή

$t = i\Delta t \qquad T = n\Delta t \qquad a_0 = \bar{x} - a_1\frac{n}{2}\Delta t$

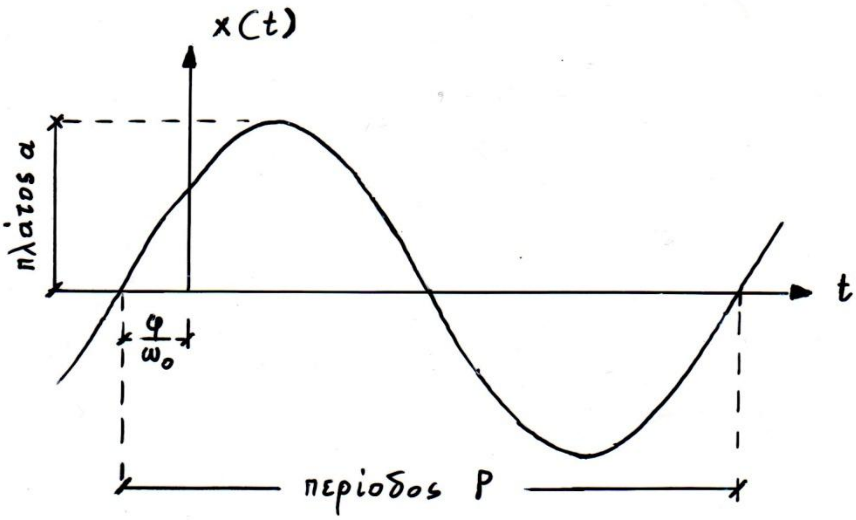
$$a_1 = \frac{1}{\Delta t}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(i-\frac{n}{2})}{\sum_{i=1}^{n}(i-\frac{n}{2})^2}$$

## Περιοδικότητα

$x_p(t)$ : περιοδική συνάρτηση βασικής περιόδου $P$

$$\boxed{x_p(t) = x_p(t+iP)} \qquad i = 1, 2, \dots n$$

### Ημιτονοειδής συνάρτηση




$$x_p(t) = a\sin(\omega_o t + \varphi)$$

$a$ : πλάτος της συνάρτησης
$\omega_o$ : κυκλική συχνότητα
$\varphi$ : γωνία φάσεως

$$\omega_o = 2\pi f_o \qquad f_o = \frac{1}{P}$$

$f_o$ : συχνότητα [Hz] ή [1/s]

$$x_p(t) = a\sin\omega_0 t\cos\varphi + a\sin\varphi\cos\omega_0 t$$

$a' = a\cos\varphi \qquad b' = a\sin\varphi$

$$x_p(t) = a'\sin\omega_0 t + b'\cos\omega_0 t$$

$$a'^2 + b'^2 = a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

$$\mathrm{ctg}\varphi = \frac{a'}{b'}$$

$a, \varphi$ : πολικές συντεταγμένες

$a = f(1/P)$ : φάσμα πλατών

$\varphi = f(1/P)$ : φάσμα φάσεων

$$\left.\begin{array}{l} a' = f(1/P) \\ b' = f(1/P) \end{array}\right\} \text{φάσματα συντελεστών}$$

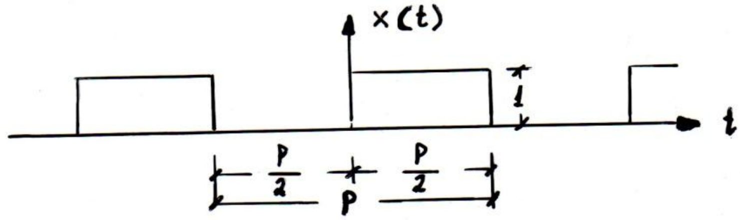
Σειρά Fourier

$$\boxed{x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_0 t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\omega_0 t}$$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{P}$ $\Rightarrow$ βασική (κυκλική) συχνότητα

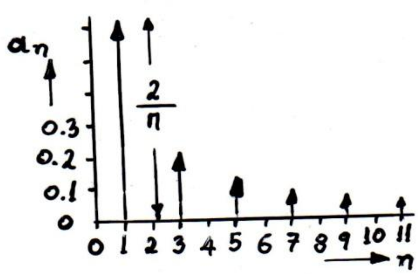
$n$ : "αρμονική" των συνιστωσών της σειράς Fourier

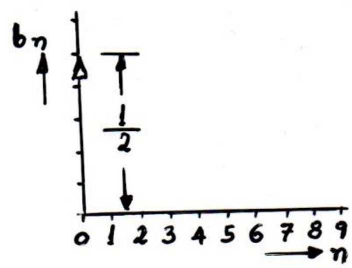
## Περιοδική αλυσίδα ισομήκων ορθογωνικών "παλμών"




$$a_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x_p(t)\sin n\omega_o t\,dt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_o = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x_p(t)\,dt \qquad\qquad b_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x_p(t)\cos n\omega_o t\,dt$$




Φάσματα γραμμών

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \quad n = 1, 3, 5 \ldots \qquad\qquad b_n = 0.5 \quad n = 0$$

$$a_n = 0 \quad n = 2, 4, 6 \ldots \qquad\qquad b_n = 0 \quad n = 1, 2 \ldots$$

## Σειρά Fourier σε πολικές συντεταγμένες $(c_n, \varphi_n)$

$a_n = c_n \cos\varphi_n \qquad b_n = c_n \sin\varphi_n \quad \Rightarrow$

$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \qquad \operatorname{ctg}\varphi_n = \dfrac{a_n}{b_n}$

