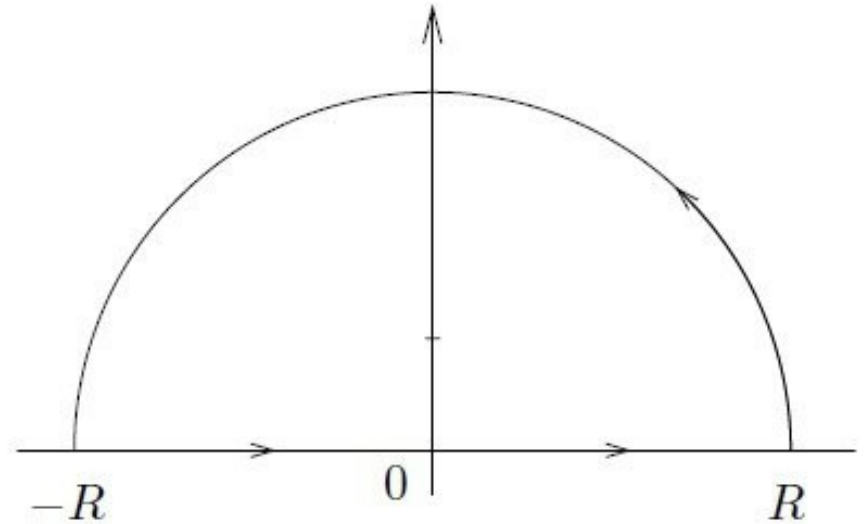


Μιγαδικές Συναρτήσεις

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$



Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θεώρημα

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m , τότε
$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Ειδικές Περιπτώσεις

$$m = 1: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$m = 2: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

$$m = 3: \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^2}{dz^2} [(z - z_0)^3 f(z)]$$

Εφαρμογές στον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων

1^η Κατηγορία

Εισαγωγική Άσκηση 1

Αν $z = e^{i\theta}$, ναδειχθεί ότι $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$$\left. \begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

1^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

Διαδικασία

Αναγνωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Επιλέγουμε ως μονοπάτι το μοναδιαίο κύκλο: $\gamma(x) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Για $z = e^{i\theta}$, είναι

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

Αντικαθιστώντας, όπου $\cos \theta$, $\sin \theta$, όπως παραπάνω, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε

$$\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \int_{\gamma} g(z) dz$$

όπου g είναι μία μιγαδική συνάρτηση και $d\theta = dz/(iz)$.

Μετά, αρκεί:

1. Να εντοπίσουμε τους πόλους στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου.
2. Να υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα σε αυτούς.
3. Να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

1^η Κατηγορία

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Λύση

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{e^{2i\theta} + 1}{2e^{i\theta}}} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1} d\theta = \frac{2}{i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1} i e^{i\theta} d\theta = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

Η μιγαδική συνάρτηση που ολοκληρώνεται έχει πόλους 1ης τάξης στα σημεία $z = -2 \pm 3^{0.5}$.

Από αυτούς, μόνο ο $-2 + 3^{0.5}$ ανήκει στο μοναδιαίο δίσκο. Άρα,

$$\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2 + \sqrt{3}) = \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Σημείωση: Εναλλακτικά, το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται με την αντικατάσταση $t = \tan(\theta/2)$, οπότε $\cos(\theta) = (1 - t^2)/(1 + t^2)$.

1^η Κατηγορία

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$z = e^{ix}$$

$$dz = i e^{ix} dx$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστούν τα $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 + 3\cos x} dx$, $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{5 + 3\cos x} dx$.

Λύση

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 + 3\cos x} dx \stackrel{z=e^{ix}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{z^2 + 1}{3z^2 + 10z + 3} \cdot \frac{1}{iz} \cdot iz dx = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(3z^2 + 10z + 3)} dz$$

$$\frac{\cos x}{5 + 3\cos x} = \frac{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}{5 + 3 \left(z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{z^2 + 1}{10z + 3z^2 + 3}$$



$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z \cdot (3z^2 + 10z + 3)}$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64, \quad z_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{6} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}$$

$$\textcircled{*} = \frac{1}{i} 2\pi i \left[\text{Res}(f, \frac{1}{3}) + \text{Res}(f, 0) \right]$$

$$\text{Res}(f, \frac{1}{3}) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} (z - \frac{1}{3}) f(z)$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z).$$

1^η Κατηγορία

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5+3\cos x)} dx.$$

Λύση

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5+3\cos x)} dx = \int_{|z|=1} \frac{1}{z[5+3(z+1/z)/2]} \frac{1}{iz} dz = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z(3z^2+10z+3)} dz$$

$$= \frac{2}{3i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z(z+1/3)(z+3)} dz = \frac{2}{3i} \left[\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \int_{|z|=1} \frac{27}{8(3z+1)} dz + \int_{|z|=1} \frac{1}{8(z+3)} dz \right]$$

$$= \frac{2}{3i} \left[2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{27}{8(3z+1)}, -\frac{1}{3}\right) + 0 \right]$$

$$= \frac{2}{3i} \left(2\pi i + 2\pi i \frac{9}{8} \right) = \frac{2}{3i} \frac{17}{8} 2\pi i = 17 \frac{\pi}{6}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2i e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 4i e^{i\theta} - 1} d\theta = 2 \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} dz \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

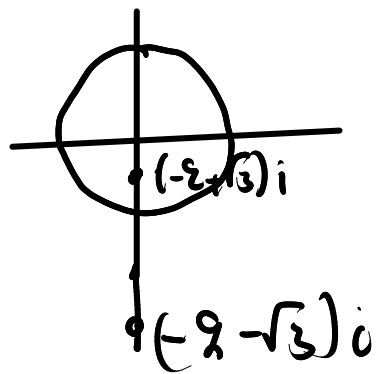
$$\frac{1}{2 + \sin \theta} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = \frac{2i}{4i + e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{2i e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 4i e^{i\theta} - 1}$$

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) (e^{i\theta})' d\theta,$$

$|z|=1 \rightarrow z(\theta) = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4iz - 1}, \quad \Delta = (4i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -16 + 4 = -12, \quad \sqrt{-12} = \pm 2\sqrt{3}i$$

$$z_{1,2} = \frac{-4i \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-4i \pm 2\sqrt{3}i}{2} = i(-2 \pm \sqrt{3})$$



