ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΡΟΓΡ. ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ»

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

Αγγελίδης Π., Καθηγητής

- **ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ**
- **ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ**

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Όταν μια στερεή επιφάνεια περιβάλλει ένα υγρό, αναπτύσσονται δυνάμεις στην στερεή επιφάνεια εξαιτίας του υγρού.

Ο προσδιορισμός αυτών των δυνάμεων είναι σημαντικός για το σχεδιασμό φραγμάτων, θυροφραγμάτων, δεξαμενών αποθήκευσης, και άλλων υδραυλικών κατασκευών.

Για ρευστά σε κατάσταση ηρεμίας οι εξισώσεις Navier Stokes απλοποιούνται (εφ όσον όλες οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδενικές) στις παρακάτω εξισώσεις της υδροστατικής σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + U_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) = \rho f_1 - \frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu\nabla^2 U_1$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + U_2\frac{\partial U_2}{\partial x_2} + U_3\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) = \rho f_2 - \frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu\nabla^2 U_2$$

$$\rho\left(\frac{\partial U_3}{\partial t} + U_1\frac{\partial U_3}{\partial x_1} + U_2\frac{\partial U_3}{\partial x_2} + U_3\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) = \rho f_3 - \frac{\partial P}{\partial x_3} + \mu\nabla^2 U_3$$

όπου $p=p(x,y,z)$ η πίεση και f_x, f_y, f_z οι εξωτερικές δυνάμεις, βαρύτητας, μαγνητικές, κεντρομόλες κ.λπ.

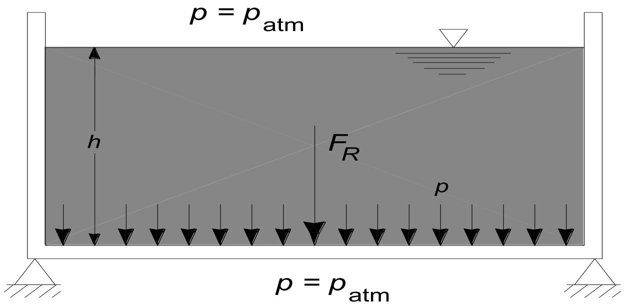
Στη συνέχεια υποθέτουμε μόνο δυνάμεις βαρύτητας, και επιλέγουμε το Καρτεσιανό σύστημα με τον άξονα z κατά τη διεύθυνση της βαρύτητας, οπότε

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

και συνεπώς: $p = p(z) = \rho g z + p_{atm}$

Από την σχέση που συνδέει τον τανυστή τάσεων με τον τανυστή ταχυτήτων παραμόρφωσης, είναι φανερό ότι για υγρό σε ακινησία (μηδενισμός όλων των ταχυτήτων) , οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται, οπότε υπάρχουν μόνο ορθές τάσεις, οι οποίες ταυτίζονται με τις πιέσεις. Συνεπώς η πίεση p πρέπει να είναι κάθετη προς την επιφάνεια σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας που την περικλείει.



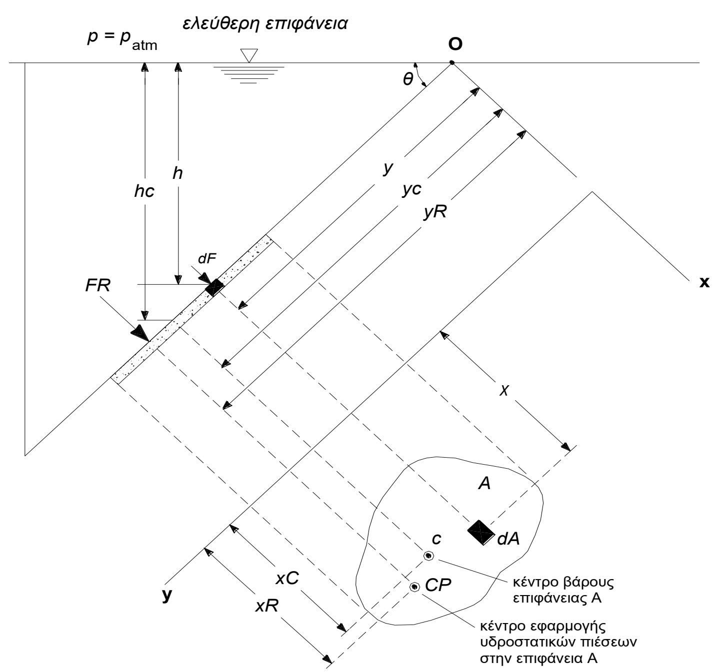
Για μια οριζόντια επιφάνεια, όπως ο πυθμένας δεξαμενής γεμάτης με κάποιο υγρό, το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης είναι απλά $F_R = pA$, όπου p είναι η ομοιόμορφη πίεση στον πυθμένα και A είναι το εμβαδόν του πυθμένα. Για την ανοικτή δεξαμενή του σχήματος, $p = \rho g h$.

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Αφού η πίεση είναι σταθερή και ομοιόμορφα κατανεμημένη σ' όλο τον πυθμένα, η συνισταμένη δύναμη στον οριζόντιο πυθμένα ασκείται στο κέντρο βάρους του εμβαδού (όπως θα δούμε αυτό δεν ισχύει όταν η επιφάνεια είναι κεκλιμένη).

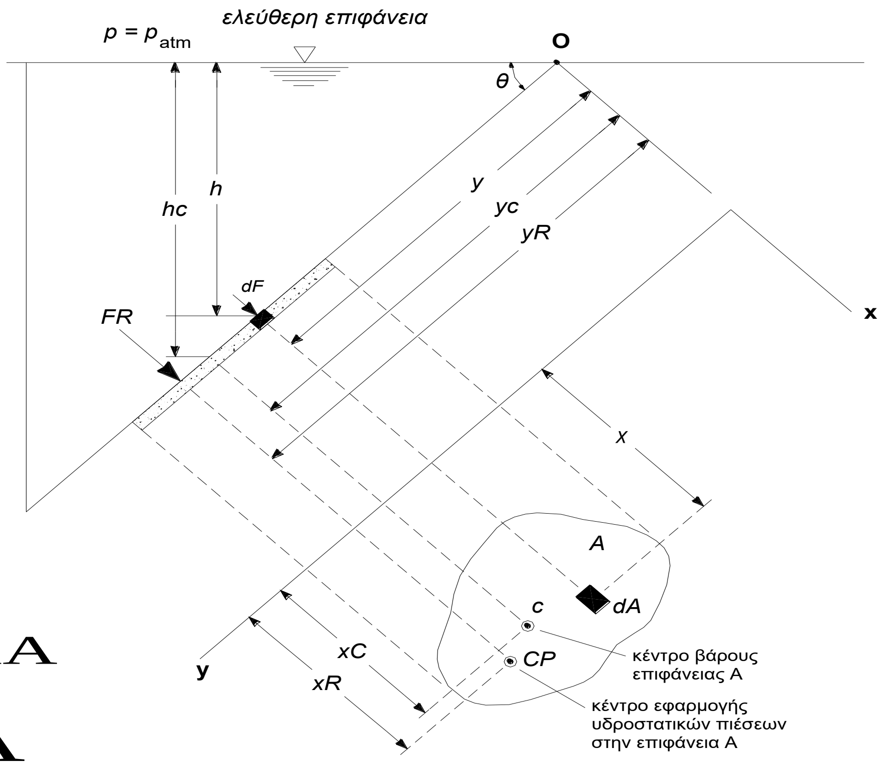
Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η επιφάνεια τέμνει την ελεύθερη επιφάνεια στο 0 και σχηματίζει γωνία θ μ' αυτήν όπως στο σχήμα.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση, τη θέση και το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στην μία πλευρά αυτής της επιφάνειας εξαιτίας του υγρού που έρχεται σε επαφή με αυτή.



ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Σε κάθε βάθος h, η δύναμη που ασκείται στο dA, είναι *dF =ρgh dA* και είναι κάθετη προς την επιφάνεια. Επομένως, το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης μπορεί να βρεθεί αθροίζοντας αυτές τις στοιχειώδεις δυνάμεις σ' ολόκληρη την επιφάνεια. Δηλ. σε μορφή εξίσωσης:



$$F_R = \int_A \rho g h \, dA = \int_A \rho g y \sin\vartheta \, dA$$

$$F_R = \rho g \sin\theta \int_A y \, dA$$

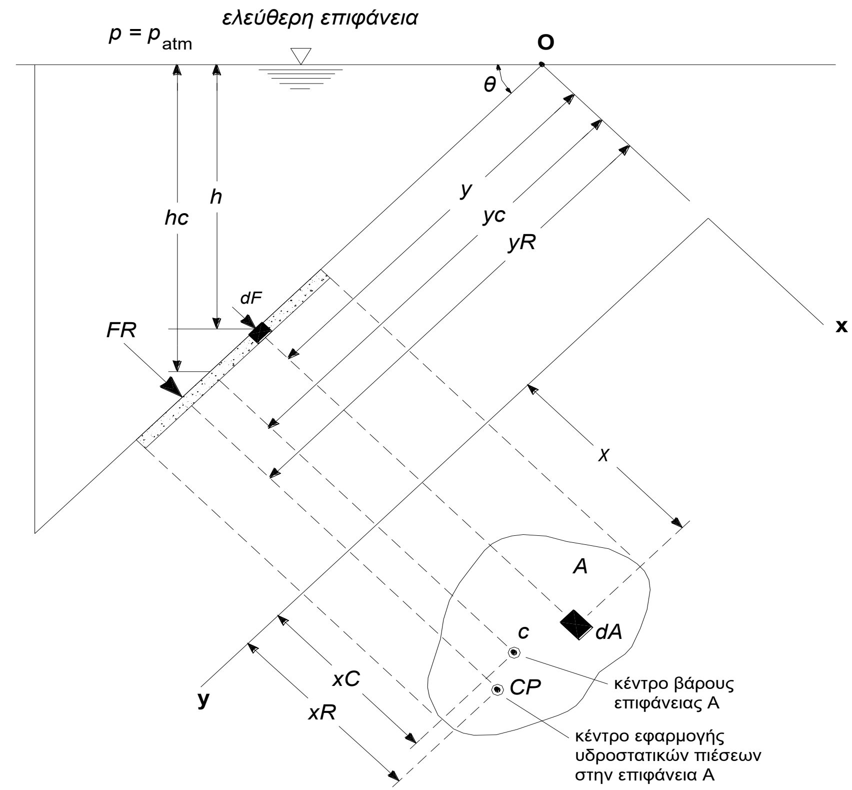
Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στη παραπάνω εξίσωση είναι η πρώτη ροπή του εμβαδού ως προς τον άξονα x:

$$\int_A y \, dA = y_c \, A$$

όπου y_c είναι η συντεταγμένη y του κέντρου βάρους που μετριέται πάνω στο κεκλιμμένο επίπεδο από τον άξονα x που περνά από το 0.

Άρα η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως:

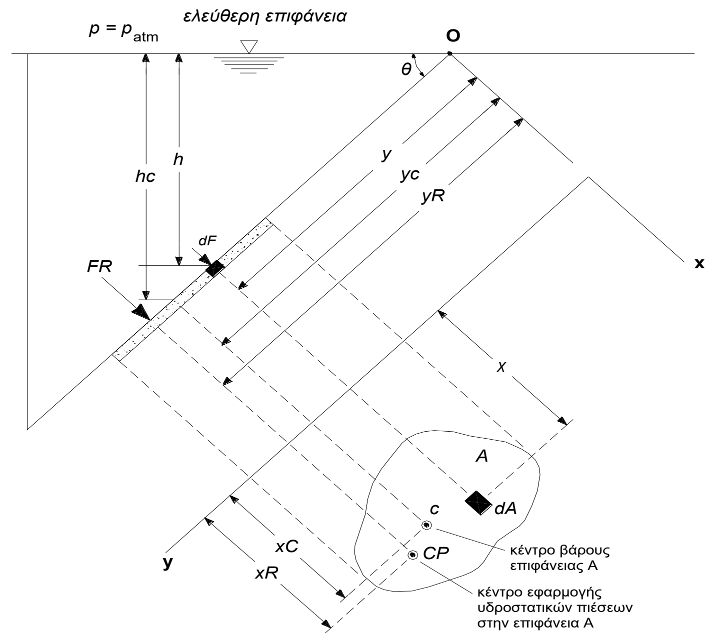
$$F_R = \rho g\, A\, y_c \sin\theta \quad \text{ή}$$
$$F_R = \rho g\, h_c A$$



όπου h_c είναι η κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του ρευστού ως το κέντρο βάρους του εμβαδού.

Παρατηρούμε, ότι το μέγεθος της συνισταμένης των πιέσεων δύναμης είναι ανεξάρτητο από τη γωνία θ και εξαρτάται μόνο από το ειδικό βάρος γ του ρευστού (γ = ρg), το συνολικό εμβαδόν και το βάθος του κέντρου βάρους του εμβαδού κάτω από την επιφάνεια.

Ουσιαστικά, η εξίσωση δείχνει ότι το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης είναι ίσο με την πίεση στο κέντρο βάρους του εμβαδού πολλαπλασιασμένη με το συνολικό εμβαδό.



Αφού όλες οι στοιχειώδεις δυνάμεις που αθροίστηκαν για να δώσουν την F_R είναι κάθετες στην κεκλιμμένη επιφάνεια, η συνισταμένη F_R πρέπει επίσης να είναι κάθετη στην κεκλιμμένη επιφάνεια.

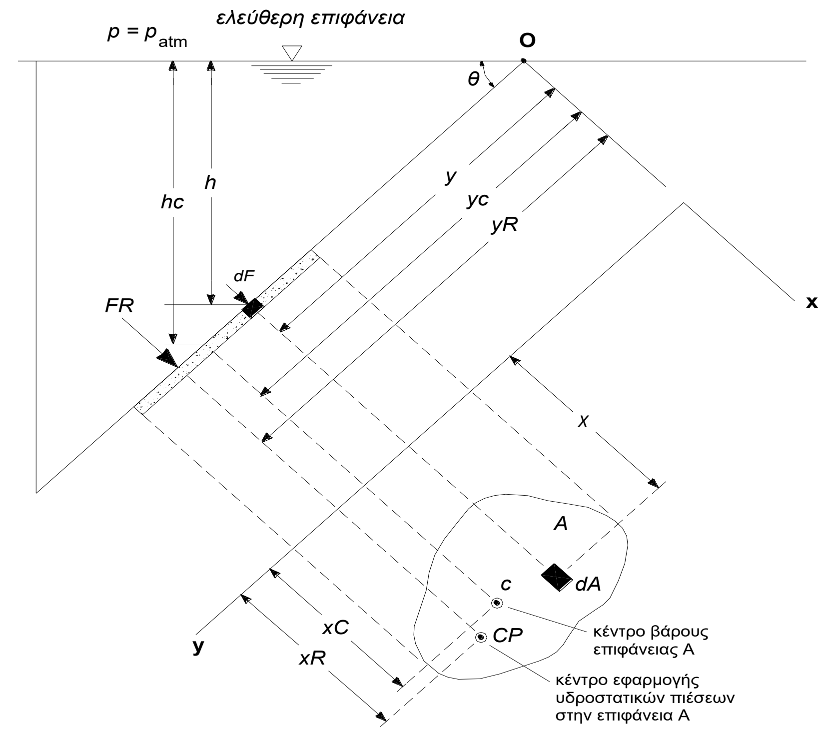
Αν και η διαίσθησή μας μπορεί να λέει ότι η συνισταμένη δύναμη πρέπει να περνάει από το κέντρο βάρους του εμβαδού, αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Η συντεταγμένη y_R της συνισταμένης δύναμης μπορεί να προσδιοριστεί με άθροιση των ροπών γύρω από τον άξονα x. Δηλαδή, η ροπή της συνισταμένης πρέπει να ισούται με τη ροπή της κατανεμημένης δύναμης πίεσης, ή