$\sin(n\omega_0 t)\cos\varphi_n + \cos(n\omega_0 t)\sin\varphi_n = \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$

$$\boxed{x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)}$$

$c_n(n)$ : φάσμα πλατών

$\varphi_n(n)$ : φάσμα φάσεων

## Περιοδική συνάρτηση $x_p(t)$ σε μιγαδική μορφή $(i = \sqrt{-1})$

$$\boxed{x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}}$$

$$c_n = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x_p(t) e^{-in\omega_0 t}\,dt$$

$$c_n = \frac{1}{2}(b_n - i a_n)$$

## Προσδιορισμός περιοδικότητας

- Γνωστή περίοδος
- 1η μέθοδος : Προσδιορισμός συντελεστών Fourier
- 2η μέθοδος: Εύρεση μέσων τιμών

## Εύρεση συντελεστών Fourier

$$a_n = \frac{2}{mP} \int_{-mP/2}^{mP/2} x(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{mP} \int_{-mP/2}^{mP/2} x(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

m : μέγιστος ακέραιος αριθμός για τον οποίο $mP < T$

$$x(t) = x_p(t) + x_r(t)$$

## Σχηματισμός μέσων όρων

$$m_{xi} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} x(t_i + jP)$$

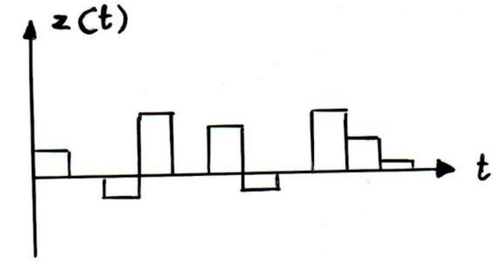
$$x(t_i + jP) = x_p(t_i) + x_r(t_i + jP)$$

$$m_{xi} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} x_r(t_i + jP) + \frac{m}{m} x_p(t_i)$$

$$m_{xi} \simeq x_p(t_i)$$

Τυχαία συνιστώσα: $x_r(t)$

- $x_r(t)$ : συνεχής, στάσιμη
- Πιθανολογική συνάρτηση $z(t)$ : μη συνεχής ακολουθία τυχαίων αριθμών
- Στοχαστική συνάρτηση $x_r(t)$




- Διαδοχικές τιμές $z_i$ και $z_{i+j}$ : στατιστικά ανεξάρτητες
- Κατανομή πιθανοτήτων για την περιγραφή της συνάρτησης $z(t)$
- Διαδοχικές τιμές $x_r(t_i)$ και $x_r(t_i+\tau)$ : εξαρτώνται μεταξύ τους για μια περιοχή $0 \leq \tau \leq \tau_{max}$
- Αυτοσυσχέτιση (autocorrelation) για την περιγραφή της συνάρτησης $x_r(t)$
- $x_r(t)$ : δυνατή η χρονική πρόβλεψη
- $z(t)$ : μη δυνατή η χρονική πρόβλεψη

Σύνδεση των στοχαστικών συναρτήσεων $x_r(t)$ και $y_r(t)$

$x_r(t) \Leftrightarrow x_r(t \pm \tau)$ ή $x_{ri} \Leftrightarrow x_{r,i\pm k}$

$y_r(t) \Leftrightarrow y_r(t \pm \tau)$ ή $y_{ri} \Leftrightarrow y_{r,i\pm k}$

$x_r(t) \Leftrightarrow y_r(t \pm \tau)$ ή $x_{ri} \Leftrightarrow y_{r,i\pm k}$ (cross correlation)

# Παράδειγμα εφαρμογής

- Μέτρηση παροχής νερού σ' έναν υδρομετρικό σταθμό τρεις φορές ανά μήνα επί τρία έτη.
- 36 τιμές παροχής ανά έτος

Να προσδιοριστούν οι συνιστώσες της χρονοσειράς

$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) + x_r(t)$$

Πίνακας 2.1: Τιμές της παροχής νερού σε $m^3/s$

| i | $x_i$ | i | $x_i$ | i | $x_i$ | i | $x_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 22 | 27 | 38 | 54 | 74 | 81 | 111 |
| 1 | 30 | 28 | 30 | 55 | 76 | 82 | 110 |
| 2 | 22 | 29 | 36 | 56 | 71 | 83 | 106 |
| 3 | 20 | 30 | 41 | 57 | 78 | 84 | 108 |
| 4 | 33 | 31 | 49 | 58 | 65 | 85 | 112 |
| 5 | 40 | 32 | 48 | 59 | 66 | 86 | 120 |
| 6 | 33 | 33 | 41 | 60 | 71 | 87 | 119 |
| 7 | 31 | 34 | 49 | 61 | 81 | 88 | 111 |
| 8 | 29 | 35 | 60 | 62 | 76 | 89 | 111 |
| 9 | 41 | 36 | 61 | 63 | 64 | 90 | 102 |
| 10 | 45 | 37 | 59 | 64 | 66 | 91 | 115 |
| 11 | 43 | 38 | 56 | 65 | 72 | 92 | 115 |
| 12 | 50 | 39 | 64 | 66 | 74 | 93 | 100 |
| 13 | 40 | 40 | 71 | 67 | 88 | 94 | 113 |
| 14 | 37 | 41 | 78 | 68 | 80 | 95 | 114 |
| 15 | 36 | 42 | 68 | 69 | 89 | 96 | 112 |
| 16 | 35 | 43 | 66 | 70 | 94 | 97 | 109 |
| 17 | 34 | 44 | 65 | 71 | 80 | 98 | 102 |
| 18 | 33 | 45 | 77 | 72 | 95 | 99 | 109 |
| 19 | 32 | 46 | 80 | 73 | 97 | 100 | 114 |
| 20 | 33 | 47 | 82 | 74 | 99 | 101 | 112 |
| 21 | 33 | 48 | 86 | 75 | 97 | 102 | 106 |
| 22 | 34 | 49 | 77 | 76 | 103 | 103 | 108 |
| 23 | 35 | 50 | 75 | 77 | 103 | 104 | 118 |
| 24 | 43 | 51 | 75 | 78 | 100 | 105 | 128 |
| 25 | 42 | 52 | 74 | 79 | 102 | 106 | 118 |
| | | | | | | 107 | 125 |
| 26 | 40 | 53 | 75 | 80 | 104 | 108 | 125 |