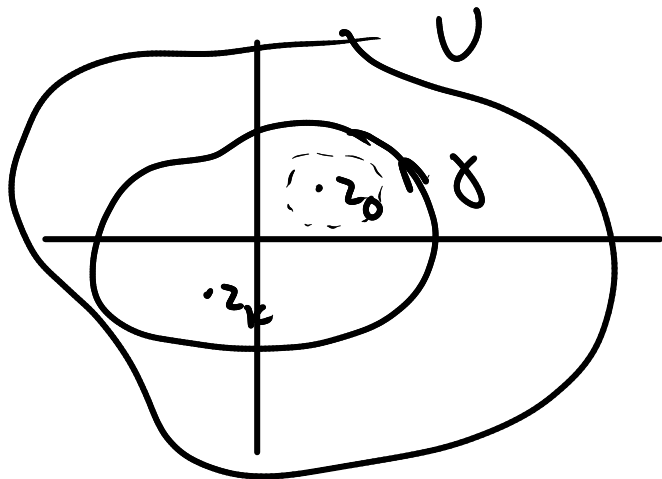
$$\textcircled{*} = 2 \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(f, (-2 + \sqrt{3})i) = \frac{2\pi}{-2 + \sqrt{3}}$$

$$\text{Res}(f, (-2 + \sqrt{3})i) = \lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} (z - (-2 + \sqrt{3})i) \cdot f(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} \frac{1}{z + (-2 + \sqrt{3})i} = \frac{1}{2 \cdot (-2 + \sqrt{3})i}$$

Θ. O. V.

$$f: U - \{z_0, z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f, z_n)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \int_C f(z) dz - 2\pi i a_{-1}$$

\downarrow
 $\text{Res}(f, z_0)$

2^η Κατηγορία: Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ είναι γενικευμένα και ως εκ τούτου υπάρχουν όταν υπάρχει το διπλό όριο

ή ισοδύναμα, όταν για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$, υπάρχουν τα ολοκληρώματα, $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$, $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$.

Με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$

το οποίο ονομάζεται **κύρια τιμή του ολοκληρώματος κατά Cauchy** και ταυτίζεται με την κανονική τιμή μόνο όταν και εκείνη συγκλίνει (ως ένα διπλό όριο).

Σημείωση

Η παρατήρηση αυτή δεν αφορά ολοκληρώματα με πεδίο ορισμού απεριόριστο μόνο από τη μία πλευρά.

2^η Κατηγορία: Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Παρατήρηση

Η κύρια τιμή κατά Cauchy ενός γενικευμένου ολοκληρώματος μπορεί να υπάρχει ακόμα και όταν το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται καλώς όπως π.χ. αν $f(x) = x$:

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = 0,$$

ενώ, για οποιοδήποτε $\gamma \in \mathbb{R}$

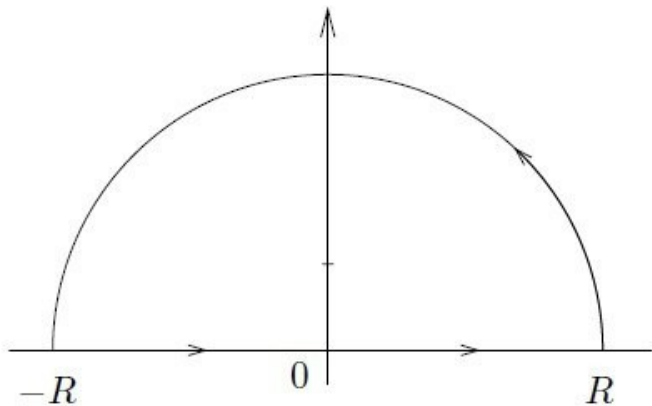
$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\gamma} x dx + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^{\beta} x dx = \infty - \infty = \text{απροσδιόριστο}$$

Στη συνέχεια, όποτε ζητείται ο υπολογισμός ενός γενικευμένου ολοκληρώματος, αυτό θα υποτίθεται ότι υπάρχει, άρα η κύρια τιμή κατά Cauchy θα μας δίνει την τιμή του.

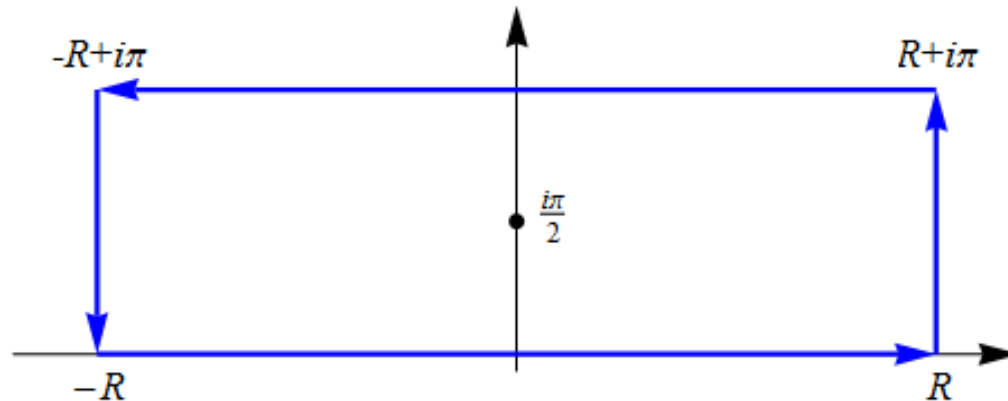
2^η Κατηγορία: Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Διαδικασία

Επιλέγουμε ως μονοπάτι μία διαδρομή που στο όριο της να αποδίδει το $(-\infty, +\infty)$. Ενδεικτικά, αυτή μπορεί να είναι ημικύκλιο με ακτίνα $R \rightarrow \infty$, ή ορθογώνιο με σταθερό πλάτος και μήκος $R \rightarrow \infty$.



Επιλέγεται στην περίπτωση όπου $\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0$,
καθώς $R \rightarrow \infty$, όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Επιλέγεται στην περίπτωση όπου το ολοκλήρωμα στην πάνω πλευρά του ορθογώνιου μπορεί ναδειχθεί ότι είναι ανάλογο με αυτό της κάτω πλευράς (το οποίο καθώς $R \rightarrow \infty$ δίνει αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε).