$$F_R y_R = \int_A y \, dF = \int_A \rho g \sin\theta \, y^2 dA$$

και επομένως αφού $F_R = \rho g A y_c \sin\theta$

$$y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A}$$

$$y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A}$$



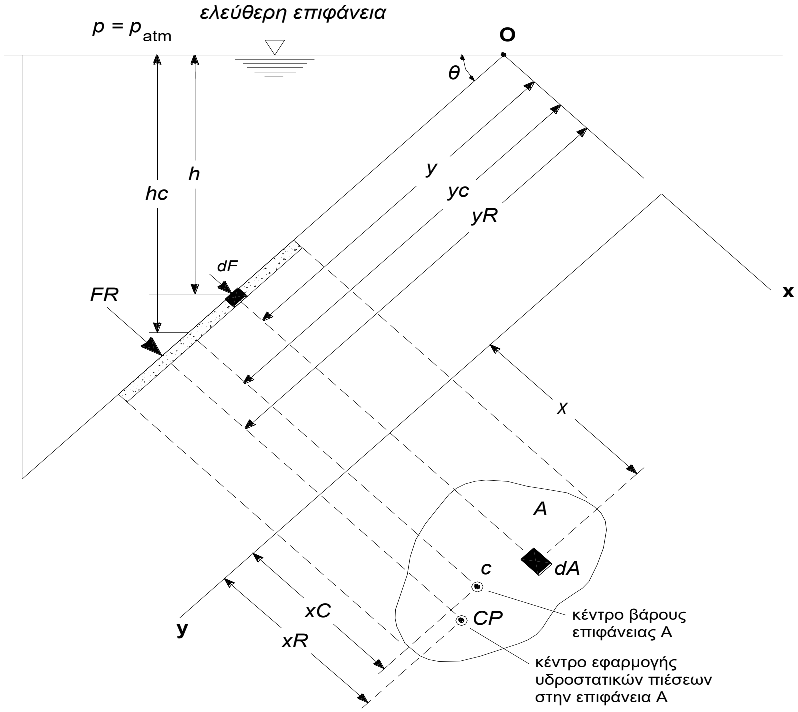
Το ολοκλήρωμα στον αριθμητή είναι η ροπή αδρανείας (δεύτερη ροπή του εμβαδού) I_x ως προς ένα άξονα που σχηματίζεται από την τομή του επιπέδου που περιέχει την επιφάνεια και την ελεύθερη επιφάνεια (άξονας x). Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A}$$ **αλλά:** $$I_x = I_{xc} + A y_c^2$$

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$$

Η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συνισταμένη δύναμη δεν περνά από το κέντρο βάρους αλλά είναι πάντα κάτω από αυτό, αφού $I_{xc} / y_c A > 0$.

Η συντεταγμένη x_R, για τη συνισταμένη δύναμη μπορεί να προσδιοριστεί κατά παρόμοιο τρόπο αθροίζοντας τις ροπές γύρω από τον άξονα y. Έτσι:



$$F_R x_R = \int_A \rho g \sin\theta \, xy \, dA$$

$$x_R = \frac{\int_A xy \, dA}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A}$$

όπου I_{xy} είναι το γινόμενο αδράνειας ως προς τους άξονες x και y. Πάλι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων μπορούμε να γράψουμε:

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$

όπου I_{xyc} είναι το γινόμενο της αδράνειας ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που περνά από το κέντρο βάρους του εμβαδού και σχηματίζεται από μία παράλληλη μετατόπιση του συστήματος συντεταγμένων x, y.

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Εάν το βυθισμένο εμβαδόν είναι συμμετρικό ως προς ένα άξονα που περνά από το κέντρο βάρους και παράλληλο με έναν από τους άξονες x ή y, η συνιστάμενη δύναμη πρέπει να βρίσκεται κατά μήκος της γραμμής $x=x_c$, αφού το I_{xyc} είναι μηδέν σ' αυτή την περίπτωση.

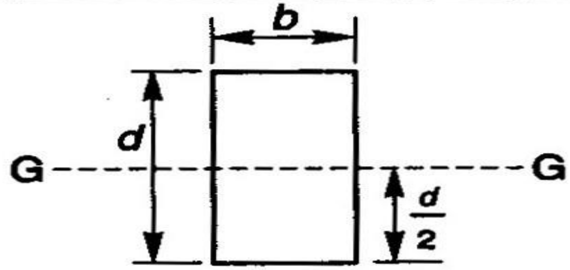
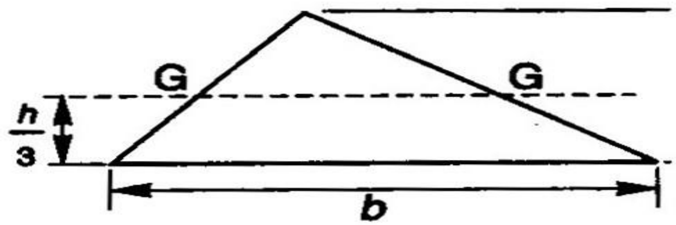
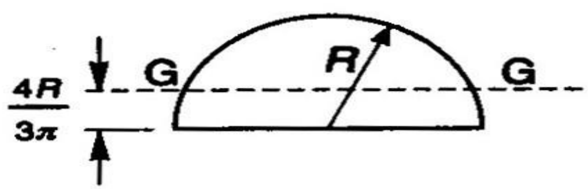
Το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η συνισταμένη δύναμη ονομάζεται κέντρο πίεσης.

Πρέπει να σημειωθεί από τις εξισώσεις

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c \qquad x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$

ότι καθώς το y_c αυξάνει, το κέντρο πίεσης μετατοπίζεται πιο κοντά στο κέντρο βάρους του εμβαδού.
Αφού $y_c = h_c / \sin\theta$, η απόσταση y_c αυξάνεται εάν το βάθος της βύθισης, h_c, αυξάνεται ή αν για ένα δεδομένο βάθος, η επιφάνεια περιστρέφεται έτσι ώστε η γωνία θ να μειώνεται.