## Λύση

$$x(t) = 20 + t + 10 \sin \frac{2\pi t}{36\,\Delta t} + x_r(t)$$

### Τάση

$$x_t(t) = a_0 + a_1 t \qquad \text{(γραμμική τάση)}$$

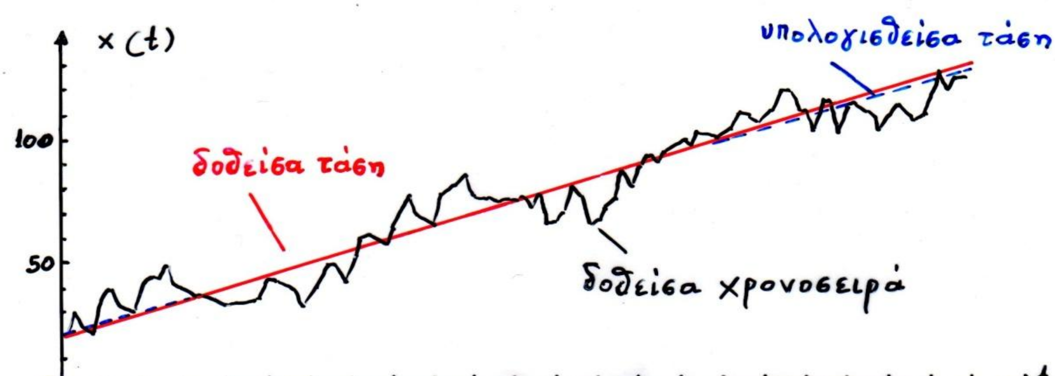
$$a_1 = \frac{12}{T^3} \int_0^T x\, t\, dt - \frac{6}{T}\bar{x} \qquad\qquad a_0 = \bar{x} - a_1 \frac{T}{2}$$

$t = i\,\Delta t \qquad i = 0, 1, 2, \ldots n$

$T = n\,\Delta t \qquad n$: αριθμός διαστημάτων ($\Delta t$) της χρονοσειράς ($n=108$)

$$\bar{x} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x(i\,\Delta t)$$

$$a_1 = \frac{1}{n\,\Delta t}\left[\frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\, x(i\,\Delta t) - 6\bar{x}\right]$$



Περιοδική συνιστώσα

Σειρά Fourier: $x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_o t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\omega_o t$

$$a_n = \frac{2}{mP} \int_{-mP/2}^{mP/2} x(t) \sin(n\omega_o t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{mP} \int_{-mP/2}^{mP/2} x(t) \cos(n\omega_o t)\,dt$$

$P = k\,\Delta t$

$m$: αριθμός περιόδων

$$a_n \simeq \frac{2}{mk} \sum_{i=1}^{mk} x(i\Delta t) \sin\left(2\pi \frac{in}{k}\right)$$

$$b_n \simeq \frac{2}{mk} \sum_{i=1}^{mk} x(i\Delta t) \cos\left(2\pi \frac{in}{k}\right)$$

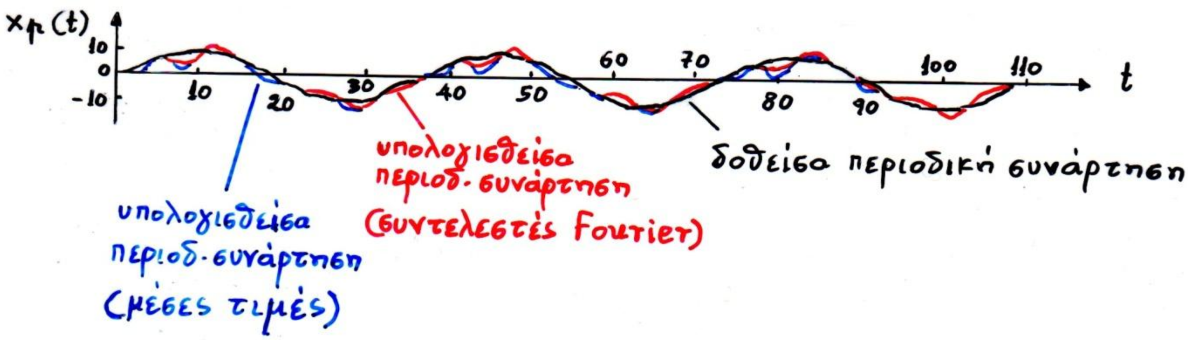
$k = 36 \qquad m = 3$

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 10.69 | -1.14 |
| 2 | -1.48 | -0.30 |
| 3 | -0.24 | 1.02 |
| 4 | 1.19 | 0.60 |
| 5 | 0.76 | -0.41 |
| 6 | -0.06 | -0.05 |
| 7 | 0.15 | -0.04 |
| 8 | -0.39 | -0.11 |
| 9 | -0.29 | 0.11 |
| 10 | -0.00 | -0.36 |