2^η Κατηγορία

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το

Λύση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

$$z^n = z_0$$

$$r^n e^{in\varphi} = |z_0| e^{i \arg(z_0)}$$

$$r = |z_0|^{1/n}$$

$$n \cdot \varphi = \arg(z_0) + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi + \arg(z_0)}{n}$$

Για $x \rightarrow z : f(z) = \frac{z}{1+z^4}$

$$1+z^4=0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow$$

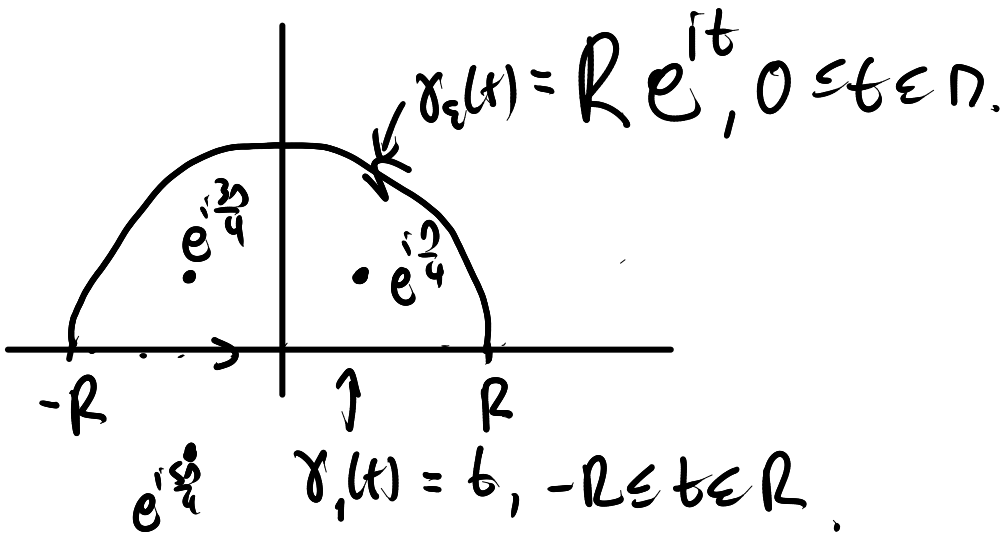
$$\Rightarrow z = e^{i \frac{2k\pi + \pi}{4}}, \quad k=0,1,2,3.$$

$$k=0: z = e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$k=2: z = e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

$$k=1: z = e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

$$k=3: z = e^{i \frac{7\pi}{4}}$$



$$\text{O.O.V.} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i [\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \text{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}})]$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) f(z) + \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) f(z) \right]$$

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{(Re^{i\theta})^2}{1+(Re^{i\theta})^4} \cdot iRe^{i\theta} d\theta = 2\pi i \left(\frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right)$$

$$\text{Für } R \rightarrow \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi i}{2} (e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{\pi i}{2} (-i\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

$$\operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) = (e^{i\frac{\pi}{4}})^2 \cdot \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{1 + z^4} = e^{i\pi} \frac{1}{4(e^{i\frac{\pi}{4}})^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\operatorname{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = (e^{i\frac{3\pi}{4}})^2 \cdot \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z - e^{i\frac{3\pi}{4}}}{1 + z^4} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{4(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\left. \begin{aligned} e^{-i\frac{\pi}{4}} &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{-i\frac{3\pi}{4}} &= \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -i\sqrt{2}$$

$$\left| \int_0^n \frac{(Re^{i\theta})^2}{1 + (Re^{i\theta})^4} iLe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^n \frac{R^3}{|1 + Re^{i\theta}|^4} d\theta \leq \int_0^n \frac{R^3}{|1 - R|^4} d\theta = \frac{R^3}{(R-1)^4} \cdot n \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

2^η Κατηγορία

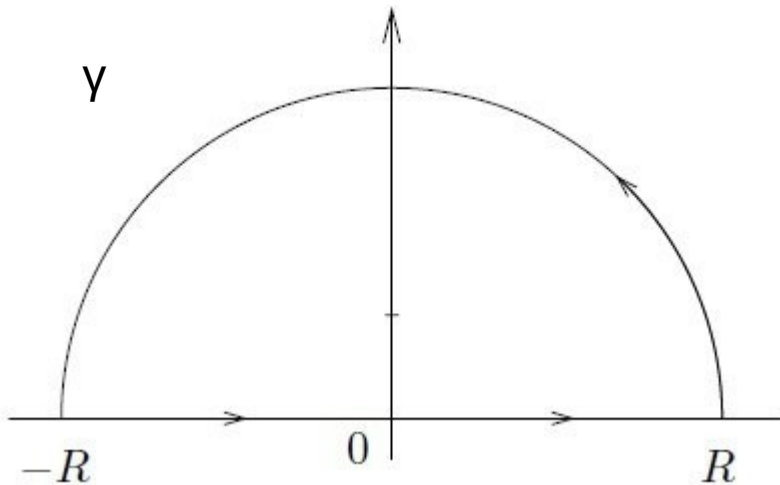
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

Λύση

Θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ η οποία έχει 4 απλούς πόλους στα σημεία

$z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, έναν σε κάθε τεταρτημόριο. Για $R > 0$, έστω γ το μονοπάτι του σχήματος.



Για R αρκετά μεγάλο, το γ περιέχει στο εσωτερικό του τους πόλους $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_1 = e^{i3\pi/4}$. Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα είναι:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} \right] = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

2^η Κατηγορία

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

Λύση

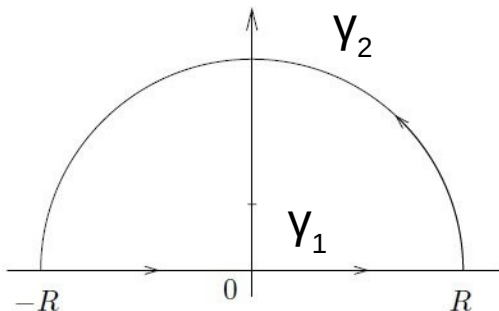
Είναι $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma_1(t) = t$, $-R \leq t \leq R$, και $\gamma_2(t) = R e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Άρα,

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{iR^3 e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt = I_1(R) + I_2(R).$$

Καθώς το $R \rightarrow \infty$, το I_1 συγκλίνει στο ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε ενώ το I_2 συγκλίνει κατά μέτρο στο 0.