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

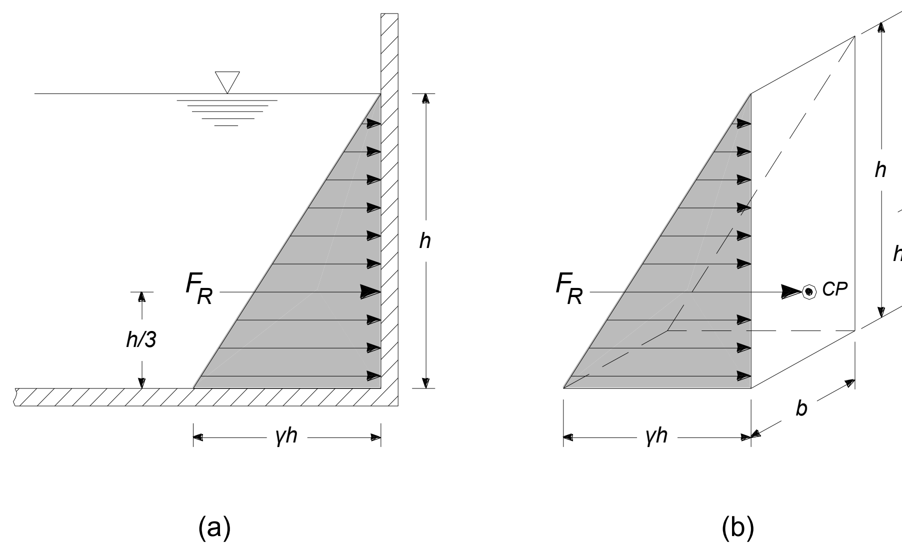
		ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ	ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ GG ΠΟΥ ΠΕΡΝΑ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ		bd	$\frac{bd^3}{12}$
ΤΡΙΓΩΝΟ		$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
ΚΥΚΛΟΣ		πR^2	$\frac{\pi R^4}{4}$
ΗΜΙΚΥΚΛΙΟ		$\frac{\pi R^2}{2}$	$0.1102\ R^4$

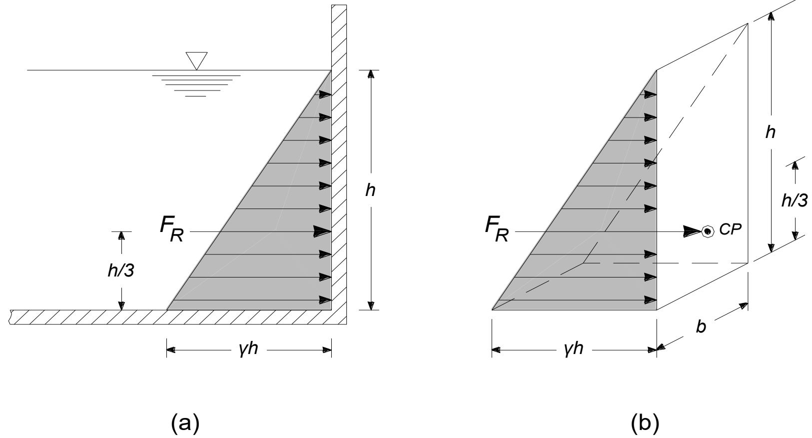
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ & ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΠΙΕΣΗΣ

Μια χρήσιμη γραφική απεικόνιση της υδροστατικής κατανομής των πιέσεων και υπολογισμού των δυνάμεων μπορεί να γίνει με το λεγόμενο πρίσμα των πιέσεων.

Θεωρείστε την κατανομή πίεσης κατά μήκος ενός κατακόρυφου τοιχώματος μιας δεξαμενής πλάτους b, η οποία περιέχει ένα υγρό που έχει ειδικό βάρος γ (γ=ρg). Αφού η πίεση μεταβάλλεται γραμμικά με το βάθος, μπορούμε να παραστήσουμε τη μεταβολή της πίεσης όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου η πίεση είναι ίση με το μηδέν στην άνω επιφάνεια και ίση με γh στον πυθμένα. Είναι φανερό από αυτό το διάγραμμα, ότι η μέση πίεση p_{av} συναντάται σε βάθος h/2 και επομένως η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο ορθογώνιο τοίχωμα με εμβαδόν A = bh είναι:

$$F_R = p_{av} A = \rho g (h/2)\, A$$

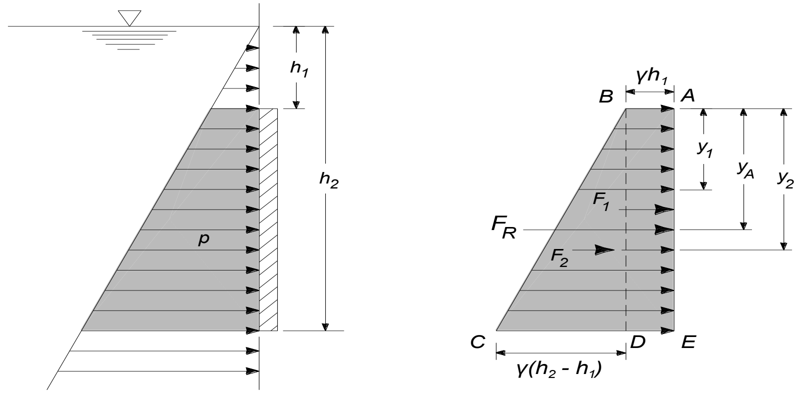




Αυτός ο "όγκος" ονομάζεται πρίσμα πίεσης και είναι ξεκάθαρο ότι το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης που ασκείται πάνω στην επιφάνεια του κατακόρυφου τοιχώματος ισούται με τον όγκο του πρίσματος πίεσης.
Επομένως για το πρίσμα του σχήματος η δύναμη που εξασκεί το ρευστό είναι:

$$F_R = \text{όγκος} = (1/2)(\gamma h)(bh) = \gamma (h/2) A, \qquad \text{όπου } A = bh$$

Η συνισταμένη δύναμη πρέπει να περνάει από το κέντρο βάρους του πρίσματος πίεσης. Για τον υπό συζήτηση όγκο το κέντρο βάρους βρίσκεται κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα συμμετρίας της επιφάνειας και σε απόσταση h/3 πάνω από τη βάση (αφού το κέντρο βάρους ενός τριγώνου βρίσκεται σε απόσταση h/3 πάνω από τη βάση του).
Αυτό το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με αυτό που προκύπτει από τις εξισώσεις.



Αυτή η ίδια γραφική προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για επίπεδες επιφάνειες οι οποίες δεν εκτείνονται μέχρι την επιφάνεια του ρευστού.

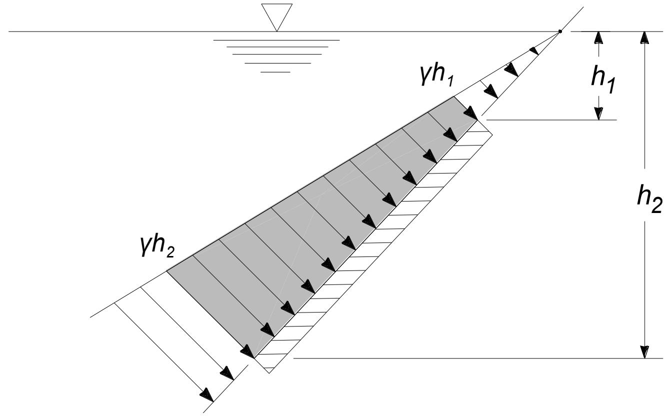
Σ' αυτή την περίπτωση, η διατομή του πρίσματος πίεσης είναι τραπεζοειδής. Παρόλα αυτά, η συνισταμένη δύναμη εξακολουθεί να είναι ίση σε μέγεθος με τον όγκο του πρίσματος πίεσης και περνάει από το κέντρο βάρους του όγκου. Χωρίζοντας το πρίσμα σε δύο μέρη ABDE και BCD όπως φαίνεται στο σχήμα, έχουμε :

$$F_R = F_1 + F_2$$

όπου οι συνιστώσες F_1 και F_2 μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν γεωμετρικά. Η θέση της F_R μπορεί να προσδιοριστεί αθροίζοντας τις ροπές γύρω από κάποιο κατάλληλο άξονα όπως αυτόν που περνά από το Α. Σ' αυτή την περίπτωση:

$$F_R\ y_A = F_1\, y_1 + F_2\, y_2$$

και y_1 και y_2 μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν.