## Περιοδική συνιστώσα

Εύρεση μέσων τιμών για τις m περιόδους

$$x_p'(i\Delta t) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} x(i\Delta t + jk\Delta t) \qquad i=0,1,2,\dots k \qquad j=0,1,2,\dots m-1$$




## Τυχαία συνιστώσα

## Τυχαία συνιστώσα

$x_r(t) = x(t) - x_t(t) - x_p(t)$ $\Rightarrow$ $x_t(t), x_p(t)$: δοθείσες

$r_r(t) = x(t) - x_t(t) - x_p(t)$ $\Rightarrow$ $x_t(t), x_p(t)$: υπολογισθείσες

$x_r(t)$ : δοθείσα τυχαία συνιστώσα

$r_r(t)$: "εναπομείνασα" συνάρτηση

$$\sigma_{xr}^2 = \frac{1}{mk-1} \sum_{i=1}^{mk} (x_r(i\Delta t) - r_r(i\Delta t))^2$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{mk-1} \sum_{i=1}^{mk} (x_r(i\Delta t) - m_{xr})^2$$

$\sigma_{xr}^2$ : διασπορά της διαφοράς $x_r(t) - r_r(t)$

$\sigma_r^2$: διασπορά της $x_r(t)$

$m_{xr}$: μέση τιμή της $x_r(t)$

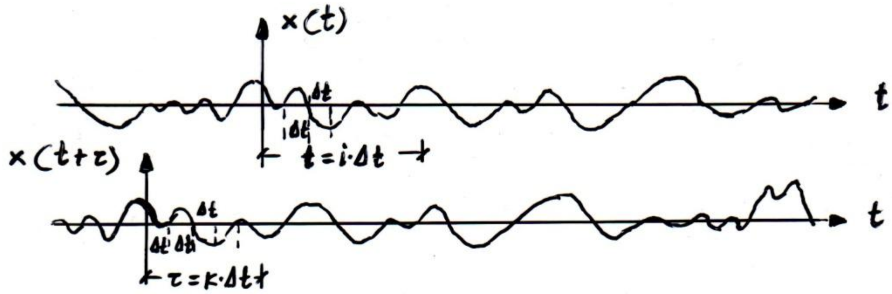
$\frac{\sigma_{xr}^2}{\sigma_r^2} = \frac{7.15}{110.7} = 0.064$ $\Rightarrow$ $x_p(t)$ : μέσω συντελεστών Fourier

$\frac{\sigma_{xr}^2}{\sigma_r^2} = \frac{7.81}{110.7} = 0.070$ $\Rightarrow$ $x_p(t)$: εύρεση μέσων τιμών

# ΣΥΣΧΕΤΙΣΕΙΣ

## Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$




## Συνάρτηση (διασταυρούμενης) συσχέτισης

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

$t = i \cdot \Delta t \qquad \tau = \kappa \cdot \Delta t \qquad T = n \cdot \Delta t$

$$R_{xy}(\kappa) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_{i+\kappa}$$

$x(t), y(t)$: στάσιμες χρονοσειρές

## Ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

**Προϋπόθεση**: μέση τιμή της χρονοσειράς μηδέν

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, για $\tau = 0$, ισούται προς τη διασπορά:

$$\boxed{R_{xx}(0) = \sigma_x^2}$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)^2\, dt \quad \Rightarrow \text{διασπορά για } \mu_x = 0$$

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική:

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)}$$

$$R_{xx}(-\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

$$t' = t - \tau \Rightarrow dt' = dt, \quad t = t' + \tau$$

$$R_{xx}(-\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t'+\tau)\, x(t')\, dt' = R_{xx}(\tau)$$

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης παρουσιάζει μέγιστο για $\tau = 0$

$$\boxed{\frac{\partial R_{xx}(0)}{\partial \tau} = 0 \qquad \frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2} < 0}$$

$$\frac{\partial R_{xx}(\tau)}{\partial \tau} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \frac{\partial x(t+\tau)}{\partial \tau} dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \frac{\partial x(t+\tau)}{\partial (t+\tau)} \frac{\partial (t+\tau)}{\partial \tau} dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x'(t+\tau) dt \qquad x'(t+\tau) = \frac{\partial x(t+\tau)}{\partial (t+\tau)}$$

$$\frac{\partial R_{xx}(-\tau)}{\partial \tau} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \frac{\partial x(t-\tau)}{\partial \tau} dt = -\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x'(t-\tau) dt$$

Για $\tau = 0 \Rightarrow \quad \dfrac{\partial R_{xx}(\tau)}{\partial \tau} = \dfrac{\partial R_{xx}(-\tau)}{\partial \tau}$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x'(t) dt = -\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x'(t) dt$$

$$A = -A \quad \Rightarrow |A| = 0$$

$$\frac{\partial R_{xx}(0)}{\partial \tau} = 0$$

$$t+\tau=t' \Rightarrow \frac{\partial R_{xx}(\tau)}{\partial \tau}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t'-\tau)x'(t')dt'$$

$$\frac{\partial^2 R_{xx}(\tau)}{\partial \tau^2}=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x'(t'-\tau)x'(t')dt'$$

$$t-\tau=t' \Rightarrow \frac{\partial R_{xx}(-\tau)}{\partial \tau}=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t'+\tau)x'(t')dt'$$

$$\frac{\partial^2 R_{xx}(-\tau)}{\partial \tau^2}=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x'(t'+\tau)x'(t')dt'$$

Για $\tau=0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2}=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x'(t')]^2dt'=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x'(t')]^2dt'=-\sigma_{x'}^2<0$$

