Μιγαδικές Συναρτήσεις

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Έστω $U \subseteq C$ και $f : U \to C$. Έστω επίσης $L \subset U$ μία καμπύλη πεπερασμένου μήκους, παραμετρικοποιημένη από τη συνάρτηση γ(t) = x(t) + i y(t), t ϵ [α, β].

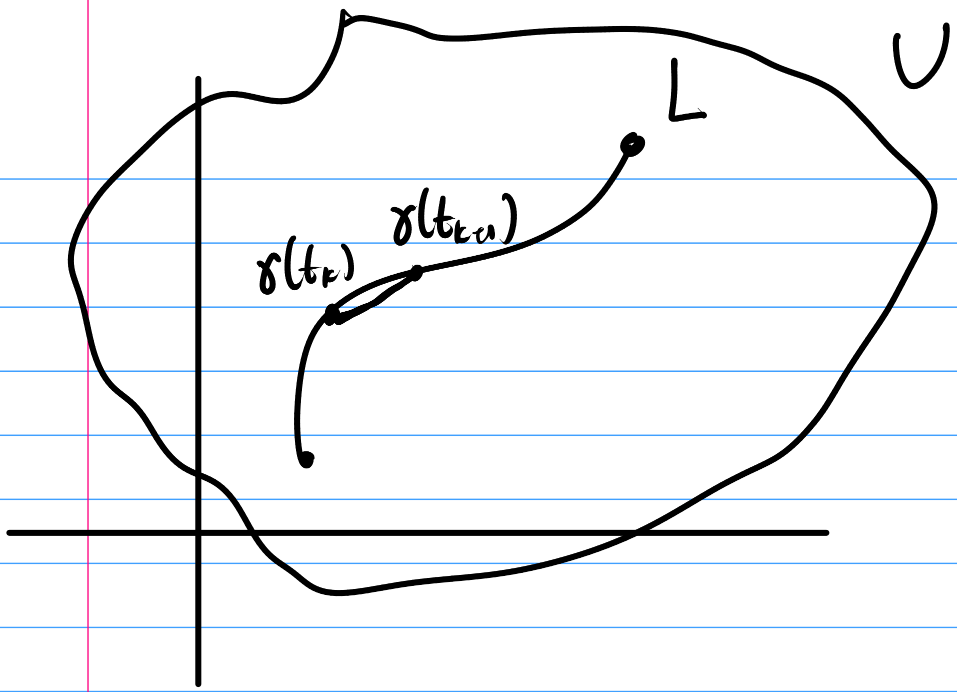
Αν $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ είναι μία διαμέριση του [α, β], και

$$\Delta\gamma(t_k) = \gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)$$

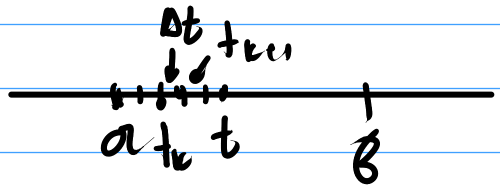
Τότε, ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στην καμπύλη L, ορίζουμε την ποσότητα:

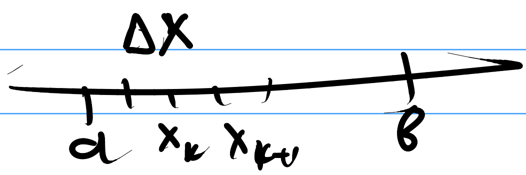
$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_k))\cdot\Delta\gamma(t_k)$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει και είναι μιγαδικός αριθμός.



$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x$$

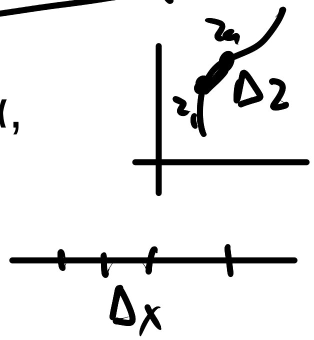
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Ο υπολογισμός επικαμπυλίου ολοκληρώματος με χρήση του ορισμού δεν είναι εύκολος.

Στην περίπτωση όπου η παραμετροποίηση $\gamma: [\alpha, \beta] \to L$, με $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, (ισοδύναμα η καμπύλη να είναι λεία) τότε

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_k))\Delta\gamma(t_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_k))\frac{\Delta\gamma(t_k)}{\Delta t}\Delta t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Το διαφορικό dz είναι η οριακή έκφραση του $\Delta\gamma(t_k) = \Delta x(t_k) + i\Delta y(t_k)$. Άρα,



$$dz = dx + idy.$$

Επιπλέον, φανερά: $\int_\gamma (\alpha f(z) + bg(z))dz = \alpha\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz$

Ανεξαρτησία επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την παραμετροποίηση του μονοπατιού

Θεώρημα (ανεξαρτησία από παραμετροποίηση)

Έστω γ: [α, β] → C, ένα μονοπάτι και ω: [κ, λ] → [α, β] μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε ω(κ) = α και ω(λ) = β. Τότε

$$\int_{\gamma\circ\omega} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz,$$

για κάθε συνάρτηση f συνεχής στο γ([α, β]).

$\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$\omega(t) = t^2, 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$

$\gamma\circ\omega = e^{it^2}, 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$

Απόδειξη

Είναι γ ∘ ψ: [κ, λ] → C και

$$\int_{\gamma\circ\omega} f(z)dz = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma\circ\omega(t))(\gamma\circ\omega)'(t)dt = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t)))\gamma'(\omega(t))\omega'(t)dt$$

$$= \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t)))\gamma'(\omega(t))d\omega(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Ανεξαρτησία επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την παραμετροποίηση του μονοπατιού

Παρατηρήσεις

1. Η συνθήκη $\omega(\gamma) = \alpha$ και $\omega(\delta) = \beta$ διασφαλίζει ότι οι γ και $\gamma \circ \psi$ αποτελούν δύο παραμετροποιήσεις που διατρέχουν την ίδια καμπύλη **με την ίδια φορά.**

2. Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε μονοπάτι περιγράφεται πλήρως από τις εξής τρεις πληροφορίες:
(α) Το ίχνος του ως ένα γεωμετρικό σχήμα,
(β) Τη φορά με την οποία διαγράφεται.
(γ) Το πλήθος των περιστροφών που κάνει (αν είναι κλειστό μονοπάτι).

Πράξεις με μονοπάτια 1/3

Ελεύθερη επιλογή πεδίου ορισμού

Το θεώρημα ανεξαρτησίας παραμετροποίησης επιτρέπει να θεωρούμε ως διάστημα ορισμού της παραμετροποίησης ενός μονοπατιού όποιο διάστημα [κ, λ] επιθυμούμε. Πράγματι, αν γ: [α, β] → C, ένα μονοπάτι, ορίζοντας τη συνάρτηση ω: [κ, λ] → [α, β], με

$$\omega(t) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\lambda - \kappa}(t - \kappa),$$

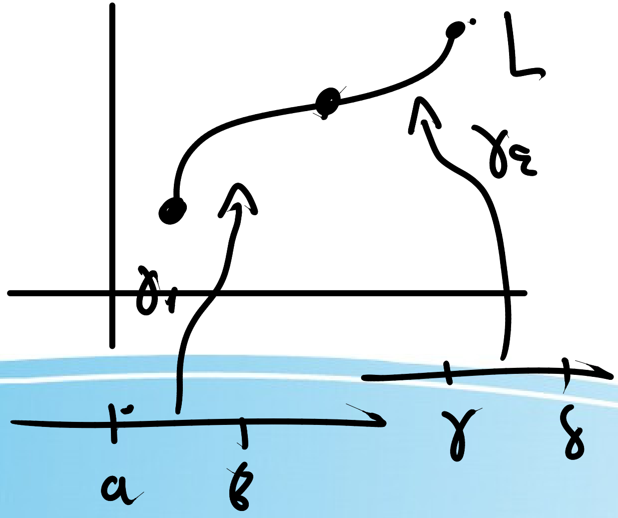
τότε ω(κ) = α, ω(λ) = β, και η $\gamma \circ \omega$: [κ, λ] → C, είναι μία παραμετροποίηση του ίδιου μονοπατιού (που αποδίδει το ίδιο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για κάθε συνεχή συνάρτηση που ολοκληρώνεται).

