

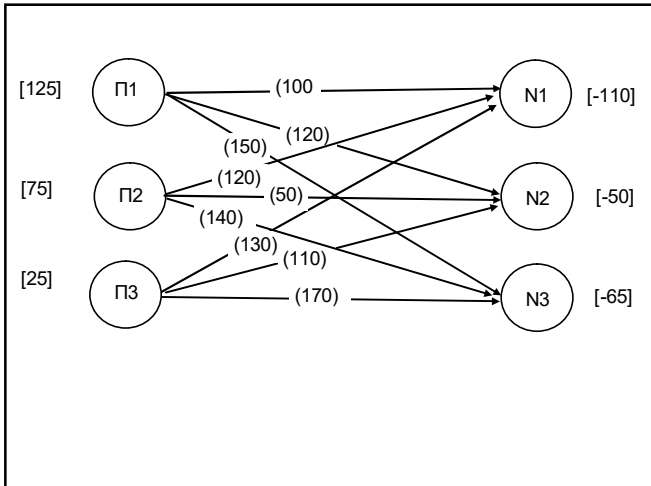
ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		100	120	150	125
Πηγή 2		120	50	140	75
Πηγή 3		130	110	170	25
Περιορισμός Ζήτησης		110	50	65	<b>225</b>

1

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		110	15		125
Πηγή 2		120	35	40	75
Πηγή 3		130	110	25	25
Περιορισμός Ζήτησης		110	50	65	<b>225</b>

$K_{21} = 120 - 50 + 120 - 100 = 90$   
 $K_{31} = 130 - 170 + 140 - 50 + 120 - 100 = 70$   
 $K_{32} = 110 - 170 + 140 - 50 = 30$   
 $K_{13} = 150 - 120 + 50 - 140 = -60$

4



2

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		110		15	125
Πηγή 2		120	50	25	75
Πηγή 3		130	110	25	25
Περιορισμός Ζήτησης		110	50	65	<b>225</b>

**Κόστος** =  $110 \times 100 + 15 \times 150 + 50 \times 50 + 25 \times 140 + 25 \times 170 = 23.500$   
 μείωση κατά  $15 \times 60 = 900$

5

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		110	15		125
Πηγή 2		120	35	40	75
Πηγή 3		130	110	25	25
Περιορισμός Ζήτησης		110	50	65	<b>225</b>

**Κόστος** =  $110 \times 100 + 15 \times 120 + 35 \times 50 + 40 \times 140 + 25 \times 170 = 24.400$

3

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		110		15	125
Πηγή 2		120	50	25	75
Πηγή 3		130	110	25	25
Περιορισμός Ζήτησης		110	50	65	<b>225</b>

$K_{21} = 120 - 140 + 150 - 100 = 30$   
 $K_{31} = 130 - 170 + 150 - 100 = 10$   
 $K_{32} = 110 - 170 + 140 - 50 = 30$   
 $K_{12} = 120 - 50 + 140 - 150 = 60$   
**όλα θετικά, βέλτιστη λύση**

6

**Μέθοδος Ελαχίστου Μοναδιαίου Κόστους**

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		100	120	150	125
	110			15	
Πηγή 2		120	50	140	
Πηγή 2			50	25	75
Πηγή 3		130	110	170	25
				25	
Περιορισμός Ζήτησης	110	50	65		<b>225</b>

**Κόστος = 110x100 + 15x150 + 50 x 50 + 25x140 + 25x170 = 23.500**  
 η αρχική λύση είναι η βέλτιστη λύση

7

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		100	120	150	125
			50		
Πηγή 2		120	50	140	
Πηγή 2			50	25	75
Πηγή 3		130	110	170	25
				25	
Περιορισμός Ζήτησης	110	50	65		<b>225</b>

Σε αυτή τη σειρά ή στήλη δίνουμε στο τετράγωνο με το μικρότερο κόστος όση ποσότητα μπορεί να πάρει και απαλείφουμε τα τετράγωνα που αποκλείονται για τη συνέχεια

10

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1	110	100	120	150	125
		15			
Πηγή 2		120	50	140	
Πηγή 2			35	40	75
Πηγή 3		130	110	170	25
				25	
Περιορισμός Ζήτησης	110	50	65		<b>225</b>