- Για $\tau>\tau_{max} \Rightarrow R_{xx}(\tau)=0$

  Για $\tau>\tau_{max}$, οι τιμές $x(t)$ και $x(t+\tau)$ δεν είναι πλέον συσχετισμένες

- Εάν $x(t) = x_p(t) + x_r(t)$, τότε

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = R_{x_p x_p}(\tau) + R_{x_r x_r}(\tau)}$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x_p(t) + x_r(t)][x_p(t+\tau) + x_r(t+\tau)]\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{[x_p(t)x_p(t+\tau)] + [x_r(t)x_r(t+\tau)]\}\,dt +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{[x_r(t)x_p(t+\tau)] + [x_r(t+\tau)x_p(t)]\}\,dt$$

- Η αυτοσυσχέτιση μιας περιοδικής συνάρτησης $x_p(t)$ με περίοδο $P$ είναι ομοίως περιοδική συνάρτηση με περίοδο $P$.

$$x_p(t) = x_p(t + iP) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x_p(t+\tau) = x_p(t + \tau + iP)$$

$$R_{x_p x_p}(\tau + iP) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_p(t) x_p(t + \tau + iP)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_p(t) x_p(t+\tau)\,dt = R_{x_p x_p}(\tau)$$

## Χρονική μικροκλίμακα της αυτοσυσχέτισης

Σειρά Taylor (κοντά στην αρχή $\tau=0$):

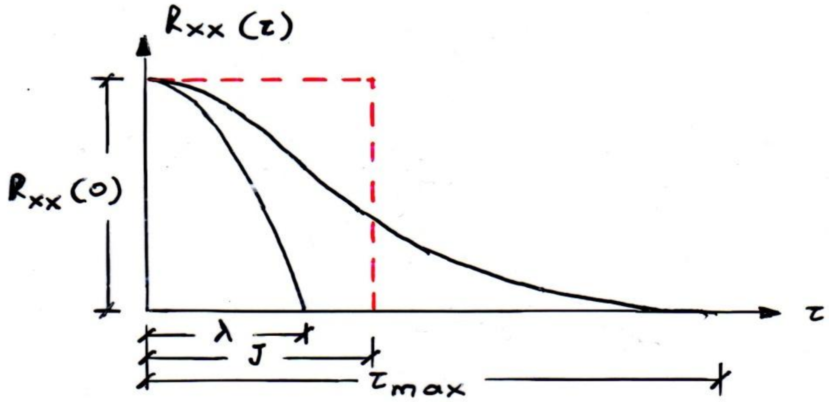
$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial R_{xx}(0)}{\partial \tau}\tau + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2}\tau^2 + \cdots\cdots$$

$R_{xx}(\tau)$ : συμμετρική συνάρτηση

Μη συμμετρικοί όροι : μηδενικοί (όροι με $\tau^1, \tau^3, \tau^5$ κ.λπ.)

$$\frac{\partial R_{xx}(0)}{\partial \tau} = 0$$

$$R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2}\right|\tau^2 + \cdots\cdots \qquad \text{(παραβολή)}$$




$$\tau^2 = \lambda^2 = \frac{2\sigma_x^2}{\left|\frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2}\right|}$$

$\lambda$ : χρονική μικροκλίμακα

## Χρονική μακροκλίμακα της αυτοσυσχέτισης

$$J = \frac{\int_0^\infty R_{xx}(\tau)\,d\tau}{\sigma_x^2}$$

J : χρονική μακροκλίμακα

## Διαδικασία Markov

$$x_r(t+\Delta t) = f(x_r(t_0 \leq t)) + z(t+\Delta t)$$

$f(x_r(t_0 \leq t))$ : συσχετισμένο τμήμα

$z(t+\Delta t)$ : καθαρώς τυχαίο τμήμα

$$x_{r,i+1} = f(x_r(j \leq i)) + z_{i+1}$$ (διακριτοποιημένη μορφή)

$$f = a_0 x_{ri} + a_1 x_{r,i-1} + a_2 x_{r,i-2} + a_3 x_{r,i-3} + \cdots$$

## Διαδικασία Markov πρώτης τάξης

$$f = a_0 x_{ri}$$

$$\boxed{x_{r,i+1} = a_0 x_{ri} + z_{i+1}}$$

## Προσδιορισμός του συντελεστή $a_0$

$$x_{\tau,i+1} = a_0 x_{\tau i} + z_{i+1}$$

$$x_{\tau,i+1} x_{\tau i} = a_0 x_{\tau i}^2 + z_{i+1} x_{\tau i}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{\tau,i+1} x_{\tau i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_0 x_{\tau i}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{i+1} x_{\tau i}$$

$$R_{x_\tau x_\tau}(\Delta t) = a_0 \sigma_{x_\tau}^2 + 0 \qquad (\mu_{x_\tau} = 0)$$

$$a_0 = \frac{R_{x_\tau x_\tau}(\Delta t)}{\sigma_{x_\tau}^2} \quad \text{ή} \quad a_0 = \frac{R_{x_\tau x_\tau}(1)}{\sigma_{x_\tau}^2}$$

$\boxed{a_0 = r_{x_\tau x_\tau}(1)}$ ⇒ συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης

Σχέση μεταξύ $R_{x_\tau x_\tau}(\tau)$ και $\sigma^2_{x_\tau}$

$$\frac{\Delta R_{x_\tau x_\tau}(k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{\tau i}x_{\tau,i+k+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{\tau i}x_{\tau,i+k}\right)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_0 x_{\tau i}x_{\tau,i+k} + \sum_{i=1}^{n} x_{\tau i}z_{i+k+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{\tau i}x_{\tau,i+k}\right)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{n\Delta t}(a_0-1)\sum_{i=1}^{n} x_{\tau i}x_{\tau,i+k} = \frac{1}{\Delta t}(a_0-1)R_{x_\tau x_\tau}(k\Delta t)$$