Πράξεις με μονοπάτια 2/3

Πρόσθεση μονοπατιών

Αν γ_1: [a, b] → C, γ_2: [c, d] → C, είναι δύο διαδοχικά μονοπάτια ($\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$), τότε μπορεί να οριστεί το $\gamma_1 + \gamma_2$ ως ένα νέο μονοπάτι με κοινή παραμετροποίηση επιλέγοντας για το γ_2, μία νέα παραμετροποίηση της μορφής γ_2: [b, k] → C, για κάποιο κατάλληλο k є R. Ορίζουμε γ: [a, k] → C, ως εξής:

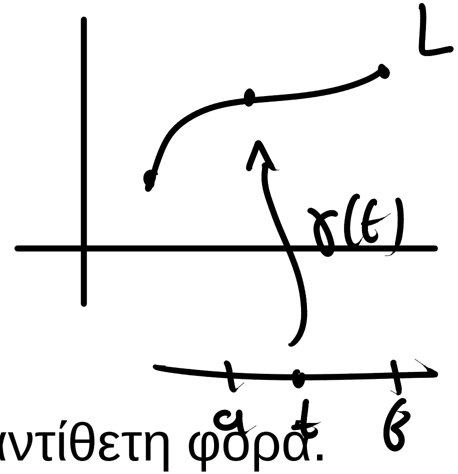
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, k] \end{cases}$$



Φανερά, η γ περιγράφει την $\gamma_1 + \gamma_2$ στο επίπεδο.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Πράξεις με μονοπάτια 3/3



Αντίθετο μονοπάτι

Αν γ: [α, β] → C, τότε το μονοπάτι -γ: [β, α] → C, με

$$-\gamma(t) = \gamma(\alpha + \beta - t),$$

διατρέχει τα ίδια σημεία του μιγαδικού επιπέδου, αλλά με την αντίθετη φορά.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{\beta} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

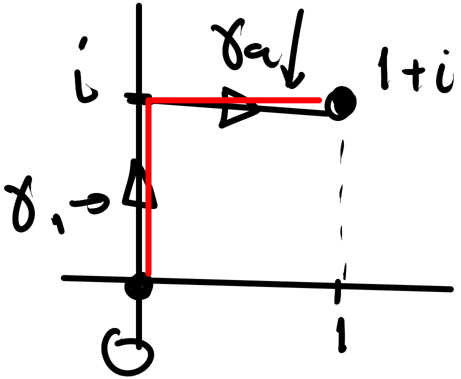
$(i+t)^2 = i^2 + 2it + t^2 = t^2 - 1 + 2it$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f(z) = z² πάνω στο μονοπάτι γ που συνδέει το 0 με το i και το i με το 1 + i (με αυτήν την σειρά).

Λύση



$\gamma_1(t) = t \cdot i, \quad 0 \le t \le 1. \quad \gamma_2(t) = i + t(1+i-i) = i+t, \quad 0 \le t \le 1.$

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz = \int_0^1 (t\cdot i)^2 \cdot i \, dt + \int_0^1 (i+t)^2 \cdot dt =$$

$$= i \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{t^3}{3} - t + it^2 \Big|_0^1 = -\frac{i}{3} - \frac{2}{3} + i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i.$$

$z_1 \to z_2 : \quad \gamma(t) = z_1 + t\cdot(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1]$

άλυτη

$-1+t+\cancel{ti}+i-\cancel{ti}+t = 2t-1+i$

$\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f(z) = z* πάνω στο μονοπάτι γ που διατρέχει το τρίγωνο με κορυφές 0, 1, i με τη θετική φορά.

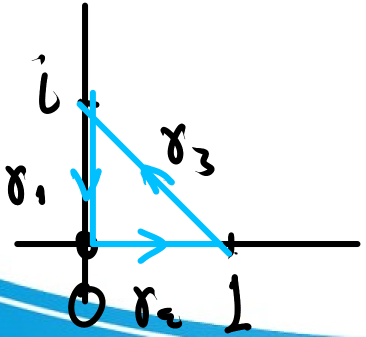
Λύση

$f(z) = \bar{z}$

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{\gamma_1(t)}\cdot\gamma_1'(t)\,dt + \int_0^1 \overline{\gamma_2(t)}\cdot\gamma_2'(t)\,dt + \int_0^1 \overline{\gamma_3(t)}\cdot\gamma_3'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 -i(1-t)\cdot(-i)\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1-t-ti)\cdot(-1+i)\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2}-t\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + t^2-t+it\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+1-1+i = \underline{i}.$$



$\gamma_1(t) = i+t(0-i) = i(1-t)$, $\gamma_2(t) = t$, $\gamma_3(t) = 1+t(i-1) = 1-t+ti$

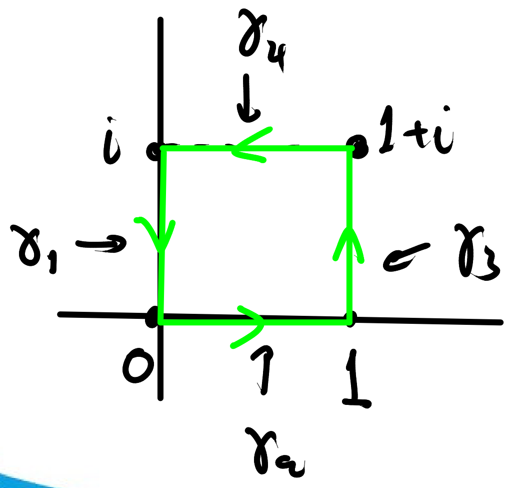
άλυτη

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f(z) = z, πάνω στο μονοπάτι γ που διατρέχει το τετράγωνο με κορυφές 0, 1, 1 + i, i με τη θετική φορά.

Λύση



$$\int_\gamma z\,dz = \int_0^1 i\cdot(1-t)\cdot(-i)\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1+it)\cdot i\,dt - \int_0^1 (1-t+i)\,dt$$

$$= t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + it - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - t + \frac{t^2}{2} - it\Big|_0^1 = 0.$$

$\gamma_1(t) = i + t(0-i) = i(1-t)$, $\gamma_2(t) = t$, $\gamma_3(t) = 1 + t(1+i-1) = 1+ti$, $\gamma_4(t) = 1+i-t$

άλυτη

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθεί το $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt$ για κάθε n є Z.

Λύση

$$\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(nt) + i\sin(nt)\,dt \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_0^{2\pi} - \frac{i}{n}\cos(nt)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sin(2\pi n) - \sin 0\right) - \frac{i}{n}\left(\cos(2\pi n) - \cos 0\right) = 0.$$

$$n = 0: \int_0^{2\pi} e^{0}\,dt = 2\pi.$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Δείξτε ότι $\int_\gamma P(z)dz = 0$, για κάθε πολυώνυμο P(z), όπου γ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

$\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$

Λύση

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0$

$$\int_\gamma P(z)dz = \int_0^{2\pi} \left(a_n \cdot e^{int} + a_{n-1} \cdot e^{i(n-1)t} + \dots + a_1 \cdot e^{it} + a_0\right) \cdot i e^{it} dt = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} P(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

άλυτη

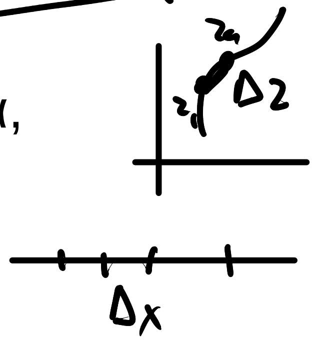
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Ο υπολογισμός επικαμπυλίου ολοκληρώματος με χρήση του ορισμού δεν είναι εύκολος.

Στην περίπτωση όπου η παραμετροποίηση γ: [α, β] → L, με γ(t) = x(t) + i y(t) είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, (ισοδύναμα η καμπύλη να είναι λεία) τότε

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_k))\Delta\gamma(t_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_k))\frac{\Delta\gamma(t_k)}{\Delta t}\Delta t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Το διαφορικό dz είναι η οριακή έκφραση του $\Delta\gamma(t_k) = \Delta x(t_k) + i\Delta y(t_k)$. Άρα,



$$dz = dx + idy.$$

Επιπλέον, φανερά: $\int_\gamma (\alpha f(z) + bg(z))dz = \alpha\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Έστω $U \subseteq C$ και $f : U \to C$. Έστω επίσης $L \subset U$ μία καμπύλη πεπερασμένου μήκους, παραμετρικοποιημένη από τη συνάρτηση $γ(t) = x(t) + i\, y(t)$, $t \in [α, β]$.

Αν $α = t_0 < t_1 < \dots < t_n = β$ είναι μία διαμέριση του $[α, β]$, και

$$Δγ(t_k) = γ(t_{k+1}) - γ(t_k)$$

Τότε, ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στην καμπύλη L, ορίζουμε την ποσότητα:

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(γ(t_k))\,Δγ(t_k)$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει και είναι μιγαδικός αριθμός.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Ο υπολογισμός επικαμπυλίου ολοκληρώματος με χρήση του ορισμού δεν είναι εύκολος.

Στην περίπτωση όπου η παραμετροποίηση γ: [α, β] → L, με γ(t) = x(t) + i y(t) είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, (ισοδύναμα η καμπύλη να είναι λεία) τότε

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_k))\Delta\gamma(t_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_k))\frac{\Delta\gamma(t_k)}{\Delta t}\Delta t = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Το διαφορικό dz είναι η οριακή έκφραση του $\Delta\gamma(t_k) = \Delta x(t_k) + i\Delta y(t_k)$. Άρα,

$$dz = dx + idy.$$

Επιπλέον, φανερά: $\int_\gamma (\alpha f(z) + bg(z))dz = \alpha\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Ορισμός
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο U. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο ~~Δ~~ U ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο U και ισχύει $F'(z) = f(z)$.

Σημείωση
Στη μιγαδική ανάλυση, (αποδεικνύεται ότι) αν μια συνάρτηση έχει παράγουσα, τότε πρέπει να είναι και η ίδια ολόμορφη.

Στην πραγματική ανάλυση μία συνάρτηση μπορεί να μην είναι συνεχής παντού αλλά να έχει παράγουσα (π.χ. $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$).