$\Sigma_1 + T_1 = 100$   
 $\Sigma_1 + T_2 = 120$   
 $\Sigma_2 + T_2 = 50$   
 $\Sigma_2 + T_3 = 140$   
 $\Sigma_3 + T_3 = 170$   
 με  $\Sigma_1 = 0$   
 $T_1 = 100$   
 $T_2 = 120$   
 $\Sigma_2 = -70$   
 $T_3 = 210$   
 $\Sigma_3 = -40$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma_1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{21} = 120 - (-70) - 100 = 90$   
 $K_{31} = 130 - (-40) - 100 = 70$   
 $K_{32} = 110 - (-40) - 120 = 30$   
 $K_{13} = 150 - 0 - 210 = -60$

**Μέθοδος MODI**

8

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		100	120	150	125
	110			15	
Πηγή 2		120	50	140	
Πηγή 2			50	25	75
Πηγή 3		130	110	170	25
				25	
Περιορισμός Ζήτησης	110	50	65		<b>225</b>

20

10

50

20

40

Υπολογίζουμε ξανά τις διαφορές, βρίσκουμε τη μεγαλύτερη κλπ

11

**Μέθοδος Vogel**

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		100	120	150	125
Πηγή 2		120	50	140	
Πηγή 2			50	25	75
Πηγή 3		130	110	170	25
				25	
Περιορισμός Ζήτησης	110	50	65		<b>225</b>

20

60

10

20

70

20

Υπολογίζουμε την διαφορά μεταξύ των δύο μικρότερων τιμών κόστους σε κάθε σειρά και στήλη και εντοπίζουμε τη μεγαλύτερη

9

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1	110	100	120	150	125
Πηγή 2		120	50	140	
Πηγή 2			50	25	75
Πηγή 3		130	110	170	25
				25	
Περιορισμός Ζήτησης	110	50	65		<b>225</b>

$\Sigma_1 + T_1 = 100$   
 $\Sigma_1 + T_3 = 150$   
 $\Sigma_2 + T_2 = 50$   
 $\Sigma_2 + T_3 = 140$   
 $\Sigma_3 + T_3 = 170$   
 με  $\Sigma_1 = 0$   
 $T_1 = 100$   
 $T_3 = 150$   
 $\Sigma_2 = -10$   
 $T_2 = 60$   
 $\Sigma_3 = 20$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma_1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{12} = 120 - 0 - 60 = 60$   
 $K_{21} = 120 - (-10) - 100 = 30$   
 $K_{31} = 130 - 20 - 100 = 10$   
 $K_{32} = 110 - 20 - 60 = 30$

**Μέθοδος MODI**

όλα θετικά

12

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
Πηγή 3		6	7	9	8	2500
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

13

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
Πηγή 3		6	7	9	8	2500
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 1 + T_4 = 6$   
 $\Sigma 2 + T_1 = 4$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 $\Sigma 3 + T_4 = 8$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_2 = 3$   
 $T_4 = 6$   
 $\Sigma 3 = 2$   
 $T_3 = 7$   
 $\Sigma 2 = 0$   
 $T_1 = 4$

Βέλτιστη λύση  
 Κόστος μεταφοράς = 43.800  
**Πολλαπλές Λύσεις !!**

$K_{11} = 5-0-4 = 1$      $K_{24} = 6-0-6 = 0$   
 $K_{13} = 8-0-7 = 1$      $K_{31} = 6-2-4 = 0$   
 $K_{22} = 5-0-3 = 2$      $K_{32} = 7-2-3 = 2$

16

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
Πηγή 3		6	7	9	8	2500
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_1 = 5$   
 $\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 + T_2 = 5$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 $\Sigma 3 + T_4 = 8$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_1 = 5$   
 $T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 = 2$   
 $T_3 = 5$   
 $\Sigma 3 = 4$   
 $T_4 = 4$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma 1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{13} = 8-0-5 = 3$      $K_{24} = 6-2-4 = 0$   
 $K_{14} = 6-0-4 = 2$      $K_{31} = 6-4-5 = -3$   
 $K_{21} = 4-2-5 = -3$      $K_{32} = 7-4-3 = 0$

