

ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΡΟΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
2. ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΡΟΕΣ ΧΩΡΙΣ ΤΡΙΒΕΣ
3. ΥΔΡΑΥΛΙΚΟ ΑΛΜΑ ΣΕ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΡΟΕΣ
4. ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΡΟΕΣ ΜΕ ΤΡΙΒΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
5. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΡΟΩΝ ΜΕ ΑΝΑΜΙΞΗ

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στρωματοποιημένη ροή: Ροή ρευστών με διαφορετική πυκνότητα, π.χ. γλυκό και αλμυρό νερό ή θερμό και ψυχρό ρευστό

Διεπιφάνεια: Επιφάνεια επαφής των ρευστών με διαφορετική πυκνότητα

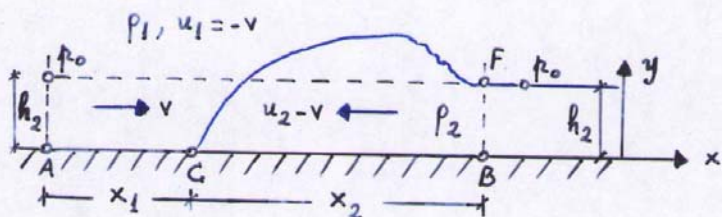
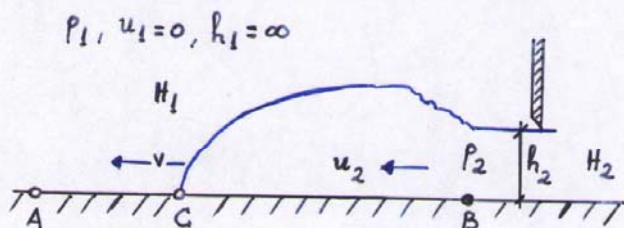
Παραδείγματα:

- Στις εκβολές ενός ποταμού στη θάλασσα, διείδωση αλμυρού νερού στον ποταμό
- Καπνοδόχοι
- Απόδοση ζεστού νερού σε ποταμούς

Υδραυλική ανοικτών αγωγών: Επιμέρους περίπτωση της υδραυλικής στρωματοποιημένων ροών (πυκνότητα του άνω στρώματος: μηδέν)

2. ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΡΟΕΣ ΧΩΡΙΣ ΤΡΙΒΕΣ

Μη μόνιμο (αεταθής) μέτωπο ψυχρού αέρα



Αρχική κατάσταση : Ζητείται η ταχύτητα v διάδοσης του μετώπου

Εξίσωση Βερνούλλι στο σημείο A :

$$H_1 = p_A + \frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 + \rho_1 g y = p_0 + \rho_1 g h_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v^2$$

Σημείο B :

$$H_2 = p_B + \frac{1}{2} \rho_2 (u_2 - v)^2 + \rho_2 g y = p_0 + \rho_2 g h_2 + \frac{1}{2} \rho_2 (u_2 - v)^2$$

Σημείο C :

$$p_C = H_1, \quad p_C = H_2$$

$$p_0 + \rho_1 g h_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v^2 = p_0 + \rho_2 g h_2 + \frac{1}{2} \rho_2 (u_2 - v)^2$$

$$\frac{1}{2} \rho_1 v^2 = \frac{1}{2} \rho_2 (u_2 - v)^2 + (\rho_2 - \rho_1) g h_2$$

$$v = \frac{u_2}{1 + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}}$$

$$\text{για } \rho_1 \approx \rho_2 \Rightarrow v = \frac{1}{2} u_2$$

Τελική κατάσταση: $v = u_2$

Εξίσωση Βερνούλλι στα σημεία Α και C:

$$p_C = p_A + \frac{1}{2} \rho_1 u_2^2$$

Σημεία Β και C:

$$p_B = p_C$$

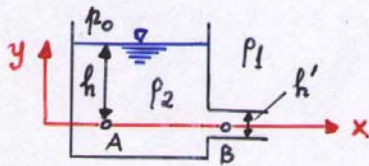
$$p_0 + \rho_2 g h_2 = p_A + \frac{1}{2} \rho_1 u_2^2$$

$$p_0 + \rho_2 g h_2 = p_0 + \rho_1 g h_2 + \frac{1}{2} \rho_1 u_2^2$$

$$u_2 = \sqrt{2} \sqrt{\kappa g h_2}$$

$$\kappa = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$$

Μειωμένη επιτάχυνση βαρύτητας (g')