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Η έννοια της παράγουσας (πραγματική vs μιγαδική ανάλυση)		
	f: R → R	**f: C → C**
Ορισμός	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο U. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο U ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο U και ισχύει $F'(z) = f(z)$
Πεδίο ορισμού	Ανοικτό ή κλειστό διάστημα.	Ανοικτό υποσύνολο του C
Συνέχεια f	Όχι απαραίτητα	Ναι
Παραγωγίσιμη f	Όχι απαραίτητα	Ναι (άπειρες φορές)
Μπορούμε να έχουμε σημεία όπου η παράγωγος δεν υπάρχει	Ναι. Η παράγουσα ορίζεται πάντα ως $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ (π.χ. $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$)	Όχι. Αν υπάρχει τέτοιο σημείο, τότε το $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ εξαρτάται από το μονοπάτι.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Αν U ανοικτό, f : U → C και F: U → C παράγουσα της f (F’(z) = f(z), z є U), τότε

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta [F(\gamma(t))]'dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$$

Παράδειγμα

Αν L είναι οποιαδήποτε γραμμή μεταξύ του 1 και του 2 + i, τότε

$$\int_L z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Αν L οποιαδήποτε γραμμή που συνδέει τα σημεία 1 και i, να βρεθεί το $\int_L ze^{z^2}dz$

$$\int_L z\cdot e^{z^2}dz = F(i)-F(1) = \frac{1}{2}e^{i^2}-\frac{1}{2}e^{1^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right)$$

$$f(z)=ze^{z^2} \Rightarrow F(z)=\frac{1}{2}e^{z^2}$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

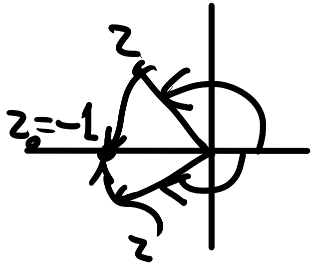
Αν L είναι οποιαδήποτε γραμμή μεταξύ του 1 και του i, στο σύνολό της μέσα στο C^* - (-∞, 0] να βρεθεί το $\int_L \frac{1}{z} dz$, $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i \cdot \mathrm{Arg}(z)$

$$-\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi .$$

$$F(z) = \frac{1}{z}$$

$$\mathrm{Log}(i) = \ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i) = i\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Log}(1) = \ln|1| + i\,\mathrm{Arg}(1) = 0$$



$$F(z) = \mathrm{Log}(z) \Rightarrow \int_L \frac{1}{z} dz = \mathrm{Log}(i) - \mathrm{Log}(1) = i\frac{\pi}{2} .$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Παράδειγμα

Η f(z) = 1/z δεν έχει μοναδική παράγουσα. Αν L το μέρος του μοναδιαίου κύκλου μεταξύ του 1 και του i, με θετική φορά, τότε μία παράγουσα της 1/z σε ανοικτό σύνολο που περιέχει την καμπύλη είναι η

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z),\ -\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi, \text{ και:}$$

$$\int_L \frac{1}{z}dz = \left[\mathrm{Log}(z)\right]_{z=1}^{z=i} = \mathrm{Log}(1) - \mathrm{Log}(i) = -i\frac{\pi}{2}.$$

Αν L το μέρος του μοναδιαίου κύκλου μεταξύ του 1 και του i, με αρνητική φορά, τότε μία παράγουσα της 1/z σε ανοικτό σύνολο που περιέχει την καμπύλη είναι η

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z),\ \ \pi/2 < \mathrm{Arg}(z) < 5\pi/2 \text{ και:}$$

$$\int_L \frac{1}{z}dz = \left[\mathrm{Log}(z)\right]_{z=1}^{z=i} = \mathrm{Log}(1) - \mathrm{Log}(i) = i\frac{5\pi}{2}.$$

Ανεξαρτησία επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την παραμετροποίηση του μονοπατιού

Θεώρημα (ανεξαρτησία από παραμετροποίηση)
Έστω γ: [α, β] → C, ένα μονοπάτι και ω: [κ, λ] → [α, β] μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε ω(κ) = α και ω(λ) = β. Τότε

$$\int_{\gamma\circ\omega} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz,$$

$\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$

$\omega(t) = t^2, 0 \le t \le \sqrt{2\pi}$

$\gamma\circ\omega = e^{it^2}, 0 \le t \le \sqrt{2\pi}$

για κάθε συνάρτηση f συνεχής στο γ([α, β]).
Απόδειξη
Είναι γ ∘ ψ: [κ, λ] → C και

$$\int_{\gamma\circ\omega} f(z)dz = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma\circ\omega(t))(\gamma\circ\omega)'(t)dt = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t)))\gamma'(\omega(t))\omega'(t)dt$$

$$= \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t)))\gamma'(\omega(t))d\omega(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Ανεξαρτησία επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την παραμετροποίηση του μονοπατιού

Παρατηρήσεις

1. Η συνθήκη $\omega(\gamma) = \alpha$ και $\omega(\delta) = \beta$ διασφαλίζει ότι οι γ και $\gamma \circ \psi$ αποτελούν δύο παραμετροποιήσεις που διατρέχουν την ίδια καμπύλη **με την ίδια φορά.**

2. Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε μονοπάτι περιγράφεται πλήρως από τις εξής τρεις πληροφορίες:
(α) Το ίχνος του ως ένα γεωμετρικό σχήμα,
(β) Τη φορά με την οποία διαγράφεται.
(γ) Το πλήθος των περιστροφών που κάνει (αν είναι κλειστό μονοπάτι).

Πράξεις με μονοπάτια 1/3

Ελεύθερη επιλογή πεδίου ορισμού

Το θεώρημα ανεξαρτησίας παραμετροποίησης επιτρέπει να θεωρούμε ως διάστημα ορισμού της παραμετροποίησης ενός μονοπατιού όποιο διάστημα [κ, λ] επιθυμούμε. Πράγματι, αν $\gamma: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, ένα μονοπάτι, ορίζοντας τη συνάρτηση $\omega: [\kappa, \lambda] \to [\alpha, \beta]$, με

$$\omega(t) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\lambda - \kappa}(t - \kappa),$$

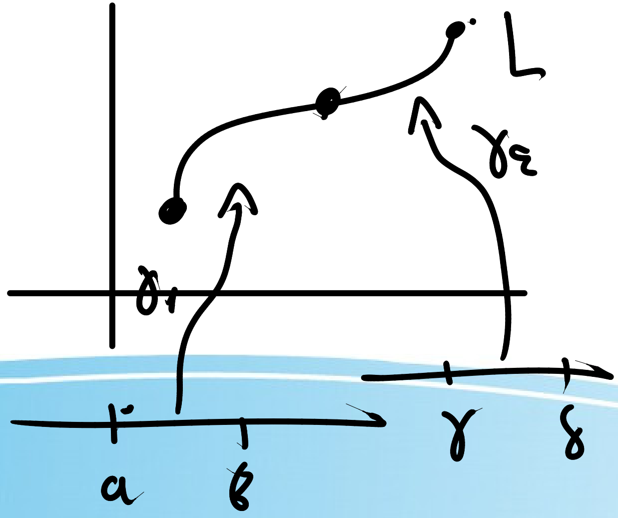
τότε $\omega(\kappa) = \alpha$, $\omega(\lambda) = \beta$, και η $\gamma \circ \omega: [\kappa, \lambda] \to \mathbb{C}$, είναι μία παραμετροποίηση του ίδιου μονοπατιού (που αποδίδει το ίδιο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για κάθε συνεχή συνάρτηση που ολοκληρώνεται).

Πράξεις με μονοπάτια 2/3

Πρόσθεση μονοπατιών

Αν γ_1: [a, b] → C, γ_2: [c, d] → C, είναι δύο διαδοχικά μονοπάτια ($\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$), τότε μπορεί να οριστεί το $\gamma_1 + \gamma_2$ ως ένα νέο μονοπάτι με κοινή παραμετροποίηση επιλέγοντας για το γ_2, μία νέα παραμετροποίηση της μορφής γ_2: [b, k] → C, για κάποιο κατάλληλο k ϵ R. Ορίζουμε γ: [a, k] → C, ως εξής:

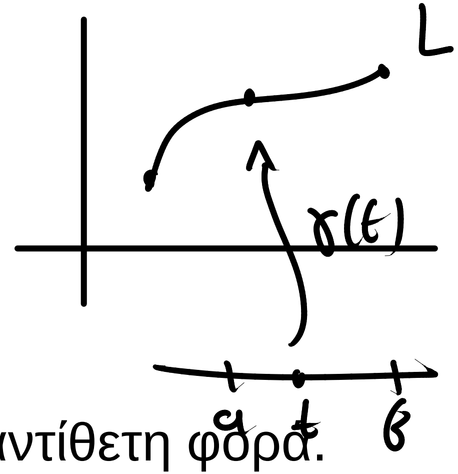
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, k] \end{cases}$$



Φανερά, η γ περιγράφει την $\gamma_1 + \gamma_2$ στο επίπεδο.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Πράξεις με μονοπάτια 3/3



Αντίθετο μονοπάτι

Αν γ: [α, β] → C, τότε το μονοπάτι -γ: [β, α] → C, με

$$-\gamma(t) = \gamma(\alpha + \beta - t),$$

διατρέχει τα ίδια σημεία του μιγαδικού επιπέδου, αλλά με την αντίθετη φορά.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

$$(i+t)^2 = i^2 + 2it + t^2 = t^2 - 1 + 2it.$$

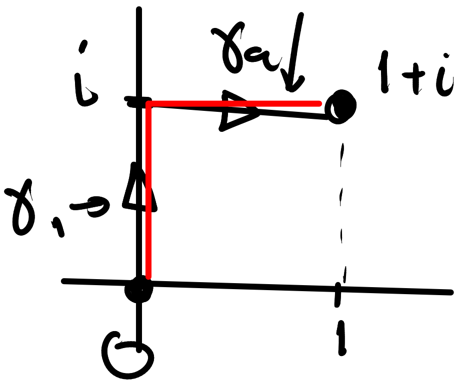
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f(z) = z[2] πάνω στο μονοπάτι γ που συνδέει το 0 με το i και το i με το 1 + i (με αυτήν την σειρά).