14

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
Πηγή 3		6	7	9	8	2500
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 1 + T_4 = 6$   
 $\Sigma 2 + T_1 = 4$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 2 + T_4 = 6$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_2 = 3$   
 $T_4 = 6$   
 $\Sigma 2 = 0$   
 $T_3 = 7$   
 $\Sigma 3 = 2$   
 $T_1 = 4$

Βέλτιστη λύση  
 Κόστος μεταφοράς = 43.800  
 Κάθε γραμμικός συνδυασμός δύο λύσεων αποτελεί λύση  $\Rightarrow$  πολλαπλές λύσεις

$K_{11} = 5-0-4 = 1$      $K_{31} = 6-2-4 = 0$   
 $K_{13} = 8-0-7 = 1$      $K_{32} = 7-2-3 = 2$   
 $K_{22} = 5-0-3 = 2$      $K_{34} = 8-2-6 = 0$

17

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
Πηγή 3		6	7	9	8	2500
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_1 = 5$   
 $\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 + T_1 = 4$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 $\Sigma 3 + T_4 = 8$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_1 = 5$   
 $T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 = -1$   
 $T_3 = 8$   
 $\Sigma 3 = 1$   
 $T_4 = 7$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma 1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{13} = 8-0-8 = 0$      $K_{24} = 6-(-1)-7 = 0$   
 $K_{14} = 6-0-7 = -1$      $K_{31} = 6-1-5 = 0$   
 $K_{22} = 5-(-1)-3 = 3$      $K_{32} = 7-1-3 = 3$

15

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	3000
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
Πηγή 3		6	7	9	8	2500
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900 ≠ 7800

18

απο	προε	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Εικονικό Νησί Ε	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	0	3000
	1000		1200	800			
Πηγή 2		4	5	7	6	0	2300
			2200	100			
Πηγή 3		6	7	9	8	0	2500
				1600	900		
Περιορισμός Ζήτησης	1000	1200	3000	1700	900		7800

19

απο	προε	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Εικονικό Νησί Ε	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	0	3000
		1200		700	1100		
Πηγή 2		4	5	7	6	0	2300
			2300				
Πηγή 3		6	7	9	8	0	2500
	1000			600	900		
Περιορισμός Ζήτησης	1000	1200	3000	1700	900		7800

$\Sigma_1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma_1 + T_3 = 8$   
 $\Sigma_1 + T_4 = 6$   
 $\Sigma_2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma_3 + T_1 = 6$   
 $\Sigma_3 + T_4 = 8$   
 $\Sigma_3 + T_5 = 0$   
 με  $\Sigma_1 = 0$   $T_2 = 3$   
 $T_3 = 8$   
 $T_4 = 6$   
 $\Sigma_2 = -1$   
 $\Sigma_3 = 2$   
 $T_1 = 4$   
 $T_5 = -2$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma_1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{11} = 5-0-4 = 1$     $K_{24} = 6-(-1)-6 = 1$   
 $K_{15} = 0-0-(-2) = 2$     $K_{25} = 0-(-1)-(-2) = 3$   
 $K_{21} = 4-(-1)-4 = 1$     $K_{32} = 7-2-3 = 2$   
 $K_{22} = 5-(-1)-3 = 3$     $K_{33} = 9-2-8 = -1$

22

απο	προε	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Εικονικό Νησί Ε	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	0	3000
	1000		1200	800			
Πηγή 2		4	5	7	6	0	2300
			2200	100			
Πηγή 3		6	7	9	8	0	2500
				1600	900		
Περιορισμός Ζήτησης	1000	1200	3000	1700	900		7800

$\Sigma_1 + T_1 = 5$   
 $\Sigma_1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma_1 + T_3 = 8$   
 $\Sigma_2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma_2 + T_4 = 6$   
 $\Sigma_3 + T_4 = 8$   
 $\Sigma_3 + T_5 = 0$   
 με  $\Sigma_1 = 0$   $T_1 = 5$   
 $T_2 = 3$   
 $T_3 = 8$   
 $\Sigma_2 = -1$   
 $T_4 = 7$   
 $\Sigma_3 = 1$   
 $T_5 = -1$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma_1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{14} = 6-0-7 = -1$     $K_{22} = 5-(-1)-3 = 3$   
 $K_{15} = 0-0-(-1) = 1$     $K_{25} = 0-(-1)-(-1) = 2$   
 $K_{21} = 4-(-1)-5 = 0$     $K_{31} = 6-1-5 = 0$   
 $K_{32} = 7-1-3 = 3$     $K_{33} = 9-1-8 = 0$