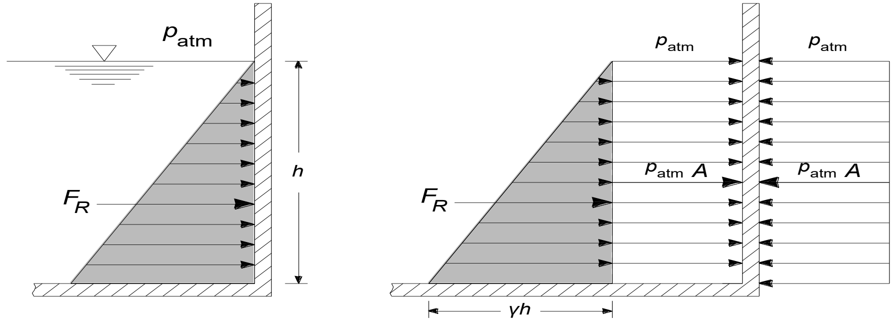


Για κεκλιμένες επίπεδες επιφάνειες το πρίσμα πίεσης μπορεί επίσης να σχεδιασθεί και η διατομή του πρίσματος θα είναι γενικά τραπεζοειδής.

Αν και συνήθως είναι βολικό να μετρούμε αποστάσεις κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας, οι πιέσεις που αναπτύσσονται εξαρτώνται από τις κατακόρυφες αποστάσεις h.

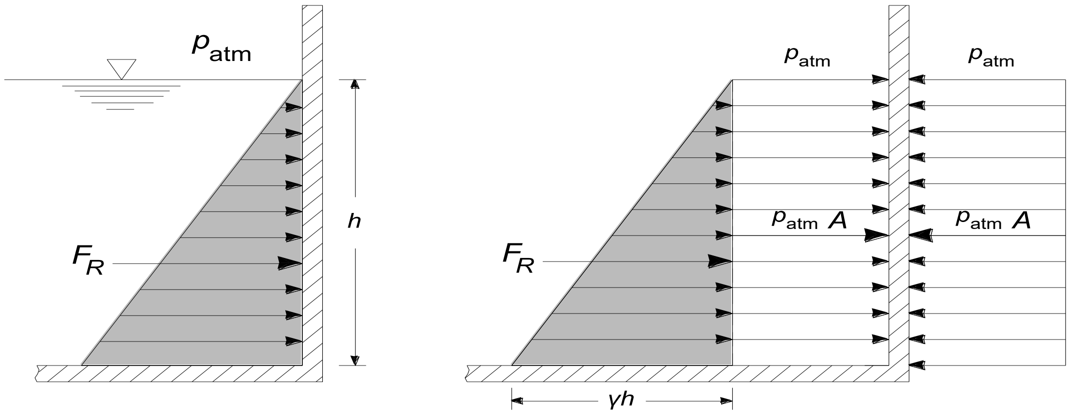
Η χρήση πρισμάτων πίεσης για τον προσδιορισμό της δύναμης σε βυθισμένα επίπεδα εμβαδά είναι βολική εάν το εμβαδόν είναι ορθογώνιο οπότε ο όγκος και το κέντρο βάρους μπορούν εύκολα να προσδιορισθούν.

Για άλλα μη ορθογώνια σχήματα, θα χρειαζόταν γενικώς ολοκλήρωση για να προσδιορισθεί ο όγκος και το κέντρο βάρους. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι πιο βολικό να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν, στις οποίες έχουν γίνει οι απαραίτητες ολοκληρώσεις και τα αποτελέσματα έχουν παρουσιαστεί με ένα εύχρηστο τύπο που μπορεί να εφαρμοστεί σε βυθισμένες επίπεδες επιφάνειες κάθε σχήματος.



(a) (b)

Η επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης δεν έχει ακόμη ληφθεί υπ' όψιν και τίθεται το ζήτημα πως αυτή η πίεση θα επηρεάσει τη συνισταμένη δύναμη.
Ας θεωρήσουμε ξανά την κατανομή πίεσης σε ένα επίπεδο κατακόρυφο τοίχωμα, όπου η πίεση μεταβάλλεται από μηδέν στην επιφάνεια έως γh στον πυθμένα. Αφού ορίζουμε την πίεση επιφανείας ίση με μηδέν, χρησιμοποιούμε την ατμοσφαιρική πίεση σαν αφετηρία και έτσι η πίεση που χρησιμοποιείται είναι σχετική πίεση.
Εάν θέλουμε να συμπεριλάβουμε την ατμοσφαιρική πίεση, η κατανομή πίεσης θα είναι όπως στο σχήμα. Σημειώνουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση η δύναμη στη μια πλευρά του τοιχώματος τώρα αποτελείται από την F_R σαν αποτέλεσμα της κατανομής της υδροστατικής πίεσης συν τη συνεισφορά της ατμοσφαιρικής πίεσης p_{atm} A, όπου A είναι το εμβαδόν της επιφάνειας.
Παρόλα αυτά, εάν πρόκειται να συμπεριλάβουμε την επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης σε μια πλευρά του τοιχώματος πρέπει να αντιληφθούμε ότι αυτή η ίδια πίεση ασκείται στην εξωτερική επιφάνεια, έτσι ώστε μια ίση και αντίθετη δύναμη να αναπτύσσεται.

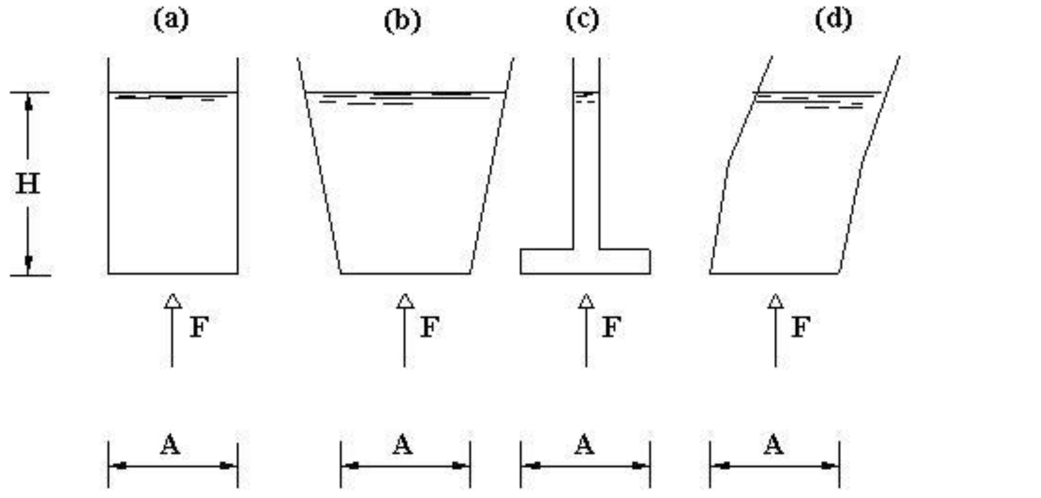


(a) (b)

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η συνισταμένη δύναμη του ρευστού πάνω στην επιφάνεια είναι αυτή που οφείλεται μόνο στη συνεισφορά της υδροστατικής πίεσης του υγρού που έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια του τοιχώματος. Η ατμοσφαιρική πίεση δεν συνεισφέρει σ' αυτή τη συνισταμένη.