Λύση

$$\gamma_1(t) = t\cdot i, \quad 0 \le t \le 1. \qquad \gamma_2(t) = i + t(1+i-i) = i+t, \quad 0 \le t \le 1.$$



$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz = \int_0^1 (t\cdot i)^2 \cdot i\, dt + \int_0^1 (i+t)^2 \cdot dt =$$

$$= -i\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{t^3}{3} - t + it^2\Big|_0^1 = -\frac{i}{3} - \frac{2}{3} + i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

$$z_1 \to z_2 : \quad \gamma(t) = z_1 + t\cdot(z_2 - z_1), \; t\in[0,1]$$

άλυτη

$$-1+t+\cancel{ti}+i-\cancel{ti}+t=2t-1+i \qquad \int_L f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f(z) = z* πάνω στο μονοπάτι γ που διατρέχει το τρίγωνο με κορυφές 0, 1, i με τη θετική φορά.

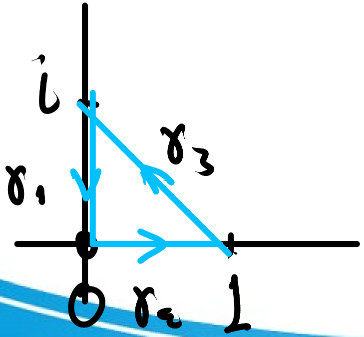
Λύση

$$f(z)=\bar{z}$$

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz=\int_0^1 \overline{\gamma_1(t)}\cdot\gamma_1'(t)\,dt+\int_0^1 \overline{\gamma_2(t)}\cdot\gamma_2'(t)\,dt+\int_0^1 \overline{\gamma_3(t)}\cdot\gamma_3'(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 -i(1-t)\cdot(-i)\,dt+\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 (1-t-ti)\cdot(-1+i)\,dt$$

$$=\left.\frac{t^2}{2}-t\right|_0^1+\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1+\left.t^2-t+it\right|_0^1=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+1-1+i=\underline{\underline{i}}\,.$$



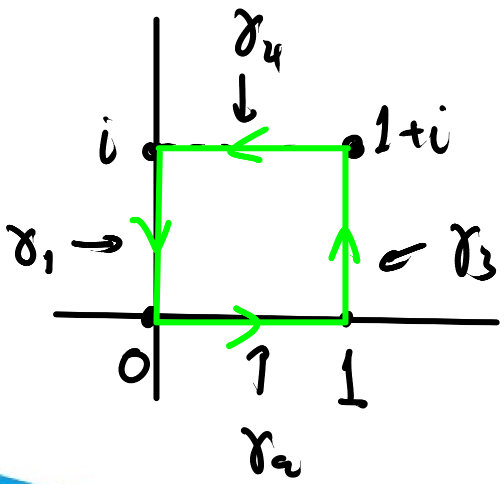
$$\gamma_1(t)=i+t(0-i)=i(1-t),\quad \gamma_2(t)=t,\quad \gamma_3(t)=1+t(i-1)=1-t+ti$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f(z) = z, πάνω στο μονοπάτι γ που διατρέχει το τετράγωνο με κορυφές 0, 1, 1 + i, i με τη θετική φορά.

Λύση



$$\int_\gamma z\,dz = \int_0^1 i\cdot(1-t)\cdot(-i)\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1+it)\cdot i\,dt - \int_0^1 (1-t+i)\,dt$$

$$= t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + it - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - t + \frac{t^2}{2} - it\Big|_0^1 = 0.$$

$\gamma_1(t) = i + t(0-i) = i(1-t)$, $\gamma_2(t) = t$, $\gamma_3(t) = 1 + t(1+i-1) = 1+ti$, $\gamma_4(t) = 1+i-t$

άλυτη

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθεί το $\int_0^{2\pi} e^{int}dt$ για κάθε n є Z.

Λύση

$$\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \int_0^{2\pi} \cos(nt) + i\sin(nt)\,dt \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_0^{2\pi} - \frac{i}{n}\cos(nt)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n}(\sin(2\pi n) - \sin 0) - \frac{i}{n}(\cos(2\pi n) - \cos 0) = 0.$$

$n=0$: $\int_0^{2\pi} e^{0}dt = 2\pi$.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Δείξτε ότι $\int_\gamma P(z)dz = 0$, για κάθε πολυώνυμο P(z), όπου γ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

$\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$

Λύση

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0$

$$\int_\gamma P(z)dz = \int_0^{2\pi} \left(a_n \cdot e^{int} + a_{n-1} \cdot e^{i(n-1)t} + \dots + a_1 \cdot e^{it} + a_0\right) \cdot i e^{it} dt = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} P(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

άλυτη

Μήκος μονοπατιού

Μήκος μονοπατιού

Αν γ(t): [α, β] → C, γ(t) = x(t) + iy(t), είναι ένα μονοπάτι στο C, τότε το μήκος της καμπύλης που περιγράφεται από αυτό είναι

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Παράδειγμα

Επαληθεύστε ότι ο παραπάνω τύπος αποδίδει το σωστό μήκος περιφέρειας για τον κύκλο $|z - z_0| = r$.

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

$\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$

$\gamma'(t) = i \cdot re^{it}, \quad |\gamma'(t)| = r$

$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dr = 2\pi r$

Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

Θεώρημα

Έστω γ:[α, β] → C, ένα μονοπάτι πεπερασμένου μήκους και f συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο που περιέχει το γ([α, β]). Αν |f(z)| ≤ M, z ϵ γ([α, β]), τότε:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M \cdot \ell(\gamma). \quad , \quad \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Απόδειξη

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \le \int_\alpha^\beta M|\gamma'(t)|dt = M \cdot l(\gamma).$$

$$|e^{z}| = |e^{x+iy}| = |e^{x}e^{iy}| = |e^{x}||e^{iy}| = e^{x} = e^{\operatorname{Re} z}$$

Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι $\left|\oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{6z^{5}}dz\right| \le \frac{\pi e^{2}}{3}$, όπου γ ο μοναδιαίος κύκλος.

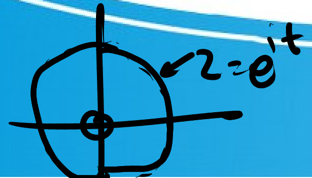
$\gamma(t) = e^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$

Λύση

$$\left|\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{6z^{5}}dz\right| \le M\cdot \underbrace{\ell(\gamma)}_{2\pi} = \frac{1}{6}\cdot e^{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi e^{2}}{3}.$$

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{2z}}{6z^{5}}\right| = \frac{|e^{2z}|}{6|z|^{5}} \xlongequal{z=e^{it}} \frac{1}{6}e^{2\operatorname{Re} z} \le \frac{1}{6}e^{2} = M$$



$$|e^{it}| = |\cos t + i\sin t| = \sqrt{\cos^{2}t+\sin^{2}t} = 1.$$

άλυτη

$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix}$

Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι $\left|\oint_\gamma \frac{\cos z}{z} dz\right| \leq 2\pi e$, όπου γ ο μοναδιαίος κύκλος.

$\gamma(t) = e^{it}$

$0 \leq t \leq 2\pi$

Λύση

$$\left|\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz\right| \leq M \cdot \ell(\gamma) = e \cdot 2\pi = 2\pi e$$

$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

$$|f(z)| = \left|\frac{\cos z}{z}\right| \xrightarrow{z = e^{it}} |\cos z| = \left|\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right) \leq \frac{1}{2}\left(e^{1} + e^{1}\right) = e$$

άλυτη

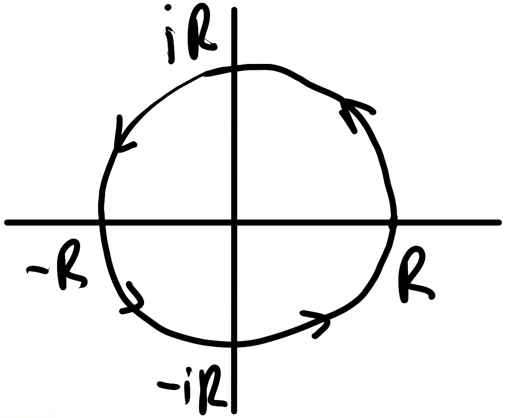
Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

Πόρισμα

Έστω f: ℂ → ℂ, συνεχής και ότι υπάρχει M > 0 τέτοιο ώστε $|f(z)| \le M$, για κάθε z є C. Αν $\gamma_R(z) = Re^{it}$, t є [0, 2π], τότε, για κάθε w Є C είναι:

$$\lim_{R \to +\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz = 0.$$

$$|z| = |Re^{it}| = R$$



$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|f(z)|}{(|z|-|w|)^2} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{|f(Re^{it})|}{(R-|w|)^2} \cdot iRe^{it} dt \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Συναφή και Απλά συναφή χωρία