20

απο	προε	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Εικονικό Νησί Ε	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	0	3000
		1200		100	1700		
Πηγή 2		4	5	7	6	0	2300
			2300				
Πηγή 3		6	7	9	8	0	2500
	1000			600	900		
Περιορισμός Ζήτησης	1000	1200	3000	1700	900		7800

$\Sigma_1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma_1 + T_3 = 8$   
 $\Sigma_1 + T_4 = 6$   
 $\Sigma_2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma_3 + T_1 = 6$   
 $\Sigma_3 + T_3 = 9$   
 $\Sigma_3 + T_5 = 0$   
 με  $\Sigma_1 = 0$   $T_2 = 3$   
 $T_3 = 8$   
 $T_4 = 6$   
 $\Sigma_2 = -1$   
 $\Sigma_3 = 1$   
 $T_1 = 5$   
 $T_5 = -1$

Βέλτιστη λύση  
 Κόστος μεταφοράς = 42.100  
 Το εικονικό νησί δέχεται το πλεόνασμα παραγωγής  
 Σημαντική διαφορά κατανομών από προηγούμενη περίπτωση με ισοζύγιο παραγωγής-ζήτησης

$K_{11} = 5-0-5 = 0$     $K_{24} = 6-(-1)-6 = 1$   
 $K_{15} = 0-0-(-1) = 1$     $K_{25} = 0-(-1)-(-1) = 2$   
 $K_{21} = 4-(-1)-5 = 0$     $K_{32} = 7-1-3 = 3$   
 $K_{22} = 5-(-1)-3 = 3$     $K_{34} = 8-1-6 = 1$

23

απο	προε	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Εικονικό Νησί Ε	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	0	3000
	1000		1200	700	100		
Πηγή 2		4	5	7	6	0	2300
			2300				
Πηγή 3		6	7	9	8	0	2500
				1600	900		
Περιορισμός Ζήτησης	1000	1200	3000	1700	900		7800

$\Sigma_1 + T_1 = 5$   
 $\Sigma_1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma_1 + T_3 = 8$   
 $\Sigma_1 + T_4 = 6$   
 $\Sigma_2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma_3 + T_4 = 8$   
 $\Sigma_3 + T_5 = 0$   
 με  $\Sigma_1 = 0$   $T_1 = 5$   
 $T_2 = 3$   
 $T_3 = 8$   
 $T_4 = 6$   
 $\Sigma_2 = -1$   
 $\Sigma_3 = 2$   
 $T_5 = -2$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma_1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{15} = 0-0-(-2) = 2$     $K_{22} = 5-(-1)-3 = 3$   
 $K_{24} = 6-(-1)-6 = 1$     $K_{25} = 0-(-1)-(-2) = 3$   
 $K_{21} = 4-(-1)-5 = 0$     $K_{31} = 6-2-5 = -1$   
 $K_{32} = 7-2-3 = 2$     $K_{33} = 9-2-8 = -1$

21

απο	προε	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
Πηγή 3		6	7	9	8	2500
Περιορισμός Ζήτησης	1200	1400	3200	1900		7700 ≠ 6900

24



ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
	1000		1100			
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
		100	2200			
Πηγή 3		6	7	9	M	2500
		800		1700		
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_1 = 5$   
 $\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 + T_2 = 5$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 $\Sigma 3 + T_4 = M$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_1 = 5$   
 $T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 = 2$   
 $T_3 = 5$   
 $\Sigma 3 = 4$   
 $T_4 = M-4$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma 1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{13} = 8-0-5 = 3$        $K_{21} = 4-2-5 = -3$   
 $K_{14} = 6-0-(M-4) = -M+10$        $K_{31} = 6-4-5 = -3$   
 $K_{24} = 6-2-(M-4) = -M+8$        $K_{32} = 7-4-3 = 0$