Για $\Delta t \to 0$ $\Rightarrow$ $$\frac{\Delta R_{x_\tau x_\tau}(k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{dR_{x_\tau x_\tau}(\tau)}{d\tau} = \frac{a_0-1}{\Delta t}R_{x_\tau x_\tau}(\tau)$$

$$\frac{dR_{x_\tau x_\tau}(\tau)}{R_{x_\tau x_\tau}(\tau)} = \frac{a_0-1}{\Delta t}d\tau \Rightarrow \ln R_{x_\tau x_\tau}(\tau) = \frac{a_0-1}{\Delta t}\tau + \ln C_1$$

Για $\tau = 0 \Rightarrow \ln \sigma^2_{x_\tau} = \ln C_1 \Rightarrow C_1 = \sigma^2_{x_\tau}$

$$\ln R_{x_\tau x_\tau}(\tau) = \frac{a_0-1}{\Delta t}\tau + \ln \sigma^2_{x_\tau} \Rightarrow \ln\frac{R_{x_\tau x_\tau}(\tau)}{\sigma^2_{x_\tau}} = \frac{a_0-1}{\Delta t}\tau$$

$$\frac{R_{x_\tau x_\tau}(\tau)}{\sigma^2_{x_\tau}} = e^{\frac{a_0-1}{\Delta t}\tau} \Rightarrow \boxed{R_{x_\tau x_\tau}(\tau) = \sigma^2_{x_\tau}e^{\frac{a_0-1}{\Delta t}\tau}}$$

Σχέση μεταξύ $\sigma_z^2$ και $\sigma_{x_T}^2$

$$\sigma_{x_T}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{T,i+1}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{T,i+1}\, x_{T,i+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{T,i+1}(a_0 x_{Ti} + z_{i+1}) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{T,i+1}\, a_0\, x_{Ti} + x_{T,i+1}\, z_{i+1}) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a_0 x_{Ti}\, x_{T,i+1} + z_{i+1}(a_0 x_{Ti} + z_{i+1})] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_0 x_{Ti}\, x_{T,i+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_0 x_{Ti}\, z_{i+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{i+1} z_{i+1} =$$

$$= a_0 R_{x_T x_T}(\Delta t) + 0 + \sigma_z^2$$

$$R_{x_T x_T}(\Delta t) = a_0 \sigma_{x_T}^2$$

$$\sigma_{x_T}^2 = a_0^2 \sigma_{x_T}^2 + \sigma_z^2$$

$$\boxed{\sigma_z^2 = (1 - a_0^2)\,\sigma_{x_T}^2}$$

# ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Χρονική συνάρτηση ⇒ στην περιοχή της συχνότητας
- Ανάλυση Fourier ⇒ και σε μη περιοδικές συναρτήσεις
- Στη θέση της σειράς Fourier ⇒ Ζεύγος "μετασχηματισμένων" Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$A(\omega)$: "μετασχηματισμένη" Fourier της συνάρτησης $x(t)$

$x(t)$ ⇒ στην περιοχή του χρόνου

$A(\omega)$ ⇒ στην περιοχή της συχνότητας

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} x_p(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-P/2}^{P/2} x_p(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t} \frac{1}{P}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$$

Για $P \to \infty \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{d\omega}{2\pi}$

$n\omega_0 \to \omega$

άθροισμα $\to$ ολοκλήρωμα

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega}$$

ολοκλήρωμα Fourier

- Το ολοκλήρωμα Fourier προκύπτει από τη σειρά Fourier για $P \to \infty$

## Θεωρήματα για τη μετασχηματισμένη Fourier

- $\boxed{\text{Εάν } x_1(t) = x'(t) + x''(t), \text{ τότε } A_1(\omega) = A'(\omega) + A''(\omega)}$

$A'(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της $x'(t)$

$A''(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της $x''(t)$

$A_1(\omega)$: μετασχηματισμένη Fourier της $x_1(t)$

- $\boxed{\text{Εάν } x_1(t) = a\,x(t), \text{ τότε } A_1(\omega) = a\,A(\omega)}$

$A(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της $x(t)$

$A_1(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της $x_1(t)$

- Θεώρημα μετασχηματισμού

$$\boxed{\text{Εάν } x_1(t) = x(at), \text{ τότε } A_1(\omega) = \frac{1}{|a|} A\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

Απόδειξη:

$$A_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\frac{\omega}{a}at} \frac{1}{a} d(at) = \frac{1}{a} A\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- <u>Θεώρημα μετατόπισης</u>

$$\boxed{\text{Εάν} \quad x_1(t) = x(t-a), \quad \text{τότε} \quad A_1(\omega) = e^{-i\omega a} A(\omega)}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$A_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-a) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-a) e^{-i\omega(t-a)} e^{-i\omega a} dt$$

$$t - a = t' \quad \Rightarrow \quad A_1(\omega) = e^{-i\omega a} A(\omega)$$

Εάν $A_1(\omega) = A(\omega - \omega_0)$, τότε $x_1(t) = e^{i\omega_0 t} x(t)$

<u>Απόδειξη</u>

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega - \omega_0) e^{i(\omega-\omega_0)t} e^{i\omega_0 t} d(\omega - \omega_0)$$

$$= e^{i\omega_0 t} x(t)$$

- <u>Θεώρημα παραγώγισης</u>

$$\boxed{\text{Εάν} \quad x_1(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}, \quad \text{τότε} \quad A_1(\omega) = (i\omega)^n A(\omega)}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$A_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt = x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega x(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega A(\omega)$$