Βεβαίως, εάν η πίεση επιφάνειας του υγρού είναι διαφορετική από την ατμοσφαιρική πίεση (όπως μπορεί να συμβεί σε μία αεροστεγώς κλειστή δεξαμενή), η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο τοίχωμα θα είναι διαφορετική σε μέγεθος από αυτή που προκαλείται απλώς από την υδροστατική πίεση κατά ποσό $p_s A$, όπου p_s είναι η σχετική πίεση στην επιφάνεια του υγρού (η εξωτερική επιφάνεια θεωρείται ότι είναι εκτεθειμένη στην ατμοσφαιρική πίεση) και A το εμβαδόν της επιφάνειας.

ΤΟ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ



Ας θεωρήσουμε τα δοχεία του σχήματος και ας εξετάσουμε ποια είναι η δύναμη F η οποία ασκείται στον πυθμένα τους.

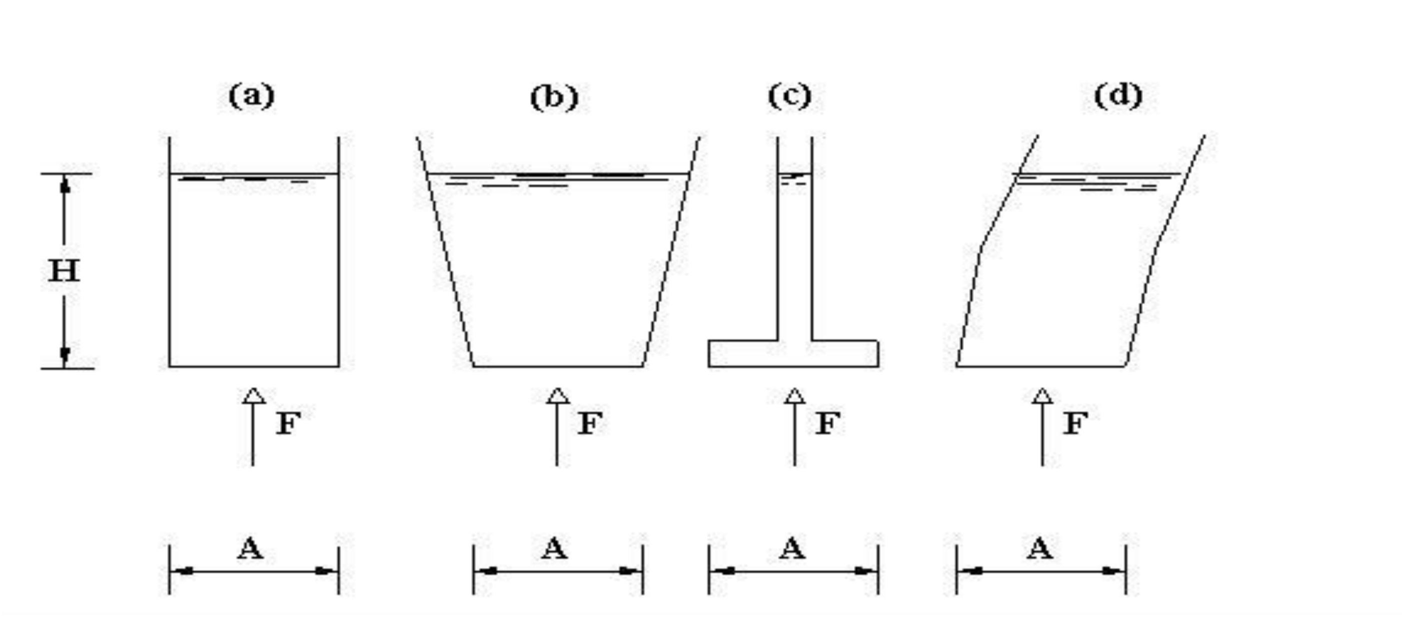
Υποθέτουμε ότι όλα τα δοχεία περιέχουν το ίδιο υγρό πυκνότητας ρ, ότι η απόσταση της ελεύθερης επιφάνειας κάθε δοχείου από τον αντίστοιχο πυθμένα είναι Η, και ότι το εμβαδόν του πυθμένα κάθε δοχείου είναι S.

Το βάρος του υγρού σε κάθε ένα δοχείο διαφέρει σημαντικά.

Η πίεση στον πυθμένα κάθε δοχείου είναι $P = \rho g H$.

Η δύναμη στον πυθμένα κάθε δοχείου είναι ίδια και ίση με: $F = \rho g H S$

ΤΟ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ



Κατά συνέπεια η δύναμη η οποία εξασκείται στον οριζόντιο πυθμένα όλων των δοχείων του σχήματος είναι ανεξάρτητη από τις μορφές των δοχείων και εξαρτάται μόνο από το εμβαδόν του πυθμένα, την απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια και το ειδικό βάρος του υγρού.

Το γεγονός ότι η δύναμη που εξασκείται στον πυθμένα ενός δοχείου είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου και για μερικά δοχεία πολύ μεγαλύτερη από το βάρος του υγρού που περιέχει το δοχείο, είναι γνωστό σαν "υδροστατικό παράδοξο".

Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Όταν ένα σώμα βυθισθεί εντελώς σε ένα ρευστό, ή επιπλέει έτσι ώστε να είναι μόνο εν μέρει βυθισμένο, η συνισταμένη δύναμη των πιέσεων του ρευστού πάνω στο σώμα ονομάζεται δύναμη άνωσης.
Μια κατακόρυφη δύναμη με διεύθυνση προς τα πάνω προκύπτει σε αυτή την περίπτωση επειδή η πίεση αυξάνεται με το βάθος και οι δυνάμεις πίεσης που ασκούνται από κάτω είναι μεγαλύτερες από τις δυνάμεις πίεσης που ασκούνται από πάνω.
Θεωρήστε ένα σώμα αυθαίρετου σχήματος, που έχει όγκο V, το οποίο εμβαπτίζεται σε ένα ρευστό πυκνότητας ρ. Η δύναμη άνωσης δίνεται (για ομογενές ρευστό) από τη σχέση:

$$F_B = \rho g V$$

όπου V είναι ο όγκος του σώματος. Η δύναμη άνωσης έχει μέγεθος ίσο με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζεται από το σώμα, είναι κατακόρυφη με διεύθυνση προς τα πάνω.
Αυτό το αποτέλεσμα είναι το γνωστό θεώρημα του *Αρχιμήδη* προς τιμήν του Αρχιμήδη (287 - 212 π. Χ.), ο οποίος πρώτος το ανακάλυψε και πρώτος διατύπωσε τις βασικές αρχές που έχουν σχέση με την υδροστατική.
https://www.youtube.com/watch?v=raNOw42YaFA

Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

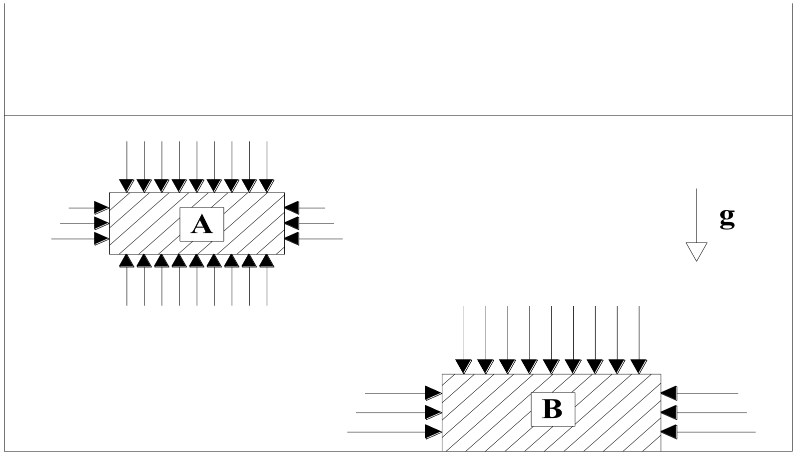
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η δύναμη άνωσης περνά μέσα από το κέντρο βάρους της εκτοπιζομένης μάζας (που εφόσον το ρ είναι σταθερό συμπίπτει με το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου όγκου). Το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη άνωσης ονομάζεται κέντρο άνωσης.