31

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
			1200		900	
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
	1000			500	800	
Πηγή 3		6	7	9	M	2500
				2500		
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 1 + T_4 = 6$   
 $\Sigma 2 + T_1 = 4$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 2 + T_4 = 6$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_2 = 3$   
 $T_4 = 6$   
 $\Sigma 2 = 0$   
 $T_1 = 4$   
 $T_3 = 7$   
 $\Sigma 3 = 2$

Βέλτιστη λύση  
 Κόστος μεταφοράς = 43.800

$K_{13} = 8-0-7 = 1$        $K_{22} = 5-0-3 = 2$   
 $K_{11} = 5-0-4 = 1$        $K_{31} = 6-2-4 = 0$   
 $K_{34} = M-2-6 = M-8$        $K_{32} = 7-2-3 = 2$

Πολλαπλές λύσεις

34

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
	1000		1100			
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
		100	500	1700		
Πηγή 3		6	7	9	M	2500
			2500			
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_1 = 5$   
 $\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 + T_2 = 5$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 2 + T_4 = 6$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_1 = 5$   
 $T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 = 2$   
 $T_3 = 5$   
 $T_4 = 4$   
 $\Sigma 4 = 4$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma 1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{13} = 8-0-5 = 3$        $K_{21} = 4-2-5 = -3$   
 $K_{14} = 6-0-4 = 2$        $K_{31} = 6-4-5 = -3$   
 $K_{34} = M-4-4 = M-8$        $K_{32} = 7-4-3 = 0$

32

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί 1	Νησί 2	Νησί 3	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		100	120	150	125
	125		0		
Πηγή 2		120	50	140	75
		35	40		
Πηγή 3		130	110	170	25
			25		
Περιορισμός Ζήτησης		125	35	65	225

Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1  
 εδώ  $4 \neq 3+3-1 \Rightarrow$  εκφυλισμένο πρόβλημα

35

ΑΠΟ	ΠΡΟΣ	Νησί Α	Νησί Β	Νησί Γ	Νησί Δ	Περιορισμός Παραγωγής
Πηγή 1		5	3	8	6	2100
	900		1200			
Πηγή 2		4	5	7	6	2300
	100		500	1700		
Πηγή 3		6	7	9	M	2500
			2500			
Περιορισμός Ζήτησης		1000	1200	3000	1700	6900

$\Sigma 1 + T_1 = 5$   
 $\Sigma 1 + T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 + T_1 = 4$   
 $\Sigma 2 + T_3 = 7$   
 $\Sigma 2 + T_4 = 6$   
 $\Sigma 3 + T_3 = 9$   
 με  $\Sigma 1 = 0$   
 $T_1 = 5$   
 $T_2 = 3$   
 $\Sigma 2 = -1$   
 $T_3 = 8$   
 $T_4 = 7$   
 $\Sigma 3 = 1$

Για τα μη κενά  $\Sigma_i + T_k = \Psi_{ik}$  με  $\Sigma 1 = 0$   
 Για τα κενά  $K_{ik} = \Psi_{ik} - \Sigma_i - T_k$   
 Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1

$K_{13} = 8-0-8 = 0$        $K_{22} = 5-(-1)-7 = -1$   
 $K_{14} = 6-0-7 = -1$        $K_{31} = 6-1-5 = 0$   
 $K_{34} = M-1-7 = M-8$        $K_{32} = 7-1-3 = 3$

33

Έργο 1: Βιολογικός καθαρισμός  
 Έργο 2: Σύστημα ύδρευσης  
 Έργο 3: Σύστημα αποχέτευσης  
 Διαφορετική εμπειρία  $\Rightarrow$  Διαφορετικοί χρόνοι αποπεράτωσης (σε μήνες)  
 Σε ποια εταιρεία θα ανατεθεί κάθε έργο ώστε να ελαχιστοποιηθεί συνολικός χρόνος αποπεράτωσης του προγράμματος;

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Εταιρεία Α	33	45	22
Εταιρεία Β	28	32	35
Εταιρεία Γ	31	36	24

Οι συνδυασμοί εταιρεία – έργο είναι Ν!