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{iR^3 e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{|1+R^4 e^{4it}|} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4 - 1} dt = \pi \frac{R^3}{R^4 - 1} \rightarrow 0.$$

Συμπεραίνουμε, ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

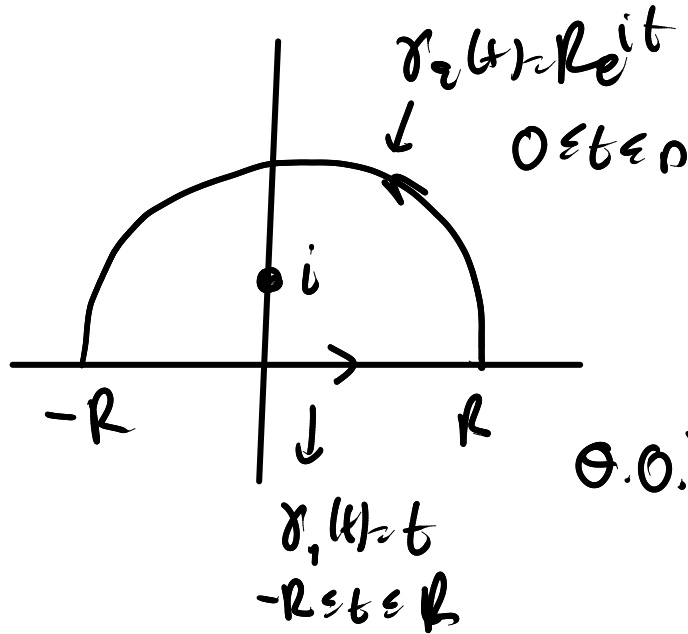


2^η Κατηγορία

Άσκηση 1

Δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Λύση



$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$x \rightarrow z : f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2} \cdot \frac{1}{(z-i)^2}$$

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$$

θ.ο.γ.

$$\int_{\gamma, \Gamma} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^n \frac{1}{(1+Re^{it})^2} i Re^{it} dt = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} [(z-i)^2 \cdot f(z)]' =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2} \cdot \frac{1}{(z-i)^2}$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} [(z-i)^2 \cdot f(z)]' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{0}{4i}$$

Γ₁ R → ∞

$$\left| \int_0^n \frac{1}{(1+Re^{it})^2} i Re^{it} dt \right| \leq \int_0^n \frac{R}{R^2-1} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

2^η Κατηγορία

Άσκηση 2

Δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση

2^η Κατηγορία

Σημείωση

Με την ίδια μεθοδολογία αντιμετωπίζονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, όπου f είναι μία άρτια συνάρτηση. Πράγματι στην περίπτωση αυτή $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Επιπλέον, η ίδια μεθοδολογία είναι εφαρμόσιμη σε κάθε ολοκλήρωμα της μορφής,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad P, Q, \text{ πολυώνυμα, με } \deg P(x) \leq \deg Q(x) - 2, \quad Q(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

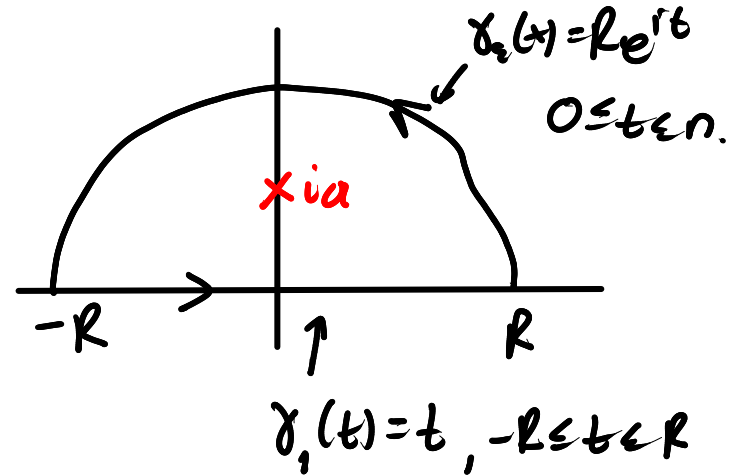
2^η Κατηγορία

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$, $a > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$$

$$z^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -a^2 \Leftrightarrow z = \pm ia$$



ia : πόλος 2^{ης} τάξης για την f .

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} dz \stackrel{\text{θ.ο.χ.}}{=} 2\pi i \cdot \text{Res}(f, ia) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} [(z - ia)^2 \cdot f(z)]' =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{-2}{(z + ia)^3} = 2\pi i \frac{-2}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}$$

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+a^2)^\varepsilon} dx + \int_0^n \frac{1}{[(Re^{it})^\varepsilon + a^2]^\varepsilon} i Re^{it} dt = \frac{n}{2a^3}$$

$$\left| \int_0^n \frac{i Re^{it}}{[(Re^{it})^\varepsilon + a^2]^\varepsilon} dt \right| \leq \int_0^n \frac{R}{| |Re^{it}|^\varepsilon - a^2 |^\varepsilon} dt \leq \int_0^n \frac{R}{(R^\varepsilon - a^2)^\varepsilon} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Apr, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^\varepsilon} dx = \frac{n}{2a^3} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^\varepsilon} dx = \frac{n}{4a^3}.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^\varepsilon} = \frac{1}{(z-ia)^\varepsilon(z+ia)^\varepsilon} \Rightarrow (z-ia)^\varepsilon \cdot f(z) = \frac{1}{(z+ia)^\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(z-ia)^\varepsilon f(z)]' = -\varepsilon(z+ia)^{-\varepsilon-1}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad \begin{array}{l} u = \arctan \frac{x}{a} \\ x = a \tan u \\ dx = \frac{a}{\cos^2 u} du \end{array} \quad \int \frac{1}{a^3 (\tan^2 u + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{\cos^2 u} du = \frac{1}{a^2} \int \cos^2 u du =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\cos 2u + 1}{2} dx = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{2} \sin 2u + u \right]$$