# Μετασχηματισμένη Fourier μιας αναδίπλωσης

Ολοκλήρωμα αναδίπλωσης (convolution integral):

$$y(t) = \int_0^\infty x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$y(t)$ : πλημμυρογράφημα

$x(t)$ : βροχογράφημα

$h(t)$ : μοναδιαίο υδρογράφημα

$A_y(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $y(t)$

$A_x(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $x(t)$

$H(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $h(t)$

$$\boxed{A_y(\omega) = A_x(\omega) H(\omega)}$$

**Απόδειξη**

$$A_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^\infty x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt$$

$$A_y(\omega) = \int_0^\infty x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i\omega t + i\omega\tau} dt \right] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$t' = t - \tau \Rightarrow dt' = dt$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

$$A_y(\omega) = H(\omega) \int_0^\infty x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = H(\omega) A_x(\omega)$$

## Μετασχηματισμένη Fourier της αυτοσυσχέτισης

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

$A_x(\omega)$: μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $x(t)$

$A_R(\omega)$: μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $R_{xx}(\tau)$

$$\boxed{A_R(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left| A_x(\omega) \right|^2}$$

Απόδειξη

$$A_R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt \right] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$A_R(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{i\omega t} A_x(\omega)$$ θεώρημα μετατόπισης

$$A_R(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} A_x(\omega)\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} A_x(\omega) A_x^*(\omega)$$

$$A_x^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\boxed{A_R(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau}$$

Απόδειξη

$$A_R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$e^{-i\omega\tau} = \cos\omega\tau - i\sin\omega\tau$$

$$A_R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau - i\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)\sin\omega\tau \, d\tau$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

$$A_R(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau$$

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A_R(\omega)\cos\omega\tau \, d\omega}$$

Απόδειξη

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_R(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$e^{i\omega\tau} = \cos\omega\tau + i\sin\omega\tau$$

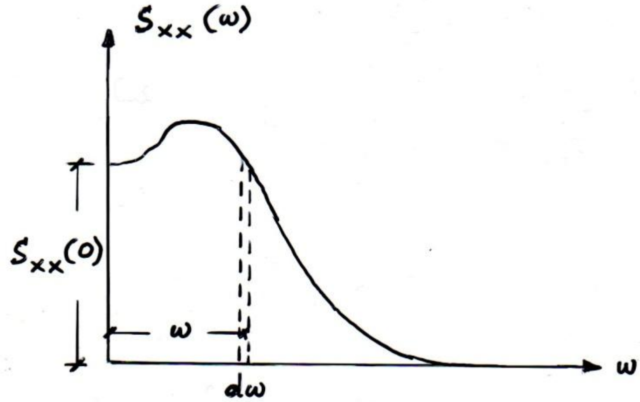
$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_R(\omega)\cos\omega\tau \, d\omega + \frac{1}{2\pi} i\int_{-\infty}^{\infty} A_R(\omega)\sin\omega\tau \, d\omega$$

$A_R(\omega) = A_R(-\omega)$, γιατί $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ και $\cos\omega\tau = \cos(-\omega\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A_R(\omega)\cos\omega\tau \, d\omega$$

Για $\tau = 0 \Rightarrow R_{xx}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A_R(\omega) d\omega = \sigma_x^2$

## Ορισμός φάσματος




$S_{xx}(\omega)$ : φάσμα ενέργειας (ή διασποράς)

$$\boxed{\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_{xx}(\omega)\, d\omega}$$

$$\boxed{S_{xx}(\omega) = \frac{1}{\pi} A_R(\omega)}$$

$S_{xx}(\omega)$ : συνάρτηση κατανομής της διασποράς της στοχαστικής διαδικασίας $x(t)$

## Εξισώσεις Wiener - Khintchin

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_{xx}(\tau) \cos\omega\tau \, d\tau \qquad (1)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^\infty S_{xx}(\omega) \cos\omega\tau \, d\omega \qquad (2)$$

Απόδειξη της σχέσης $\frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2} = -\sigma_{x'}^2 = -\int_0^{\infty} \omega^2 S_{xx}(\omega)\, d\omega$

$$\frac{\partial R_{xx}(\tau)}{\partial \tau} = -\int_0^{\infty} S_{xx}(\omega)\, \omega \sin\omega\tau \, d\omega$$ (από τη 2η εξίσ. Wiener-Khintchin)

$$\frac{\partial^2 R_{xx}(\tau)}{\partial \tau^2} = -\int_0^{\infty} S_{xx}(\omega)\, \omega^2 \cos\omega\tau \, d\omega$$

Για $\tau = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2} = -\int_0^{\infty} \omega^2 S_{xx}(\omega)\, d\omega = -\sigma_{x'}^2$

Χρονική μακροκλίμακα στην περιοχή της συχνότητας

Χρονική μακροκλίμακα στην περιοχή του χρόνου:

$$J = \frac{\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\, d\tau}{\sigma_x^2}$$

Από την 1η εξίσ. Wiener-Khintchin:

$$\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos\omega\tau \, d\tau = \frac{\pi}{2} S_{xx}(\omega)$$

Για $\omega = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\, d\tau = \frac{\pi}{2} S_{xx}(0)$

$$\boxed{J = \frac{\pi}{2} \frac{S_{xx}(0)}{\sigma_x^2}}$$

# Χρονική μικροκλίμακα στην περιοχή της συχνότητας

Χρονική μικροκλίμακα στην περιοχή του χρόνου:

$$\lambda^2 = \frac{2\sigma_x^2}{\left|\frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2}\right|}$$