Τα ίδια αυτά συμπεράσματα ισχύουν και για επιπλέοντα σώματα τα οποία είναι μόνο εν μέρει βυθισμένα, εάν το ειδικό βάρος του ρευστού πάνω από την επιφάνεια του υγρού είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με το υγρό στο οποίο επιπλέει το σώμα.

Αφού το ρευστό πάνω από την επιφάνεια του υγρού (νερού) είναι συνήθως αέρας, για πρακτικούς σκοπούς αυτός ο όρος πληρείται.

Στην ανάλυση που παρουσιάστηκε πιο πάνω, το ρευστό θεωρείται ότι έχει σταθερή πυκνότητα ρ. Εάν ένα σώμα εμβαπτίζεται σε ρευστό στο οποίο η πυκνότητα ρ μεταβάλλεται με το βάθος, όπως σε ένα στρωματισμένο ρευστό (stratified fluid), το μέγεθος της δύναμης άνωσης παραμένει ίσο με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού. Η δύναμη άνωσης όμως δεν περνά μέσα από το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου όγκου, αλλά περνά μέσα από το κέντρο βάρους της εκτοπιζόμενης μάζας.

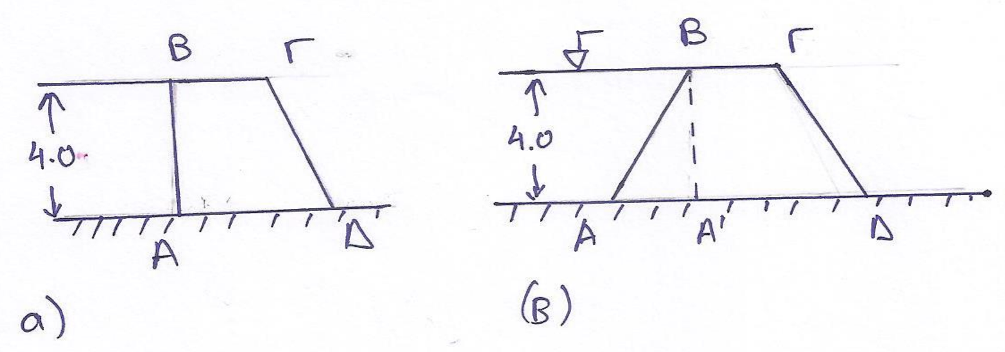
Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ



Η αρχή του Αρχιμήδη εφαρμόζεται στο σώμα Α (ασκείται ανωστική δύναμη). Στο σώμα Β ασκείται μια δύναμη που το πιέζει προς τον πυθμένα επειδή το νερό δεν περνά από κάτω.

Το παράδειγμα αυτό είναι σχετικό με την περίπτωση υποβρυχίου που για οποιονδήποτε λόγο ήρθε σε επαφή με τον πυθμένα, οπότε το υποβρύχιο χάνει την άνωσή του και δεν μπορεί να επιπλεύσει, γιατί η δύναμη που το πιέζει προς τον πυθμένα είναι τεράστια συγκρινόμενη με την δυνατότητα των μηχανών του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



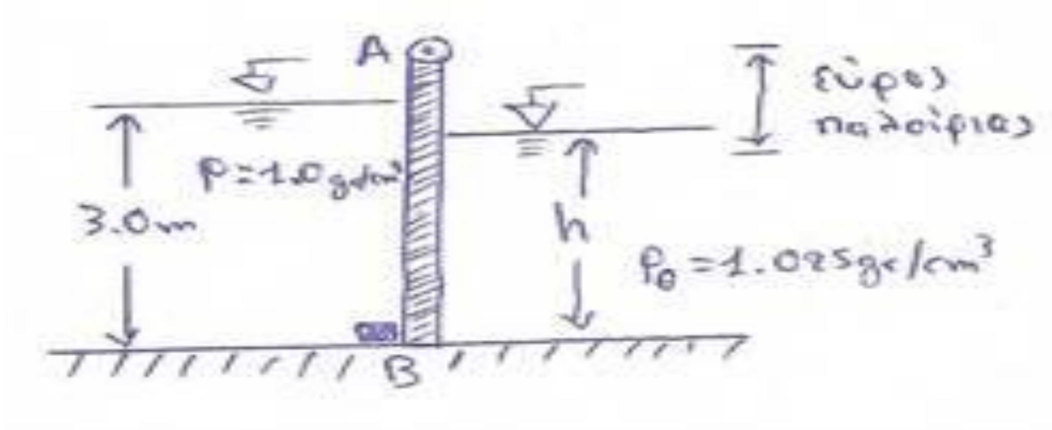
Άσκηση Φ1.

Έστω τα αναχώματα των σχημάτων (α) και (β) που συγκρατούν αριστερά νερό πυκνότητας ρ=1000 Kg/m^3, βάθους 4.0 m. Το μήκος των αναχωμάτων κάθετα στο χαρτί υποτίθεται μεγάλο, και για τον λόγο αυτό να γίνει ο υπολογισμός για 1.0 m. Να βρεθούν:

i) Η συνισταμένη δύναμη εξαιτίας του νερού στην πλευρά (AB) του σχήματος (α)

ii) Η συνισταμένη δύναμη εξαιτίας του νερού στην πλευρά (AB) του σχήματος (β) με τρεις τρόπους: απευθείας, με το πρίσμα πιέσεων, και με την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα Fx, Fy

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



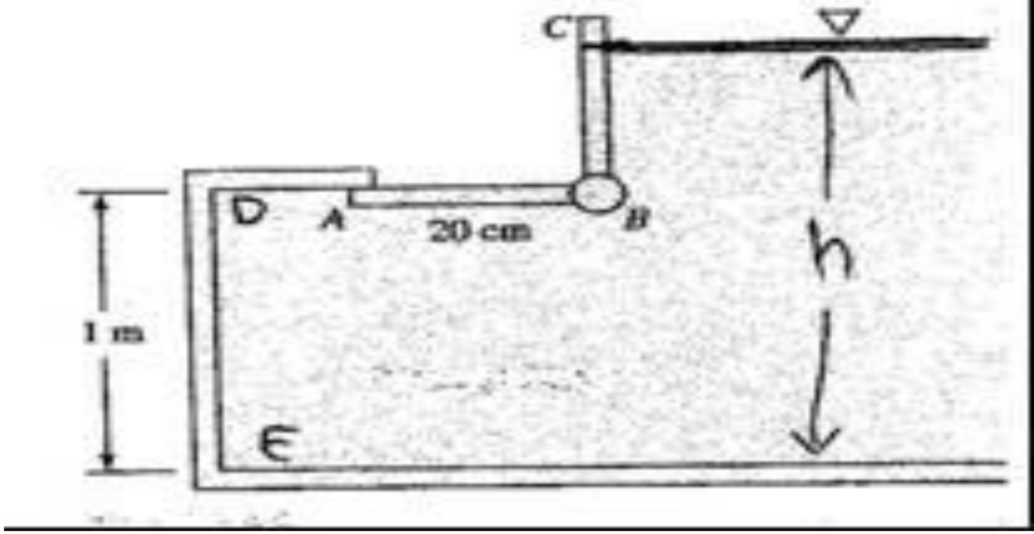
Άσκηση Φ2.