3^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{τριγωνομετρική}}{\text{πολυώνυμο}} dx$

Διαδικασία

Οι μιγαδικές συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες στο \mathbb{C} , άρα δεν είναι καλή επιλογή για αντικατάσταση. Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\text{πολυώνυμο}}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε “ημικυκλικό” μονοπάτι όπως αυτό της 2^{ης} κατηγορίας. Μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, αρκεί να πάρουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος του αποτελέσματος για να βρούμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

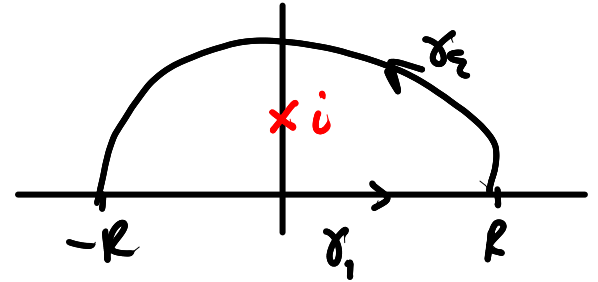
3^η Κατηγορία

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$$

~~$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$$~~



$$\int_{\delta_1 + \delta_2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z + i} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2 + 1} iRe^{it} dt = \frac{\pi}{e}$$

$$\left| \int_0^n \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2 + 1} iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^n \frac{R e^{-R \sin t}}{R^2 - 1} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$|e^{iRe^{it}}| = |e^{iR \cos t - R \sin t}| = e^{-R \sin t}$$

$$|e^x| = |\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$$

$$|e^{i^2}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix-y}| = |e^{ix}| e^{-y} = 1 \cdot e^{-y}$$

$$\text{Apun, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e} \quad \text{ka,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx = 0.$$

3^η Κατηγορία

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 9} dx$.

3^η Κατηγορία

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + 2x + 2} dx$.

3^η Κατηγορία

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+ix)^2(1-ix)} dx$, $t > 0$.

3^η Κατηγορία: Λήμμα του Jordan

Το λήμμα του Jordan είναι ένα αποτέλεσμα της μιγαδικής ανάλυσης που βοηθάει στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} g(x) dx .$$

Λήμμα του Jordan

Έστω $f(z) = e^{i\alpha z} g(z)$, συνεχής στο μονοπάτι $C_R = \{Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Τότε

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} g(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{\alpha} M_R, \quad \text{όπου } M_R = \max_{z \in C_R} |g(z)|.$$

Σημείωση

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan%27s_lemma

$$\int_0^n e^{-R \sin t} dt = \mathcal{L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \leq \mathcal{L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{t}{\pi}} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^n$$

$\sin(\pi - t) = \sin t.$

3^η Κατηγορία

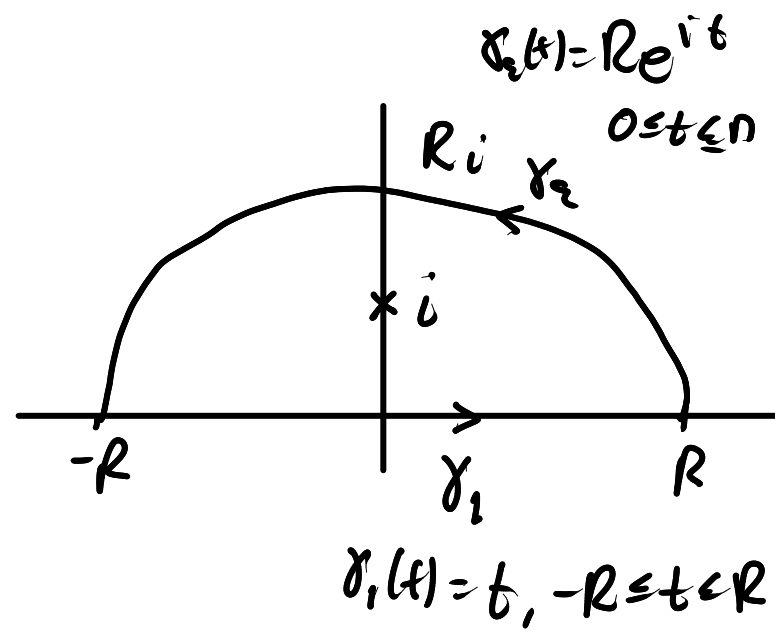
Άσκηση 6

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το λήμμα του Jordan.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$$

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1}$$



$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} dz &\stackrel{\text{o.o.y}}{=} 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} = \\
 &= 2\pi i \cdot i \cdot e^{i^2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = 2\pi i \cdot i \cdot e^{-1} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{i\pi}{e}
 \end{aligned}$$

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{\gamma_2} \frac{z}{z^2+1} e^{iz} dz = \frac{i\pi}{e} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{i\pi}{e}$$

Lemma Jordan $\left| \int_{\gamma_2} \frac{z}{z^2+1} e^{iz} dz \right| \leq \frac{n}{1} \cdot \max_{z \in \gamma_2} \left| \frac{z}{z^2+1} \right| = n \max_{t \in [0, n]} \left| \frac{R e^{it}}{R^2 e^{2it} + 1} \right|$

$$\leq n \cdot \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

$$\left| \frac{R e^{it}}{R^2 e^{2it} + 1} \right| = \frac{|R e^{it}|}{|R^2 e^{2it} + 1|} \leq \frac{R}{||R^2 e^{2it}| - 1||} = \frac{R}{R^2-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{i\pi}{e} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{i\pi}{e} \quad 0 + i\frac{\pi}{e}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} dx = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e} \end{array} \right.$$

$$e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2z = i\pi + 2k\pi i \Leftrightarrow z = i\frac{\pi}{2} + k\pi i$$

3^η Κατηγορία

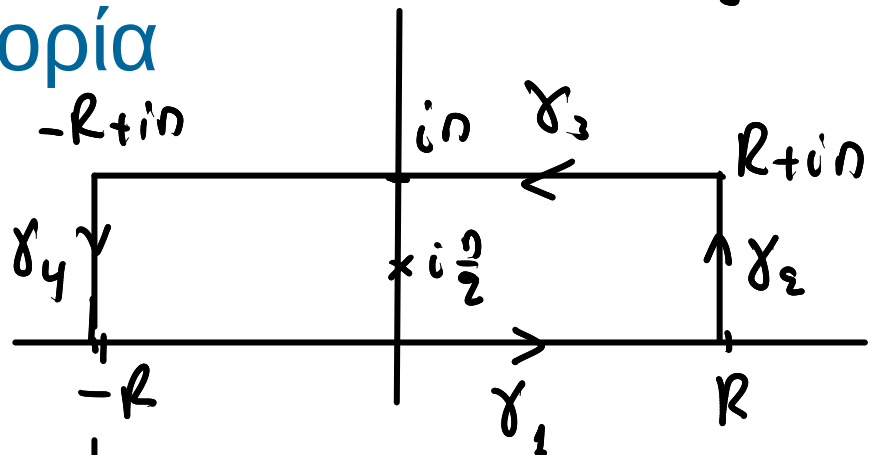
Άσκηση 7

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ορθογώνιο μονοπάτι.

