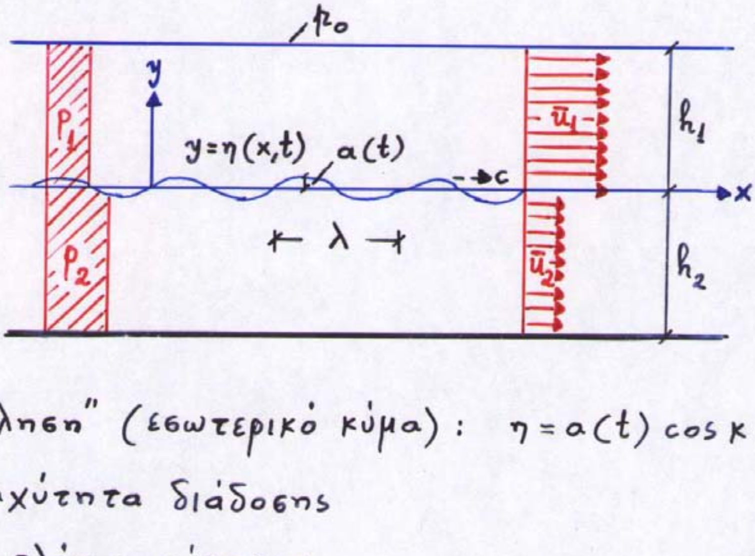
5. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

- Παραδοχή στα προηγούμενα κεφάλαια:
  Σαφής διαχωρισμός μεταξύ των δύο στρωμάτων.
- Δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.
- Αστάθεια της διεπιφάνειας κάτω από ορισμένες κρίσιμες συνθήκες ⟹ Συνεχής ανάμιξη των δύο στρωμάτων.
- Ποσοτικά κριτήρια για τις κρίσιμες συνθήκες:
  Keulegan - Jeffreys, Richardson
- Βασικές έρευνες: από τους Helmholtz και Kelvin

Αστάθεια Kelvin - Helmholtz



"Ενόχληση" (εσωτερικό κύμα): $\eta = a(t)\cos k(x-ct)$

c : ταχύτητα διάδοσης

$a(t)$: πλάτος κύματος

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: μήκος κύματος

k : αριθμός κύματος

- Όταν $a(t)$ μειώνεται με το χρόνο $\Rightarrow$ ευσταθής ενόχληση
- " " αυξάνεται " " $\Rightarrow$ ασταθής "
- " " σταθερό " " $\Rightarrow$ κρίσιμη ευστάθεια

Κρίσιμες συνθήκες ευστάθειας

$$\boxed{\frac{da}{dt}\left(2a_1\omega - a_2 k\right) = 0}$$

ω : γωνιακή συχνότητα

$$a_1 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{gk(\rho_2 - \rho_1)} \qquad a_2 = 2\,\frac{\rho_1\bar{u}_1 + \rho_2\bar{u}_2}{gk(\rho_2 - \rho_1)}$$

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \text{ή} \quad (\rho_1 + \rho_2)\omega = (\rho_1\bar{u}_1 + \rho_2\bar{u}_2)k$$

Μερικές περιπτώσεις:

$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0$

$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \omega = \bar{u}k$

Ταχύτητα των κυμάτων ενόχλησης

Κρίσιμα ευσταθές κύμα (που δημιουργήθηκε από απειροστά κύματα):

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{\rho_1 \bar{u}_1 + \rho_2 \bar{u}_2}{\rho_1 + \rho_2}}$$

Για μεγάλες τιμές kh:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\rho_1 \bar{u}_1 + \rho_2 \bar{u}_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} + \frac{T k}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}$$

T : επιφανειακή τάση (αμελητέα σε εσωτερικά κύματα)

Μερική περίπτωση: $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}$

$$c = \frac{\omega}{k} = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \cdot \frac{g}{k}} \qquad c_o = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \cdot \frac{g}{k}}$$