36

απο	προς	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3	Περιορισμός Παραγωγής
Εταιρεία Α		33	45	22	1
Εταιρεία Β		28	32	35	1
Εταιρεία Γ		31	36	24	1
Περιορισμός Ανάθεσης		1	1	1	3

Δεν μπορεί να τεθεί 1 στο κελί 3-2 γιατί το κελί 1-2 θα γίνει αρνητικό. Άρα τίθεται 1 στο κελί 1-3

$K_{21} = 28 - 32 + 45 - 33 = 8$   
 $K_{32} = 36 - 45 + 33 - 31 = -7$   
 $K_{23} = 35 - 32 + 45 - 33 + 31 - 24 = 22$   
 $K_{13} = 22 - 33 + 31 - 24 = -4$

Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1  
 εδώ  $6 \neq 3 + 3 - 1 \Rightarrow$  εκφυλισμένο πρόβλημα

37

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Εταιρεία Α	11	23	0
Εταιρεία Β	0	4	7
Εταιρεία Γ	7	12	0

Διαγραμμίζουμε τον ελάχιστο αριθμό σειρών ή στηλών ώστε να καλύψουμε όλα τα 0

40

απο	προς	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3	Περιορισμός Παραγωγής
Εταιρεία Α		33	45	22	1
Εταιρεία Β		28	32	35	1
Εταιρεία Γ		31	36	24	1
Περιορισμός Ανάθεσης		1	1	1	3

Δεν μπορεί να τεθεί 1 στο κελί 3-2 γιατί το κελί 1-2 θα γίνει αρνητικό. Άρα βέλτιστη λύση

$K_{21} = 28 - 32 + 45 - 33 = 8$   
 $K_{32} = 36 - 45 + 33 - 31 = -7$   
 $K_{23} = 35 - 22 + 45 - 32 = 26$   
 $K_{33} = 24 - 22 + 33 - 31 = 4$

Συνθήκη: # μη κενών = # γραμμών + # στηλών - 1  
 εδώ  $6 \neq 3 + 3 - 1 \Rightarrow$  εκφυλισμένο πρόβλημα

38

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Εταιρεία Α	11	23	0
Εταιρεία Β	0	4	7
Εταιρεία Γ	7	12	0

Αν ο αριθμός των διαγραμμισμένων σειρών ή στηλών είναι ίσος με τον αριθμό των σειρών ή στηλών του πίνακα, τότε μπορεί να γίνει μια βέλτιστη ανάθεση

41

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Εταιρεία Α	33	45	22
Εταιρεία Β	28	32	35
Εταιρεία Γ	31	36	24

Αφαιρούμε το μικρότερο αριθμό σε κάθε σειρά από κάθε αριθμό στην ίδια σειρά

39

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Εταιρεία Α	11	19	0
Εταιρεία Β	0	0	7
Εταιρεία Γ	7	8	0

Σε κάθε στήλη που έχει μικρότερο αριθμό > 0 αφαιρούμε αυτό τον αριθμό από κάθε αριθμό στην ίδια στήλη. Αν ο αριθμός των διαγραμμισμένων σειρών ή στηλών είναι ίσος με τον αριθμό των σειρών ή στηλών του πίνακα, τότε μπορεί να γίνει μια βέλτιστη ανάθεση

42

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Εταιρεία Α	4	12	0
Εταιρεία Β	0	0	14
Εταιρεία Γ	0	1	0

Αφαιρούμε το μικρότερο αριθμό στα τετράγωνα που δεν είναι διαγραμμισμένα από κάθε άλλο αριθμό σε αυτά τα τετράγωνα. Ο αριθμός αυτός **προστίθεται** σε κάθε αριθμό που βρίσκεται σε **κάθε** τομή διαγραμμισμένων σειρών ή στηλών.

43

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Εταιρεία Α	4	12	0
Εταιρεία Β	0	0	14
Εταιρεία Γ	0	1	0

Αν ο αριθμός των διαγραμμισμένων σειρών ή στηλών είναι ίσος με τον αριθμό των σειρών ή στηλών του πίνακα, τότε μπορεί να γίνει μια βέλτιστη ανάθεση.

Μηδέν σε κάποιο τετράγωνο σημαίνει ότι η εταιρεία αναλαμβάνει το αντίστοιχο έργο

44