Λύση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx, \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$



$$\gamma_2(t) = R + t(R + in - R) = R + int, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_4(t) = -R + in + t(-R + R - in) = -R + in - tin, \quad t \in [0, 1]$$

$$\int f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\frac{\pi}{2}) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} (z - i\frac{\pi}{2}) \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = \boxed{-R + in(1-t)}$$

$$\underbrace{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}_1 = 2\pi i \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^z - e^{-z}} = 2\pi i \cdot \frac{1}{e^{i\pi/2}} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{\pi}{e^{\pi/2}}$$

$$\text{DLH: } \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \frac{z - i\frac{\pi}{2}}{e^z + e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^z + e^{-z}(-z)'}$$

$$z_0 \rightarrow z_1 : \gamma(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0), t \in [0, 1].$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} dz = \int_0^1 \frac{e^{i(R+int)}}{e^{R+int} + e^{-R-int}} \cdot in \cdot dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \bigcirc$$

$$\text{Αντίστροφα: } \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \bigcirc.$$

$$-R \longrightarrow R : \gamma_1(t) = -R + t(R - (-R)) = (2t-1)R, t \in [0,1]$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{i^2 z}}{e^z + e^{-z}} dz = \int_0^1 \frac{e^{i(2t-1)R}}{e^{(2t-1)R} + e^{-(2t-1)R}} \cdot 2R dt$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{i^2 z}}{e^z + e^{-z}} dz = \int_0^1 \frac{e^{i\gamma_3(t)}}{e^{\gamma_3(t)} + e^{-\gamma_3(t)}} \cdot \gamma_3'(t) dt = e^{-n} \int_0^1 \frac{e^{i(1-2t)R}}{e^{(1-2t)R} + e^{-(1-2t)R}} \cdot 2R dt$$

$$\gamma_3'(t) = -2R$$

$$R+in \longrightarrow -R+in : \gamma_3(t) = R+in + t(-R+in - R-in) = (1-2t)R+in, t \in [0,1]$$

$$e^{i\gamma_3(t)} = e^{i[(1-2t)R+in]} = e^{i(1-2t)R} e^{-n} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \gamma_3(t) = (1-2t)R + in \\ e^{-\gamma_3(t)} = -e^{-(1-2t)R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} in \\ -e \end{array}$$

Τελικά:

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} dz + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \frac{n}{e^{n/2}}$$

Για $R \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} + 0 + e^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} + 0 = \frac{n}{e^{n/2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} = \frac{n}{e^{n/2}(1+e^{-n})} = \frac{n}{e^{n/2} + e^{-n/2}}$$

$$\int_0^1 \frac{e^{i(1-t)R}}{e^{(1-t)R} + e^{-i(1-t)R}} \mathcal{R} dt \quad \begin{matrix} dt = -ds \\ t = 1-s \end{matrix} \quad \int_1^0 \frac{e^{i(s-1)R}}{e^{(s-1)R} + e^{-(s-1)R}} \mathcal{R} (-ds)$$

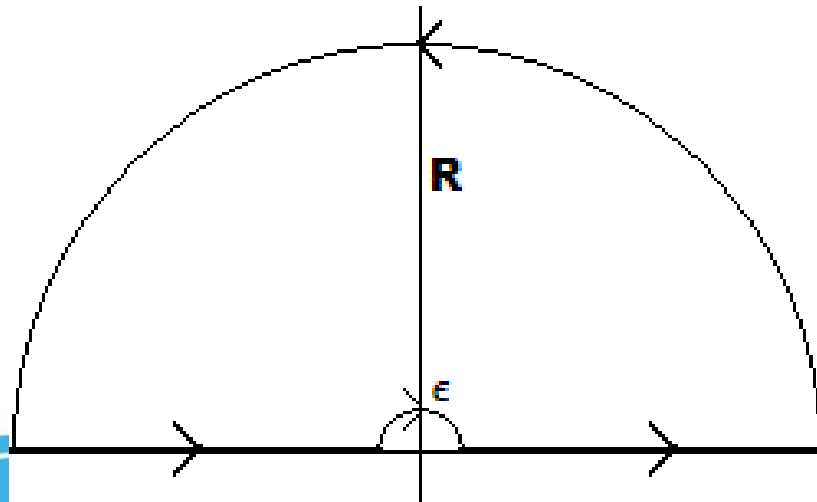
$$= \int_0^1 \frac{e^{i(s-1)R}}{e^{(s-1)R} + e^{-(s-1)R}} \mathcal{R} ds$$

4^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{τριγωνομετρική}}{\text{πολυώνυμο}} dx$, με πόλο πάνω στην πραγματική ευθεία.

Διαδικασία

Στην περίπτωση αυτή πρέπει το μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε να αποφεύγει την ανωμαλία της συνάρτησης. Ο απλούστερος τρόπος για να συμβεί αυτό είναι να γίνει μία ημικυκλική παράκαμψη γύρω από το προβληματικό σημείο. Στο ημικύκλιο που παρακάμπτεται την ανωμαλία θα γίνει ξεχωριστός υπολογισμός και θα υπολογιστεί η τιμή της με καταφυγή στο όριο καθώς $\epsilon \rightarrow 0$.