- Ζητείται η ταχύτητα εκροής v

- Εξίσωση Bernoulli

$$\text{Σημείο A: } H_A = p_A + \frac{1}{2} \rho_2 u_A^2 + \rho_2 g y_A$$

$$y_A = 0 \quad u_A \approx 0$$

$$H_A = p_A = p_0 + \rho_2 g h$$

$$\text{Σημείο B: } H_B = p_B + \frac{1}{2} \rho_2 v^2 + \rho_2 g y_B$$

$$y_B = 0$$

$$H_B = p_0 + \rho_1 g \left(h - \frac{h'}{2} \right) + \rho_2 g \frac{h'}{2} + \frac{1}{2} \rho_2 v^2$$

$$H_A = H_B \Rightarrow p_0 + \rho_2 g h = p_0 + \rho_1 g \left(h - \frac{h'}{2} \right) + \rho_2 g \frac{h'}{2} + \frac{1}{2} \rho_2 v^2$$

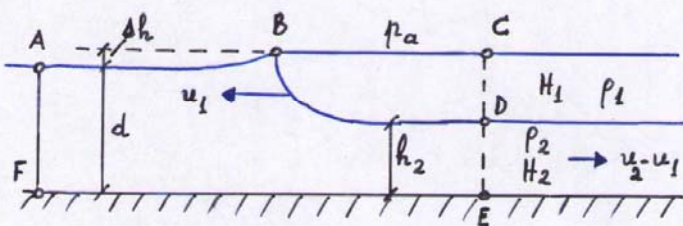
$$v = \sqrt{2g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \left(h - \frac{h'}{2} \right)} \Rightarrow v = \sqrt{2g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} h}$$

$$v = \sqrt{2g' h}$$

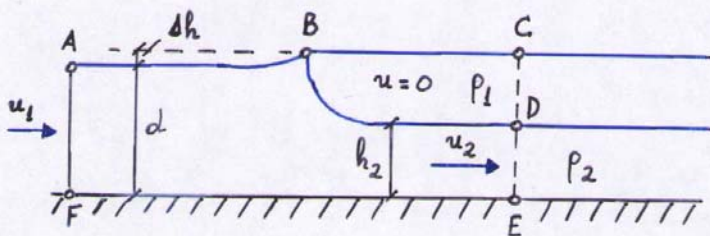
$$g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g$$

Εξομοίωση της στάθμης αλμυρού και γλυκού νερού σε μια δεξαμενή

Αρχική κατάσταση



Επαλληλία της ταχύτητας u_1



Ζητείται το πάχος του στρώματος γλυκού νερού ($d + \Delta h - h_2$) καθώς και η ταχύτητα (u_1) διελεύσεώς του.

- Άγνωστα μεγέθη : $u_1, u_2, \Delta h, h_2$
- Δεδομένα : d
- Εξίσωση συνέχειας για τον όγκο ελέγχου ABCDEF : $u_1 d = u_2 h_2$
- Εξίσωση Βερνουλλι

$$\text{Σημείο A : } H_2 = p_a + \frac{1}{2} \rho_2 u_1^2 + \rho_2 g d \quad (1)$$

$$\text{Σημείο B : } H_2 = p_a + \rho_2 g (d + \Delta h) \quad (2)$$

$$\text{Σημείο D : } H_2 = p_a + \rho_1 g (d + \Delta h - h_2) + \frac{1}{2} \rho_2 u_2^2 + \rho_2 g h_2 \quad (3)$$

$$(2) \text{ και } (3) \Rightarrow u_2^2 = 2kg(d + \Delta h - h_2)$$

$$\kappa = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2}$$

$$(1) \text{ και } (2) \Rightarrow \Delta h = \frac{u_1^2}{2g}$$

- Νόμος Διατήρησης της ορμής:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i Q_i = - \sum_{i=1}^n \int_{\Delta F_i} \rho_i \vec{n}_i dF + \vec{K}_V + \vec{K}_R$$

\vec{K}_V : Δυνάμεις όγκου (π.χ. βάρος, άνωση)

\vec{K}_R : Δυνάμεις τριβής

Κατά τον (οριζόντιο) άξονα x:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i u_i Q_i = - \sum_{i=1}^n \int_{\Delta F_i} \rho_i (\vec{n}_i \cdot \vec{i}) dF + K_x$$

\vec{i} : μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα x

K_x : συνιστώσα του \vec{K}_R κατά τον άξονα x

u_i : " " \vec{v} " " " "

Για τον όγκο ελέγχου ABCDEF:

$$\begin{aligned} -\rho_2 u_1^2 d + \rho_2 u_2^2 h_2 &= \frac{1}{2} \rho_2 g d^2 - \frac{1}{2} \rho_1 g (d + \Delta h - h_2)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} h_2 [2\rho_1 g (d + \Delta h - h_2) + \rho_2 g h_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\rho_2 u_1^2 d + \rho_2 u_2^2 h_2 &= \frac{1}{2} \rho_2 g d^2 - \frac{1}{2} \rho_1 g (d + \Delta h - h_2)^2 - \rho_1 g (d + \Delta h - h_2) h_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_2 g h_2^2 \end{aligned}$$

$$h_2 = \frac{d}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{kgd}$$

$$u_1 = \frac{u_2}{2} = 0.5 \sqrt{kgd}$$

$$\Delta h = 0.125 kd$$