Συναφή και Απλά συναφή χωρία

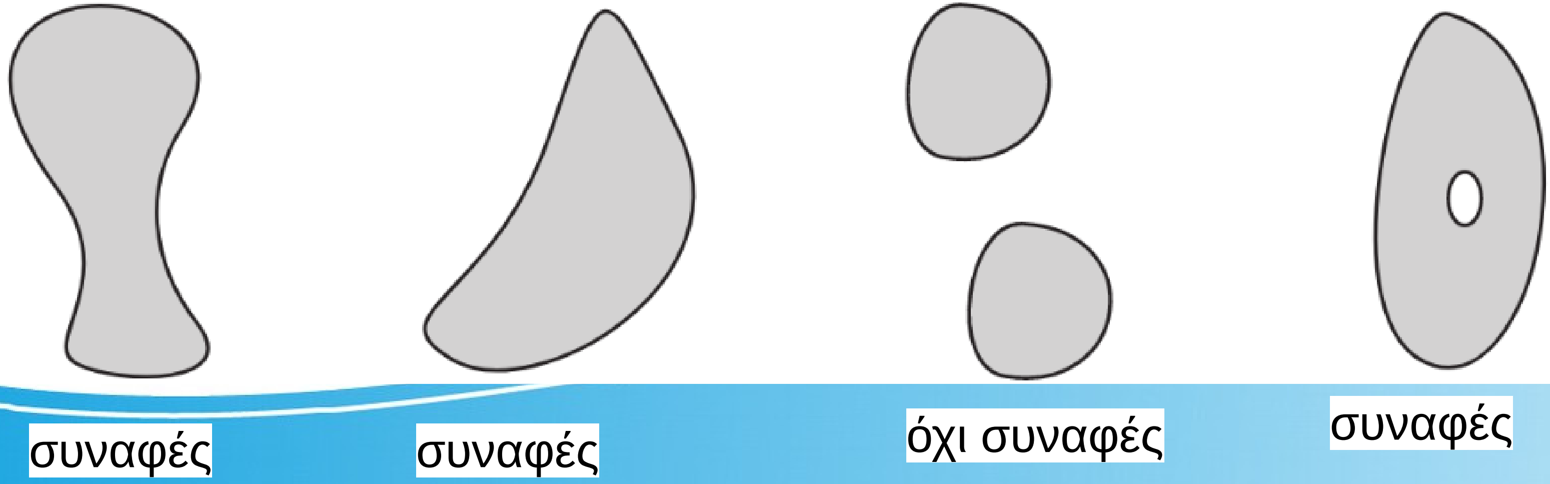
Ορισμός

Ένα υποσύνολο U του C, ονομάζεται **συναφές** αν δεν μπορεί να διαχωριστεί σε δύο (ή παραπάνω) μη κενά σύνολα τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους.

Σημείωση

Δύο σύνολα ονομάζονται ξένα, όταν το κάθε ένα, δεν περιέχει εσωτερικό ή σημείο συσσώρευσης του άλλου.

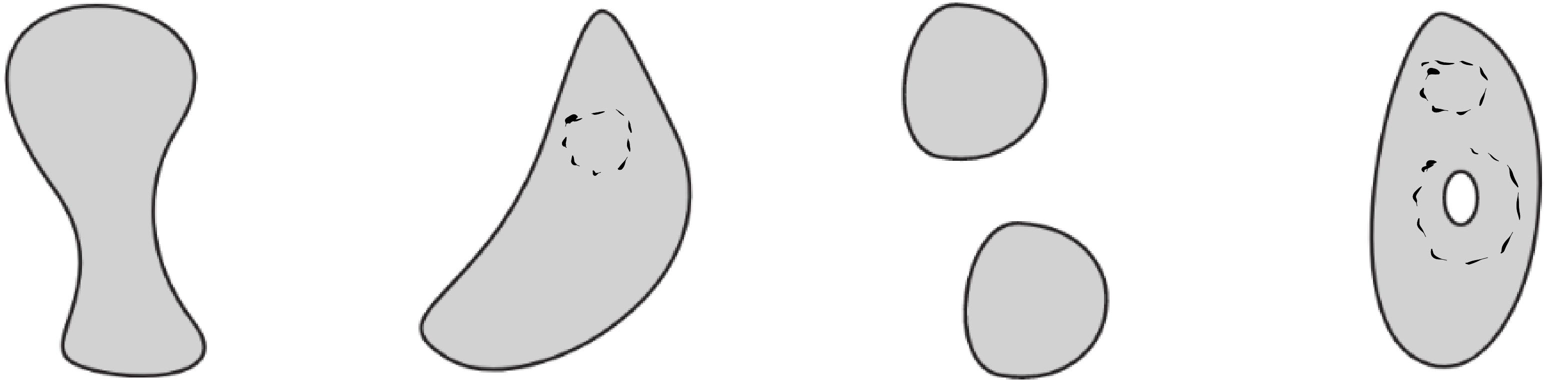
Παράδειγμα



Συναφή και Απλά συναφή χωρία

Ορισμός
Ένα υποσύνολο U του C, ονομάζεται **απλά συναφές** αν
α) Κάθε δύο σημεία μπορούν να συνδεθούν με μία κλειστή καμπύλη.
β) Κάθε κλειστή καμπύλη, μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα σημείο με συνεχή τρόπο.

Παράδειγμα



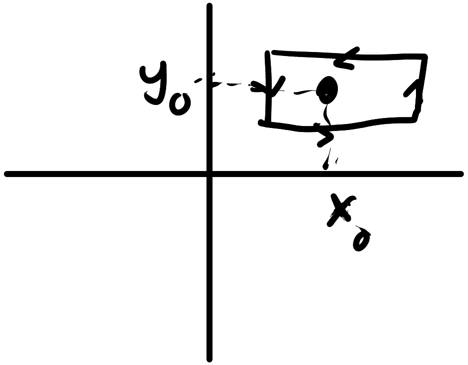
απλά συναφές   απλά συναφές   όχι απλά συναφές   όχι απλά συναφές

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

Θεώρημα Green 1/2

Έστω L, M: $R^2 \to R$ και $F(x,y) = (L(x,y), M(x,y))$ ένα διανυσματικό πεδίο στο R^2. Αν $(x_0, y_0) \in R^2$ και A είναι ένα ορθογώνιο με κέντρο το (x_0, y_0), τότε η ροή του F κατά μήκος της καμπύλης C ορίζεται να είναι

$$\Phi_C = \oint_C L\,dx + M\,dy$$



Ο στροβιλισμός του F στο (x_0, y_0) ορίζεται ως

$$\operatorname{curl} F = \lim_{E(A)\to 0} \frac{\Phi_{\partial A}}{E(A)} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

Η απόδειξη της δεύτερης ισότητας χρησιμοποιεί τα αναπτύγματα Taylor των L, M με κέντρο το (x_0, y_0).

Ο στροβιλισμός curl της F είναι αριθμητικό μέγεθος και δείχνει τη σημειακή συστροφή του πεδίου στο (x_0, y_0).

Θεώρημα Green 2/2

Έστω C μια θετικά προσανατολισμένη, λεία, απλή κλειστή καμπύλη σε ένα επίπεδο, και έστω D η περιοχή που οριοθετείται από την C.

Αν $A \subseteq R^2$, L, M: $A \to R$, με L, M є $C^1(A)$ και $D \subset A$, τότε

$$\oint_C L\,dx + M\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy$$

όπου η πορεία ολοκλήρωσης κατά μήκος του C είναι αριστερόστροφη.

Η απόδειξη βασίζεται στην προσέγγιση του D ως άθροισμα τετραγωνικών χωρίων στα οποία είναι δυνατός ο υπολογισμός τόσο του επικαμπυλίου όσο και του διπλού ολοκληρώματος.

Καθώς το curl είναι εξ’ ορισμού ο ρυθμός μεταβολής του επικαμπυλίου, ως προς το εμβαδόν, το θεώρημα Green είναι κάτι σαν το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού στην περίπτωση διανυσματικών πεδίων στο R^2.

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

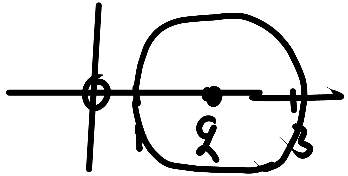
Θεώρημα
Έστω U ⊆ C ένα απλά συναφές ανοιχτό υποσύνολο του C και f : U → C. Αν η f είναι αναλυτική στο U, τότε για οποιοδήποτε ***απλό, κλειστό, τμηματικά λείο***, μονοπάτι γ σε αυτό, είναι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Σημείωση: Κλειστό μονοπάτι σημαίνει ότι για οποιαδήποτε παραμετροποίηση του της μορφής γ: [α, β] → C, είναι γ(β) = γ(α).

Παραδείγματα

1. Κάθε πολυώνυμο P(z) είναι αναλυτική συνάρτηση σε όλο το C. Άρα, $\int_\gamma P(z)\,dz = 0$, για κάθε κατάλληλο μονοπάτι γ στο C.
2. Αν γ το μονοπάτι που διατρέχει την περίμετρο του κύκλου |z – 2| = 1, τότε



Log z

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0,\ \int_\gamma \operatorname{Log} z\,dz = 0,\ \int_\gamma \sin z\,dz = 0.$$

Απόδειξη ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy

Έστω $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$. Είναι $dz = dx + idy$ και

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \oint_\gamma (udx - vdy) + i\oint_\gamma (vdx + udy)$$

Από Θ. Green: $\oint_\gamma (udx - vdy) = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy$ και $\oint_\gamma (vdx + udy) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$

Από εξισώσεις Cauchy – Riemann`είναι $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ άρα:

$$\iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy = 0.$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,dy = 0.$$

Το αποτέλεσμα έπεται.