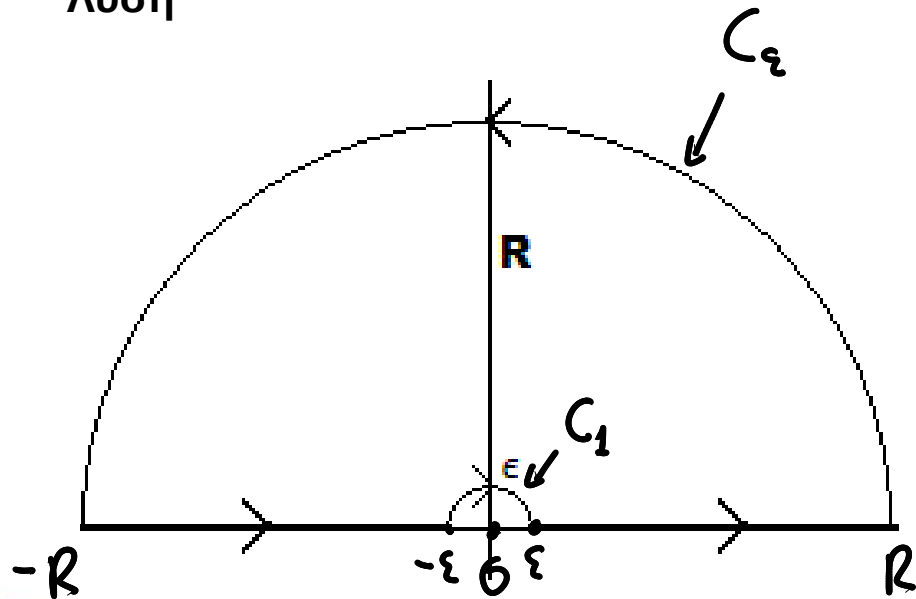
4^η Κατηγορία

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz \stackrel{\text{O.C.}}{\Rightarrow} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{C_1} + \int_{\epsilon}^R + \int_{C_2} f(z) dz = 0. (1)$$

$$C_1: \gamma_1(t) = \varepsilon \cdot e^{i(n-t)}, \quad 0 \leq t \leq n, \quad \gamma_1'(t) = -i \cdot \varepsilon \cdot e^{i(n-t)}$$

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_0^n \frac{e^{i \cdot \varepsilon \cdot e^{i(n-t)}}}{\varepsilon \cdot e^{i(n-t)}} \cdot (-i \cdot \varepsilon \cdot e^{i(n-t)}) dt = i \int_0^n e^{i \cdot \varepsilon \cdot e^{i(n-t)}} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -in$$

$$C_2: \gamma_2(t) = R \cdot e^{it}, \quad 0 \leq t \leq n, \quad \gamma_2'(t) = iR e^{it}$$

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^n \frac{e^{iR e^{it}}}{R e^{it}} \cdot iR e^{it} dt = i \int_0^n e^{iR \cos t} - e^{-R \sin t} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$R e^{it} = R \cos t + iR \sin t \Rightarrow iR e^{it} = iR \cos t - R \sin t$$

Από (1) για $\varepsilon \rightarrow 0^+$ και $R \rightarrow +\infty$, είναι

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = +i\pi \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = i\pi$$

$$\Rightarrow \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \right.$$

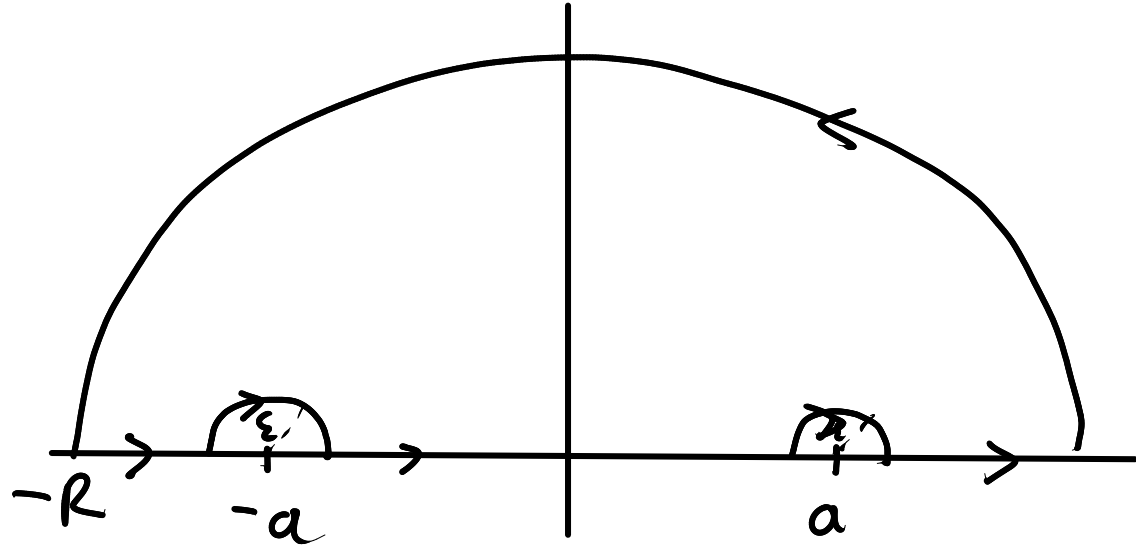
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4^η Κατηγορία

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - a^2} dx$.

Λύση



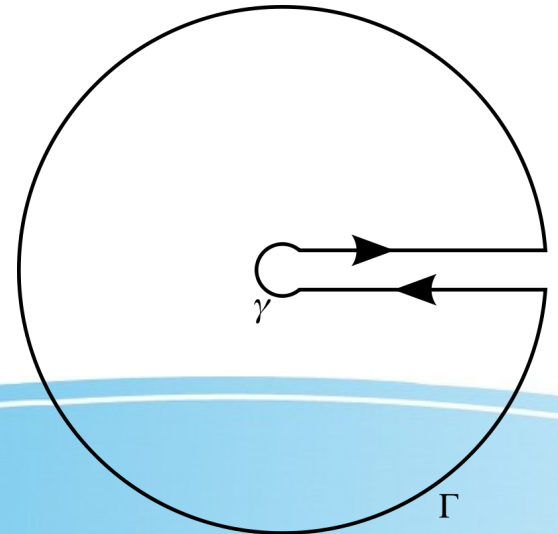
5^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα που περιέχουν λογάριθμο ή ορίζονται με τη βοήθεια λογαρίθμου όπως οι ρίζες.