Από τη 2η εξίσ. Wiener - Khintchin:

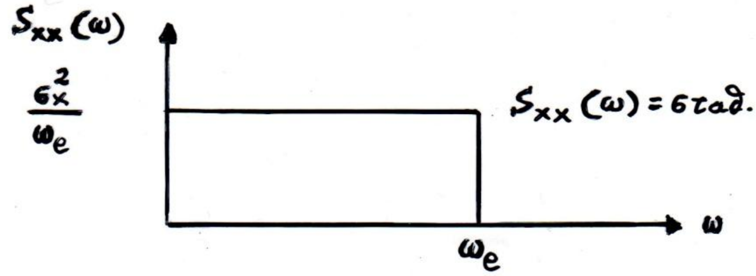
$$\frac{\partial R_{xx}(\tau)}{\partial \tau} = -\int_0^\infty S_{xx}(\omega)\,\omega \sin\omega\tau \, d\omega$$

$$\frac{\partial^2 R_{xx}(\tau)}{\partial \tau^2} = -\int_0^\infty S_{xx}(\omega)\,\omega^2 \cos\omega\tau \, d\omega$$

Για $\tau = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 R_{xx}(0)}{\partial \tau^2} = -\int_0^\infty \omega^2 S_{xx}(\omega)\, d\omega$

$$\boxed{\lambda^2 = \frac{2\int_0^\infty S_{xx}(\omega)\, d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 S_{xx}(\omega)\, d\omega}}$$

## "Λευκός θόρυβος" με περιορισμένο πλάτος




- Φάσμα λευκού θορύβου ⇒ ορθογωνικό φάσμα

- $S_{xx}(\omega) = \dfrac{\sigma_x^2}{\omega_e}$

- Από τη 2η εξίσ. Wiener-Khintchin:

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^{\omega_e} S_{xx}(0) \cos\omega\tau \, d\omega = S_{xx}(0) \int_0^{\omega_e} \cos\omega\tau \, d\omega =$$

$$= S_{xx}(0) \frac{1}{\tau} [\sin\omega\tau]_0^{\omega_e} = S_{xx}(0) \frac{1}{\tau} \sin\omega_e\tau =$$

$$= S_{xx}(0)\, \omega_e \frac{\sin\omega_e\tau}{\omega_e\tau} = \sigma_x^2 \frac{\sin\omega_e\tau}{\omega_e\tau}$$

- Όταν $\omega_e \to 0$, τότε $\lim \dfrac{\sin\omega_e\tau}{\omega_e\tau} = 1$

$$R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2$$

- Όταν $\sigma_x^2 = 1$ (εμβαδόν ορθογωνίου $= 1$), τότε "κανονικοποιημένο" φάσμα

Χρονική μακροκλίμακα (φάσμα λευκού θορύβου)

$$J = \frac{\pi S_{xx}(0)}{2\sigma_x^2} = \frac{\pi S_{xx}(0)}{2\omega_e S_{xx}(0)} = \frac{\pi}{2\omega_e} \qquad \boxed{J = \frac{\pi}{2\omega_e}}$$

Χρονική μικροκλίμακα (φάσμα λευκού θορύβου)

$$\lambda^2 = \frac{2\int_0^\infty S_{xx}(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 S_{xx}(\omega)\,d\omega} = \frac{2 S_{xx}(0)\omega_e}{S_{xx}(0)\frac{\omega_e^3}{3}} = \frac{6}{\omega_e^2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{6}}{\omega_e}}$$

Φάσμα διαδικασίας Markov πρώτης τάξης

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(0)\,e^{-a\tau} \qquad \text{ή} \qquad R_{xx}(\tau+\Delta t) = R_{xx}(\tau)\,e^{-a\Delta t}$$

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2\, e^{-a|\tau|}}$$

$$\boxed{S_{xx}(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi}\,\frac{2a}{a^2+\omega^2}}$$

Απόδειξη

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{\pi} A_R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \sigma_x^2 e^{a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sigma_x^2 e^{-a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)\tau} d\tau \right] =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{S_{xx}(0)}{\sigma_x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{2}{a} = \frac{1}{a} \quad \text{(χρονική μακροκλίμακα)}$$

$$\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = -a\sigma_x^2 e^{-a|\tau|} \qquad \text{για θετικά } \tau$$

$$\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau} = a\sigma_x^2 e^{-a|\tau|} \qquad \text{για αρνητικά } \tau$$

- Η παράγωγος παρουσιάζει ασυνέχεια για $\tau = 0$
- Η στοχαστική διαδικασία $x(t)$ δεν είναι συνεχής
- Δεν υπάρχει χρονική μικροκλίμακα

## Φάσμα ενός γραμμικού συστήματος

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$A_y(\omega) = A_x(\omega)\, H(\omega)$$

$$\boxed{S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)\, |H(\omega)|^2}$$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{1}{\pi} A_{Ry}(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} A_y(\omega)\, A_y^*(\omega)$$

$$\pi S_{yy}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} A_y(\omega)\, A_y^*(\omega)$$

$A_{Ry}(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{yy}(\tau)$

$$A_y^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{i\omega t}\, dt \qquad A_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$A_y(\omega)$ : μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $y(t)$

$$\pi S_{yy}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} A_x(\omega)\, H(\omega)\, A_x^*(\omega)\, H^*(\omega)$$

$$H(\omega)\, H^*(\omega) = |H(\omega)|^2 \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} A_x(\omega)\, A_x^*(\omega) = A_{Rx}(\omega) = \pi S_{xx}(\omega)$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)\, |H(\omega)|^2$$