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_theorem

Φυσική ερμηνεία μιγαδικής συνάρτησης

Από την ισότητα $\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \oint_{\gamma} (udx - vdy) + i\oint_{\gamma} (vdx + udy)$

προκύπτει ότι για κάθε μία συνάρτηση, f = u + iv, υπάρχουν δύο διανυσματικά πεδία

$$F_1 = (u, -v) \text{ και } F_2 = (v, u)$$

των οποίων οι ροές προσδιορίζονται από το Re και το Im μέρος του $\oint_{\gamma} f(z)\,dz$.

Από τις C.R. προκύπτει άμεσα ότι curl F_1 = curl F_2 = 0 (αστρόβιλα πεδία).

Η παραπάνω αντιστοίχιση βρίσκει εφαρμογές στις επιστήμες του μηχανικού και στη Φυσική.

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

Πόρισμα

Έστω U απλά συναφές χωρίο και f: U → C, αναλυτική συνάρτηση. Τότε, για κάθε z_1, z_2 ϵ U, το ολοκλήρωμα

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz,$$

είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης, δηλαδή έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το μονοπάτι που θα επιλεχθεί για να διατρέξει τη διαδρομή από το σημείο z_1 στο σημείο z_2.

Απόδειξη

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$$

Απο Θ. Cauchy $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \iff$

$$\iff \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

Ερμηνεία του ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy

Το συμπέρασμα του ολοκληρωτικού θεωρήματος φαίνεται κάπως παράδοξο σε σχέση με την έννοια της ολοκλήρωσης στις πραγματικές συναρτήσεις, όπου η βασική ερμηνεία ενός ολοκληρώματος ήταν αυτή του εμβαδού ενός χωρίου, που στη γενική του περίπτωση είναι διάφορο του μηδενός. Η κατάσταση διαφωτίζεται αν κάποιος αναγνωρίσει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως τη “μετατόπιση” στο πεδίο της εικόνας F(U), (F η αντιπαράγωγος της f) που προκύπτει από τη μετατόπιση κατά μήκος της καμπύλης γ στο πεδίο ορισμού U. Δηλαδή, αν γ: [α, β] → C, ένα μονοπάτι, τότε

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} [F(\gamma(t))]'dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$$

Έτσι, αν κάνει “κύκλο” η καμπύλη στο πεδίο ορισμού (γ(α) = γ(β)), τότε η μετατόπιση στο πεδίο της αντιπαραγώγου θα είναι 0:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0.$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

Άσκηση

Αν γ η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου, θετικά προσανατολισμένη, να υπολογιστούν τα $\int_\gamma z\,dz,\ \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz,\ \int_\gamma \bar{z}\,dz$

$$\bar{z}(t) = \overline{e^{it}} = e^{-it}$$

$$\gamma: |z|=1,\quad z(t)=e^{it},\ 0\le t<2\pi,\quad z'(t)=ie^{it}$$

$f(z)=z$ αναλ. $\overline{D} \Rightarrow$ Θ. Cauchy.

$$\int_\gamma z\,dz = 0.$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}}\cdot i\cancel{e^{it}}\,dt = 2\pi i.$$

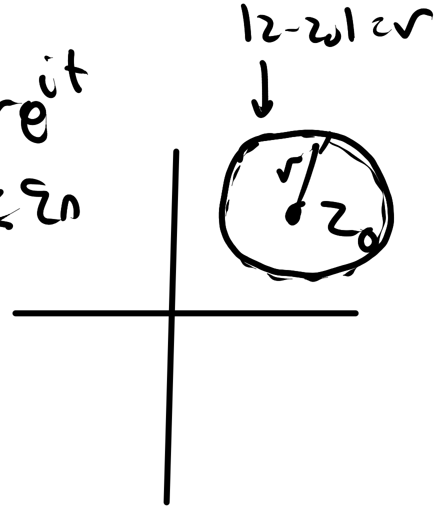
$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}\cdot ie^{it}\,dt = 2\pi i.$$

Άσκηση

Αν γ η περιφέρεια του κύκλου $|z - z_0| = r$, θετικά προσανατολισμένη, να υπολογιστούν τα $\int_\gamma (z - z_0)\,dz$, $\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz$.

$z = z_0 + re^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$



$$\int_\gamma (z - z_0)\,dz = 0 \text{ (από Θ. Cauchy)}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, i r e^{it}\, dt = 2\pi i.$$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Θεώρημα

Έστω $U \subseteq C$, ανοιχτό σύνολο και $D = \{z: |z - z_0| \leq r\} \subseteq U$. Έστω $f: U \to C$ μια αναλυτική συνάρτηση και έστω $\gamma = \partial D$, θετικά προσανατολισμένο.

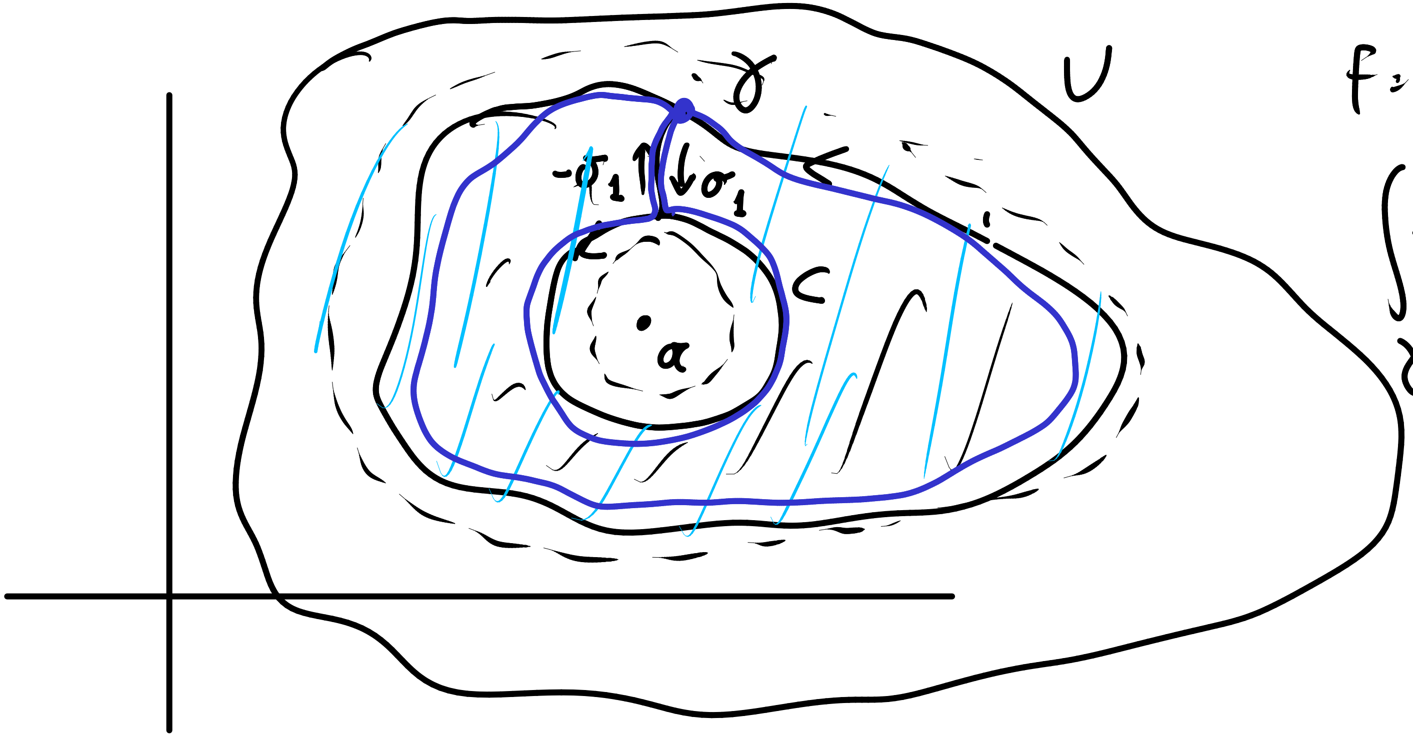
Τότε, για κάθε $\alpha \in D^o = \{z: |z - z_0| < r\}$ ισχύει:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz.$$

Πόρισμα

Με τις ίδιες προϋποθέσεις του ολοκληρωτικού τύπου, αποδεικνύεται επιπλέον, ότι υπάρχουν οι παράγωγοι n – τάξης και ισχύει:

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz.$$



$f: U \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$$

$$\int_{-\gamma} = -\int_\gamma$$

$$\int_{\sigma_1 - C - \sigma_1 + \gamma} f(z)\,dz = 0 \iff \cancel{\int_{\sigma_1}} + \int_{-C} + \cancel{\int_{-\sigma_1}} + \int_\gamma = 0$$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Απόδειξη ολοκληρωτικού τύπου Cauchy

Σημείωση: Από το Θεώρημα Cauchy, μπορούμε να δεχθούμε πως ο δίσκος D έχει κέντρο το α και οποιαδήποτε ακτίνα ε > 0. Δηλαδή: C: |z – α| = ε.

$$z(t) = \varepsilon \cdot e^{it}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz - 1 f(a)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{f\big(z(t)\big)-f(a)}{\varepsilon e^{it}}\cdot \varepsilon e^{it} i\right)\,dt\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f\big(z(t)\big)-f(a)\right|}{\varepsilon}\,\varepsilon\,dt$$

$$\le \max_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)-f(a)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0 \frac{1}{z-a}\,dz = 1.$$

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_formula

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

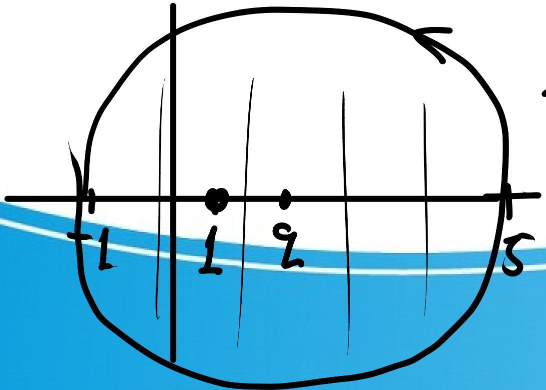
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{z+1}{z-1}\,dz$, όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 2 και ακτίνα 3.