Διαδικασία

Επιλέγουμε μία τομή διακλάδωσης έτσι ώστε να ορίζεται καλώς η συνάρτηση εκεί. Επίσης, η τομή πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε, στο όριο, να προκύπτει το ολοκλήρωμα που μας απασχολεί. Ιδιαίτερα, δεν είναι υποχρεωτικό να είναι η $(-\infty, 0]$, μπορεί να είναι η $[0, +\infty)$.

Συνήθως, σε αυτές τις περιπτώσεις το μονοπάτι ολοκλήρωσης, έχει τη μορφή κλειδαριάς, όπως στο σχήμα.

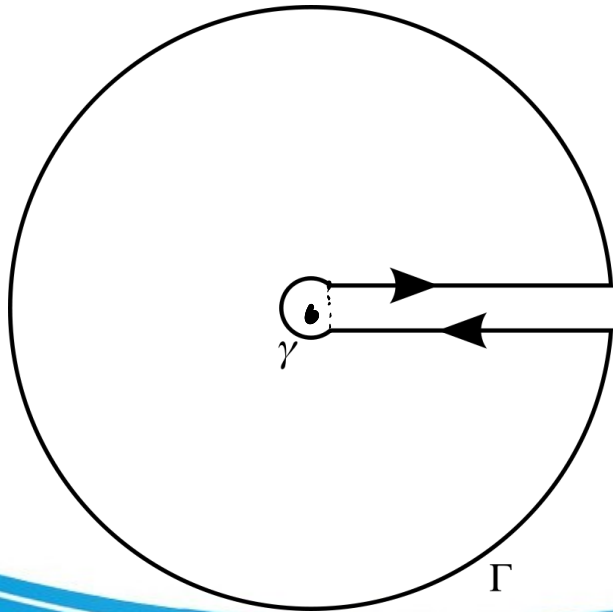


5^η Κατηγορία

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx$$



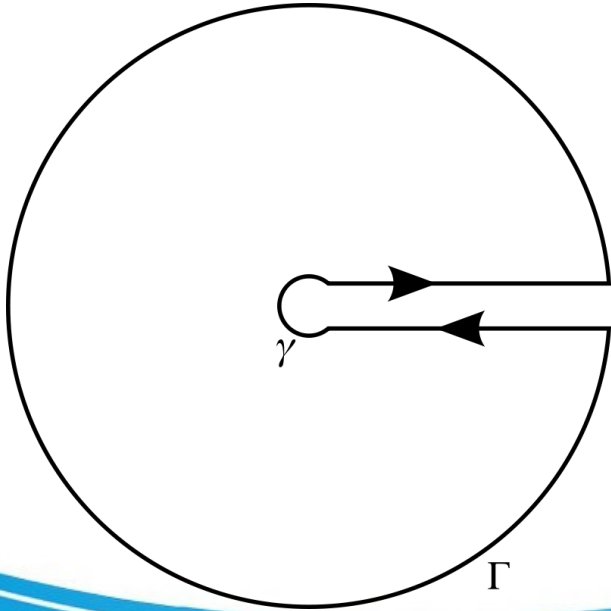
$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8}$$

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{i}{2} \ln z}$$

5^η Κατηγορία

Άσκηση 2

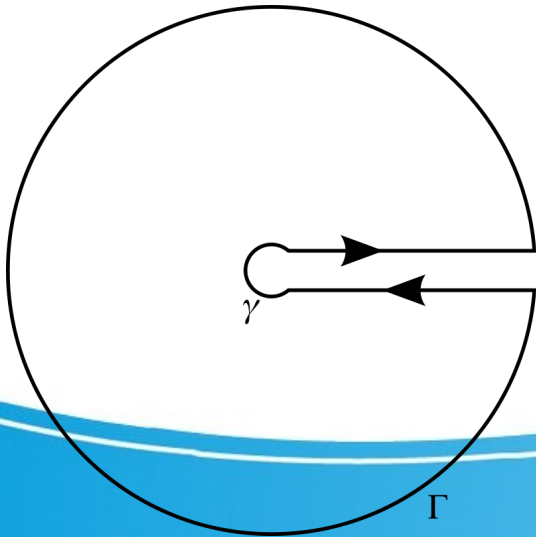
Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} dx$.



5^η Κατηγορία

Άσκηση 3

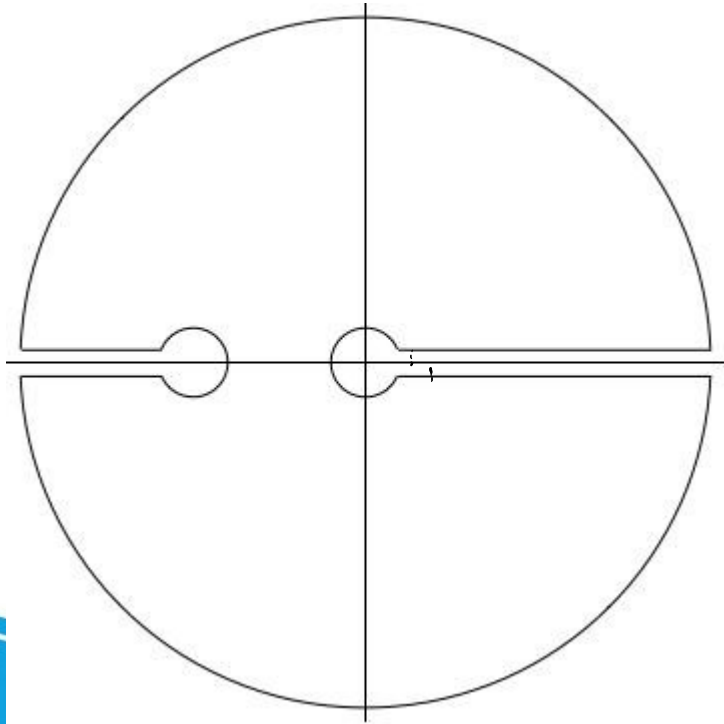
Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{3/4}(x+1)} dx$.



5^η Κατηγορία

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x \ln(1+x)}{x^2+1} dx$.



ln z