Μια λίμνη συνδέεται με τη θάλασσα μέσω ενός ορθογωνικού καναλιού. Στο κανάλι αυτό έχει κατασκευαστεί ένα ορθογωνικό θυρόγραγμα (AB) ύψους 3.60 m και πλάτους (κάθετα στο χαρτί) 1.50 m. Το θυρόφραγμα είναι αρθρωμένο στο σημείο A και «ακουμπάει» σε ένα «stop» στο σημείο B. Η στάθμη της λίμνης (αριστερά) είναι 3.0 m, ενώ η στάθμη της θάλασσας (δεξιά) κυμαίνεται λόγω της παλοίριας.

Να βρεθεί για ποια τιμή βάθους h της θάλασσας θα ανοίξει το θυρόφραγμα, ώστε να επιτραπεί έξοδος γλυκού νερού της λίμνης.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού της λίμνης ρ=1000 Kg/m^3, η πυκνότητα του θαλασσινού νερού ρ=1025 Kg/m^3 και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2. Το βάρος του θυροφράγματος (AB) να θεωρηθεί αμελητέο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Άσκηση Φ3.

Δίνεται το θυρόφραγμα ABC, γωνιακού σχήματος, με αμελητέο βάρος, με διάσταση 2 m κάθετα στο επίπεδο του χαρτιού, και την πλευρά AB=20cm. Το γωνιακό θυρόφραγμα είναι αρθρωμένο στο σημείο B, και χρησιμοποιείται ως μηχανικό σύστημα ασφαλείας, δηλαδή για να ανοίγει αυτόματα, όταν το βάθος του νερού ξεπερνάει μια τιμή h.

A) Να προσδιοριστεί για ποια τιμή βάθους h θα ανοίξει το θυρόφραγμα,

B) Για βάθος νερού h=1.20 m, να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στην πλευρά DE λόγω των υδροστατικών πιέσεων (μέτρο, διεύθυνση, σημείο εφαρμογής).

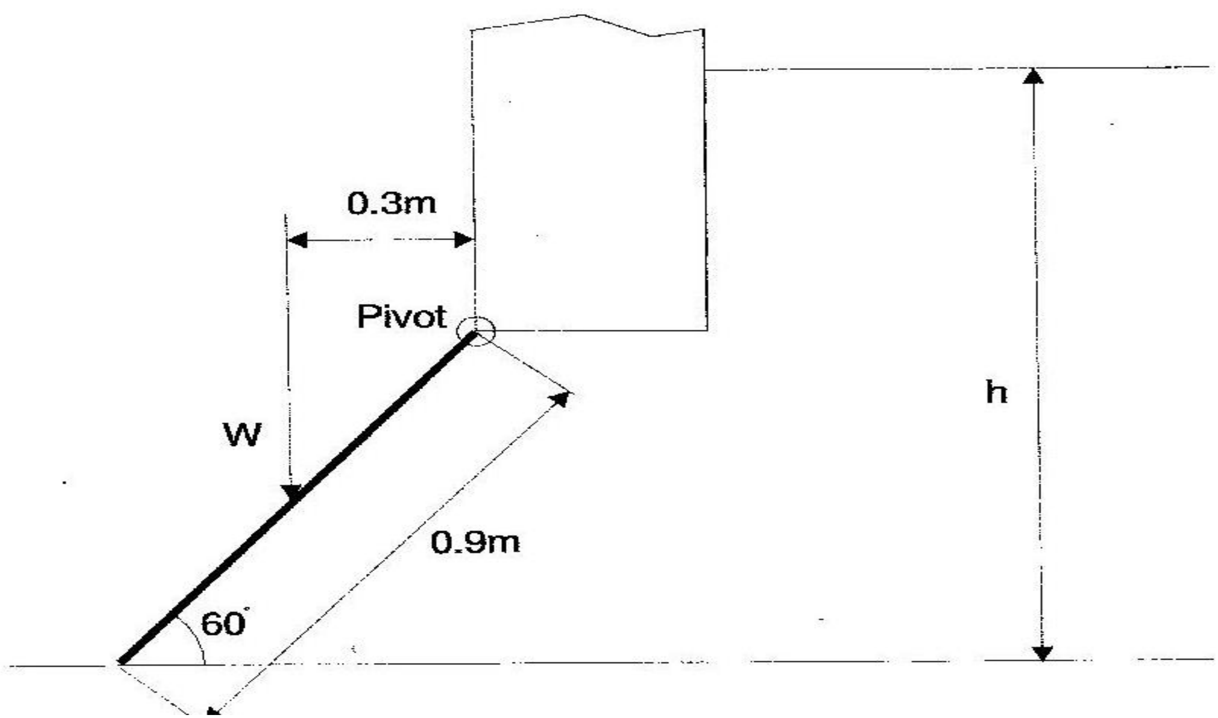
Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho=1000\ Kg/m^3$, και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Φ4.

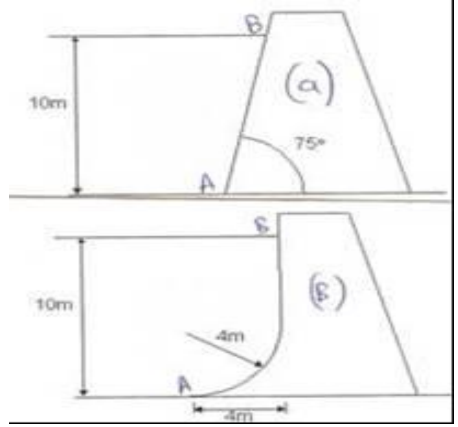
A rectangular sluice gate is fitted at the base of a reservoir wall with a pivot in the arrangement shown in Figure 3. The gate is designed to regulate the level of water in the reservoir by opening when the water level to the right, h, reaches a certain depth. The gate has a width of 1.2m and its centre of gravity is 0.3m from the wall. Determine the weight, W, of the gate, if a water level of h = 2.779m will just cause the gate to open.

(25 marks)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Φ5.



Α) Ένα φράγμα από σκυρόδεμα έχει τη διατομή του σχήματος (α). Να υπολογιστεί το μέτρο, η διεύθυνση και το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης των ασκούμενων πιέσεων στην πλευρά (ΑΒ) του φράγματος, που έχει κλίση 75^0 ως προς την οριζόντιο.

Β) Ένας εναλλακτικός σχεδιασμός της διατομής του ίδιου φράγματος δίνεται στο σχήμα (β), όπου η πλευρά (ΑΒ) αποτελείται από ένα κατακόρυφο τμήμα 6.0 m και ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 4.0 m. Να υπολογιστεί το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης των ασκούμενων πιέσεων στην πλευρά (ΑΒ) του φράγματος.

Δίνεται, ότι αριστερά στον ταμιευτήρα βρίσκεται νερό πυκνότητας ρ=1000 Kg/m^3 και βάθους 10 m. Τα παραπάνω να υπολογιστούν για μήκος φράγματος 1.0 m (κάθετα στο χαρτί). Η επιτάχυνση της βαρύτητας να ληφθεί g=10 m/s^2.