Λύση

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$\int_C \frac{\overbrace{z+1}^{f(z)}}{z-\underbrace{1}_{a}}\,dz \overset{\text{O.T.C.}}{=} f(1)\cdot 2\pi i = 4\pi i.$$



$$z(t) = 2 + 3e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$z'(t) = 3ie^{it}$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

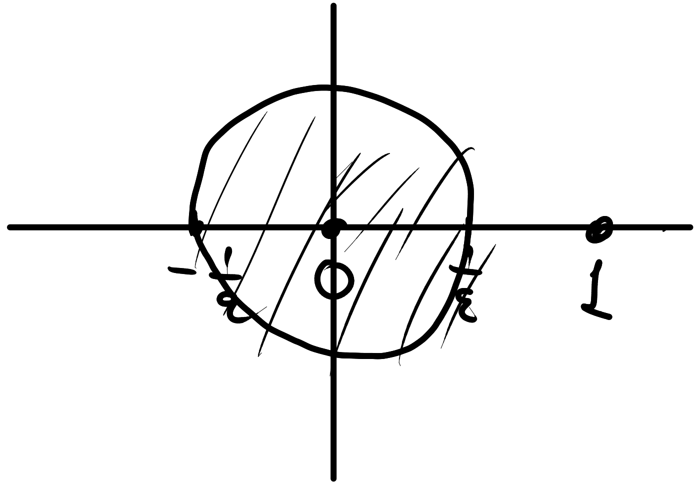
Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{z+1}{z-1}\,dz$, όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα ½.

Λύση

$$\int_C \frac{z+1}{z-1}\,dz \overset{Θ.C.}{=} 0.$$



Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{e^z + z}{z^2}\, dz$, όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 1.

Λύση

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

$$\int_C \frac{e^z + z}{z^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0) = 4\pi i .$$

$a = 0$

$n = 1$

$f(z) = e^z + z \Rightarrow f'(z) = e^z + 1 \Rightarrow f'(0) = 2$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα
Να υπολογιστεί το $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz$, όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 2 και ακτίνα 3.

Λύση
Είναι $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = \int_C \frac{1}{z-2} dz + \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = I_1 + I_2.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(z) = 1, και παρατηρούμε ότι αυτή είναι αναλυτική σε όλο το C, άρα και στο εσωτερικό του δίσκου C. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$I_1 = \int_C \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i.$$

και

$$I_2 = \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(2) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = 2\pi i.$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα
Αν C ο μοναδιαίος κύκλος θετικά προσανατολισμένος, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3}dz$

Λύση
Είναι $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3}dz = \int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3}dz$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = z^4/8$, και παρατηρούμε ότι αυτή είναι αναλυτική σε όλο το C, άρα και στο εσωτερικό του δίσκου C. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$\int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3}dz = \int_C \frac{f(z)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3} = \pi i f^{(2)}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Είναι $f'(z) = z^3/2$, $f^{(2)}(z) = 3z^2/2$, άρα $f^{(2)}(-1/2) = 3(-1/2)^2/2 = 3/8$, και $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3}dz = \frac{3\pi i}{8}$.

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

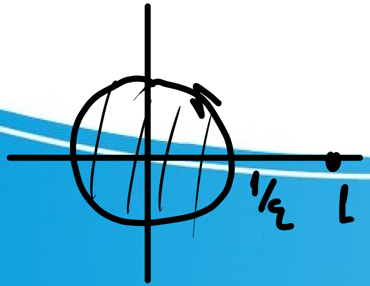
1. Αν γ η περίμετρος του κύκλου |z| = 1/2, που διαγράφεται μία φορά, με θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}dz.$

Λύση

$$\frac{2z-1}{z\cdot(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} = \frac{(A+B)z - A}{z\cdot(z-1)} \Rightarrow A=1, \; B=1$$

$$\int_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \int_\gamma \frac{1}{z}dz + \cancel{\int_\gamma \frac{1}{z-1}dz} = 2\pi i.$$

0 (από Θ.C.)



$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad a=0, \; f(z)=1$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

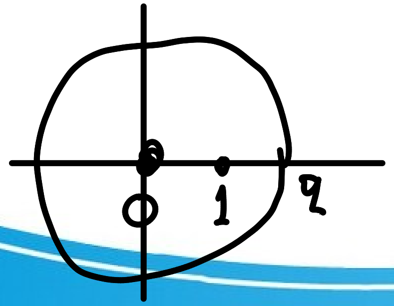
Eval. 1 $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{z}\,dz \xlongequal[0 \leq t \leq 2\pi]{z(t) = \frac{1}{2}e^{it}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{it}} \frac{1}{2} i e^{it}\,dt = 2\pi i$

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

2. Αν γ ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 2 που διαγράφεται μία φορά κατά τη θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$.

Λύση

$$\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z}dz + \int_{\gamma} \frac{1}{z-1}dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$



άλυτη

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

3. Αν γ ο κύκλος $(x – 3)^2 + y^2 = 1$, που διαγράφεται μία φορά με θετική φορά, να υπολογιστεί το $\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

Λύση

άλυτη

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

4. Αν $\gamma(\theta) = 3 + 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^2 + 1 + z^3}{(z-2)^2}\,dz$.

Λύση

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

5. Αν γ(t) = e^{it}, t ϵ [0, 2π], να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{e^{\cos z^2}}{z^2 - 5z} dz$.

Λύση

άλυτη

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

6. Αν γ(t) = $3e^{-it}$, t ϵ [0, 2π], να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{z^3+1}{z-1}\,dz$.

Λύση

άλυτη

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

7. Αν $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1-3z}\,dz$.

Λύση

άλυτη

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

8. Αν γ η περιφέρεια του κύκλου |z – 1| = 3/2 (θετική φορά), να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{(z-3)^3}{z^4+4z^3+z^2}\,dz$.

Λύση

Ανάπτυγμα αναλυτικής συνάρτησης σε δυναμοσειρά

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Κάθε αναλυτική συνάρτηση αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμοσειρά και αντίστροφα, κάθε δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση.

Θεώρημα

Έστω $z_0 \in C$. Αν η f: A → C είναι παραγωγίσιμη στο $D(z_0, r)$, τότε υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης στο z_0 και η f έχει αναπαράσταση της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r,$$

Όπου

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Η αναπαράσταση αυτή της f καλείται **σειρά Taylor της f με κέντρο το z_0 και ακτίνα r.**

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Ισχύει και το αντίστροφο. Κάθε άπειρη σειρά ορίζει αναλυτική συνάρτηση.

Θεώρημα

Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \ |z - z_0| < r$, για κάθε z є D($z_0$, r), τότε η f είναι αναλυτική και

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (z - z_0)^{n-1}, \ |z - z_0| < r,$$

Δηλαδή: Μπορούμε να παραγωγίσουμε μια δυναμοσειρά σαν να ήταν πολυώνυμο.

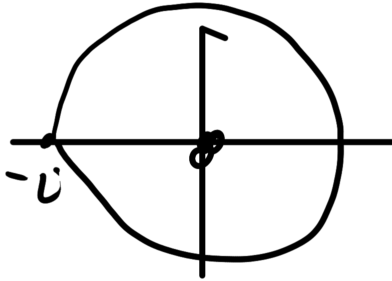
Επιπλέον, οι συντελεστές μίας συντελεστές ενός αναπτύγματος Taylor είναι μοναδικοί.

Θεώρημα

Αν υπάρχει r > 0, τέτοιο ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \ |z - z_0| < r$, για κάθε z є D($z_0$, r), τότε

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor



Παράδειγμα

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 της $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$.

Λύση

Η f ορίζεται και είναι αναλυτική στο C - {-i}. Επιλέγουμε τον ανοικτό δίσκο D(0, 1) ως το μεγαλύτερο δίσκο με κέντρο 0 που βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της. Για z є D(0, 1) είναι

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n = -i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{i^n}z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}z^n.$$

Καθώς, οι συντελεστές Taylor είναι μοναδικοί, η παραπάνω σειρά είναι υποχρεωτικά η σειρά Taylor τής f .

Σημείωση

Φανερά, η παραπάνω επιλογή είναι προτιμότερη από τη χρήση του ορισμού της δυναμοσειράς και τον άμεσο υπολογισμό των $f^{(n)}(0)$.

$$\frac{(-1)^n}{i^n} = \left(-\frac{1}{i}\right)^n = i^n$$

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

$$\frac{1}{1-\lambda} = \sum \lambda^n, \quad |\lambda| < 1$$

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{1-3z}$. (α) Να αποδείξετε ότι $f^{(n)}(z) = \dfrac{3^n n!}{(1-3z)^{n+1}}$.