Μήκος των κυμάτων ενόχλησης

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \cdot \frac{g}{k} = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2$$

$$\Delta = 2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad \text{για } \rho_1 \simeq \rho_2 \Rightarrow \Delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

$$\frac{1}{2} \Delta \frac{g}{k} = \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{4} \Rightarrow c_o^2 = \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{4} \Rightarrow c_o = \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \boxed{\lambda = \pi \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{\Delta g}}$$

Σταθεροποίηση των κυμάτων

- Κύματα Kelvin-Helmholtz : απειροστά

  Προσαγωγή ενέργειας για να γίνουν ορατά ή για να μπορέσουν να υπάρχουν

- Περιορισμός των ασταθειών:
  - συνεχής κατανομή της πυκνότητας (όχι ασυνέχεια)
  - ιξώδες

- Στρώμα ανάμιξης μεταξύ των δύο ρευστών
  - πολύ λεπτό ⇒ ιξώδες ⇒ κριτήριο ευστάθειας Keulegan-Jeffreys
  - παχύ στρώμα, μικρές διαφορές ταχυτήτων ⇒ αριθμός Richardson

Κριτήριο Keulegan-Jeffreys

- Ουδέτερη ευστάθεια : $\Theta' = \frac{L}{D} = 1$

  L : ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων (προσδίδουν ενέργεια)

  D : απώλειες ενέργειας λόγω ιξώδους ανά μονάδα χρόνου

- Εάν $\Theta' < 1$ ⇒ τα κύματα μικραίνουν (υπερισχύουν οι απώλειες ενέργειας)
- Εάν $\Theta' > 1$ ⇒ τα κύματα μεγαλώνουν (υπερισχύουν οι εξωτερικές δυνάμεις)

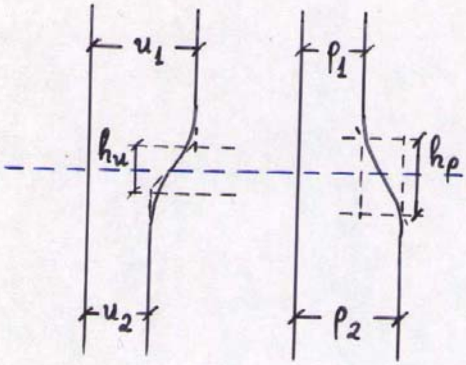
$$\boxed{\theta_c = \frac{\sqrt[3]{\Delta g \nu_2}}{\bar{u}_1} = 0.18}$$

- Το κάτω στρώμα είναι ακίνητο ($\bar{u}_2 = 0$) και έχει πολύ μεγάλο πάχος
- $\rho_1 \simeq \rho_2 \simeq \rho$ (μικρές διαφορές πυκνότητας) $\Rightarrow$

$$\Delta = 2\,\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho}$$

- ν_2 : κινηματικό ιξώδες του κάτω στρώματος
- Όταν $\theta > 0.18 \Rightarrow$ κύματα στη διεπιφάνεια $\Rightarrow$ ανάμιξη των στρωμάτων
- Όταν $\theta < 0.18 \Rightarrow$ θραύση των κυμάτων στη διεπιφάνεια $\Rightarrow$ διείσδυση του βαρύτερου ρευστού στο ελαφρύτερο $\Rightarrow$ αύξηση της πυκνότητας του άνω στρώματος

Κριτήριο Richardson



Αριθμός Richardson:

$$\boxed{Ri = \frac{\Delta g h_u}{(u_1-u_2)^2}\cdot\frac{h_u}{h_\rho} = \frac{1}{Fr_h'^2}\cdot\frac{h_u}{h_\rho}}$$

$$\Delta = 2\,\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}$$

Στη μέση γραμμή : $u = \frac{1}{2}(u_1+u_2) \qquad \rho = \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)$

$$\boxed{Ri_c = 0.25}$$

- Όταν $Ri \geqslant Ri_c \Rightarrow$ ροή ευσταθής έναντι μικρών κυμάτων στη μέση γραμμή

- Για Ri κοντά στο μηδέν ή πολύ μεγάλο $Fr_h' \Rightarrow$ κριτήριο Keulegan-Jeffreys