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το 0.

(γ) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor.

Λύση (α)

$$f(z) = \frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (3z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n, \quad |3z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{3}.$$

$$1-3z=0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}, \quad A_f = \mathbb{C} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \qquad f(z) = \sum a_n z^n, \quad |z| < \frac{1}{3}$$

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Άσκηση
Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{1-3z}$. (α) Να αποδείξετε ότι $f^{(n)}(z) = \dfrac{3^n n!}{(1-3z)^{n+1}}$.

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το 0.
(γ) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor.
Λύση (β)

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Άσκηση
Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-3z}$. (α) Να αποδείξετε ότι $f^{(n)}(z) = \frac{3^n n!}{(1-3z)^{n+1}}$.

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το 0.
(γ) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor.
Λύση (γ)

Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Ορισμός

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **μεμονωμένη ανωμαλία** στο σημείο z_0, αν

(i) Η f δεν ορίζεται στο z_0, και

(ii) Υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι αναλυτική στο $\{z \in C: 0 < |z - z_0| < r\}$.

Παραδείγματα

- Το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία τής 1/z.
- Το i και το −i είναι μεμονωμένες ανωμαλίες τής $1 / (z^2 + 1)$.
- Τα σημεία kπ, $k \in Z$, είναι μεμονωμένες ανωμαλίες τής $1 / \sin z$.
- Το 0 δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία τής Log z γιατί η συνάρτηση αυτή δεν είναι αναλυτική σε καμία περιοχή της μορφής $\{z \in C: 0 < |z - z_0| < r\}$, για κάποιο $r > 0$.

Ανάπτυγμα Laurent - Εισαγωγή

Παρατηρούμε ότι αν υπάρχει μεμονωμένη ανωμαλία, τότε είναι δυνατή η ανάπτυξη της συνάρτησης σε απειροσειρά με αρνητικές δυνάμεις του z.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση f(z) = $e^{1/z}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0. Γνωρίζουμε ότι για r > 0 και για κάθε z є D(0, r) (ισοδύναμα |z| < r) είναι

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Θέτοντας, όπου z το 1/z παίρνουμε ότι για κάθε z є C, τέτοιο ώστε |1/z| < r ή |z| > 1/r θα είναι

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots.$$

Το r μπορεί να γίνει απροσδιόριστα μεγάλο, άρα η αναπαράσταση αυτή ισχύει για κάθε z με |z| > 0.

Ανάπτυγμα Laurent - Εισαγωγή

Παρατηρούμε ότι αν υπάρχει μεμονωμένη ανωμαλία, τότε είναι δυνατή η ανάπτυξη της συνάρτησης σε απειροσειρά με αρνητικές δυνάμεις του z.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(z) = sin z / z^2 η οποία έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0. Γνωρίζουμε ότι

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots.$$

Διαιρώντας με το z, παίρνουμε ότι για κάθε z є C, τέτοιο ώστε 0 < |z| < r, είναι

$$\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots.$$

Ανάπτυγμα Laurent

Για συναρτήσεις με μεμονωμένες ανωμαλίες, ισχύει το εξής θεώρημα αναπαράστασης της τιμής της συνάρτησης σε ένα σημείο $z \neq z_0$, με όρους της μορφής $\lambda(z - z_0)^k$, $k \in Z$.

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f με μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0. Τότε, για κάθε $0 < |z - z_0| < r$, είναι:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται **ανάπτυγμα Laurent με κέντρο z_0 τής f**.

Σημείωση: $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$: Αναλυτικό μέρος, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{-n}}{(z - z_0)^n}$: κύριο μέρος.

Ανάπτυγμα Laurent

Μοναδικότητα συντελεστών αναπτύγματος

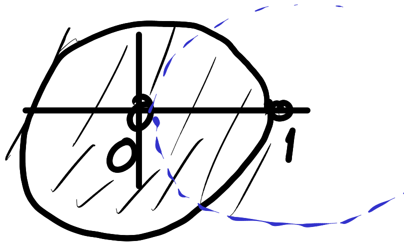
Όπως και στην περίπτωση των σειρών Taylor, αν η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$,

συγκλίνει σε μία συνάρτηση f, τότε θα είναι $b_n = \alpha_n$, όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

με $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ανάπτυγμα Laurent



$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση f(z) = 1 / [z(z – 1)] έχει δύο μεμονωμένες ανωμαλίες στα σημεία 0 και 1. Για να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent γύρω από κάθε σημείο, θα σπάσουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων και θα εκμεταλλευτούμε τη γεωμετρική σειρά προσπαθώντας να δημιουργήσουμε αθροίσματα συμβατά με τη μορφή των σειρών Laurent.

Ανάπτυγμα Laurent γύρω από το 0: $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \ \ 0 < |z| < 1.$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent γύρω από το 0 έχει έναν όρο.

Ανάπτυγμα Laurent γύρω από το 1:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(1-z)} - = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n, \ \ 0 < |z-1| < 1.$$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent γύρω από το 1 έχει έναν όρο.

Κατάταξη των ανωμαλιών

Έστω, ότι η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0. Για το κύριο μέρος του αναπτύγματος $\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n (z - z_0)^n$, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις.

1. Δεν έχει κανέναν όρο (δηλαδή $\alpha_n = 0$, $n = -1, -2, \ldots$). Στην περίπτωση αυτή το z_0 ονομάζεται **επουσιώδης ή απαλείψιμη ανωμαλία.**

2. Έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων. Στην περίπτωση αυτή το z_0 ονομάζεται **πόλος τάξης m**, όπου m το πλήθος των μη μηδενικών όρων.

3. Έχει άπειρους μη μηδενικούς όρους. Στην περίπτωση αυτή το z_0 ονομάζεται **ουσιώδης ανωμαλία.**

Κατάταξη των ανωμαλιών

Παραδείγματα

1. Είναι $\dfrac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - ,\ldots$

άρα η f(z) = sin z / z έχει **απαλείψιμη ανωμαλία** στο 0**.**

2. Είναι $\dfrac{1}{z(z-1)} = -\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad 0 < |z| < 1,$

άρα η f(z) = 1 / [z(z – 1)] έχει **πόλο 1ης τάξης** στο 0.

3. Είναι $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \ldots,$ άρα η f(z) = $e^{1/z}$ έχει **ουσιώδης ανωμαλία στο 0.**

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Υπάρχει η δυνατότητα αναγνώρισης μίας ανωμαλίας με τον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Θεώρημα

Έστω f μία συνάρτηση αναλυτική για z τέτοια ώστε $0 < |z - z_0| < r$. Τότε

1. Το z_0 είναι **επουσιώδης (απαλείψιμη) ανωμαλία** για την f, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{z \to z0} f(z)$.

2. Το z_0 είναι **πόλος** για την f, αν και μόνο αν $\lim_{z \to z0} f(z) = \infty$. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη του πόλου είναι το ελάχιστο m για το οποίο $\lim_{z \to z0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$ και πεπερασμένο.

3. Το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία** για την f, αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z0} f(z)$ δεν υπάρχει.

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Άσκηση 1

Αναγνωρίστε το είδος των ανωμαλιών για τις συναρτήσεις $f(z)=\dfrac{\sin(z^2)}{z^2}$, $g(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$, $h(z)=\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

$f(z)=\dfrac{\sin(z^2)}{z^2}$: 0 : μεμονωμένη ανωμαλία.

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z^2\to 0}\dfrac{\sin(z^2)}{z^2}=1$ υπάρχει και είναι $<\infty$

άρα $z=0$ απαλείψιμη.

$$g(z)=\frac{\sin z}{z^3}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{z^2}=\infty .$$

$$\lim_{z\to 0} z\cdot g(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^2}=\infty$$

$$\lim_{z\to 0} z^{2}\cdot g(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1<\infty .$$

$z=0$: πόλος $2^{ης}$ τάξης για την $g(z)=\frac{\sin z}{z^3}$.

$h(z) = \sin\frac{1}{z}$

$$\lim_{z\to 0} \sin\frac{1}{z} \overset{u=\frac{1}{z}}{=\!=} \lim_{u\to\infty} \sin u : \text{δεν υπάρχει.}$$

άρα $z=0$ ουσιώδης ανωμαλία για την $h(z)=\sin\frac{1}{z}$.

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Άσκηση 2

Αναγνωρίστε το είδος των ανωμαλιών για τις συναρτήσεις $\omega(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$, $p(z) = \dfrac{e^z - 1}{(z-1)^2}$, $q(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$.

$$\omega(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \overset{DLH}{=} \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{1} = e^0 = 1, \text{ αναιρέσιμη}$$

$$p(z) = \frac{e^z - 1}{(z-1)^2}, \quad \lim_{z\to 1} \frac{e^z - 1}{(z-1)^2} = \infty \Rightarrow \text{πόλος}$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1)\, p(z) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z - 1}{z-1} = \infty$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1)^2 p(z) = \lim_{z\to 1} e^z - 1 = e - 1 < \infty \Rightarrow \text{2ης τάξης,}$$

άλυτη

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}, \quad \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{2z} = \infty$$

$$\lim_{z\to 0} z\, g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{1} = 1 < \infty$$

$z=0$: πόλος 1ης τάξης.

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Άσκηση 3

Αναγνωρίστε το είδος των ανωμαλιών για τη συνάρτηση $s(z) = \dfrac{e^z - 1}{(z-2)(z-1)^2 z^2}$.

άλυτη