Μιγαδικές Συναρτήσεις

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Άσκηση

Βρείτε ποια από τις παρακάτω μιγαδικές συναρτήσεις είναι αναλυτική:

$f(x + iy) = (-2x^2 - 10xy + 6x + 2y^2 + 15y) + i(5x^2 - 4xy - 15x - 5y^2 + 6y)$

$g(x + iy) = (x - 2y) + i(-2x - y)$.

άλυτη

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $u(x, y) = e^x(x \cos y – y \sin y)$. Γνωρίζουμε ότι $u = \mathrm{Re}(f)$ για μία αναλυτική συνάρτηση f, με $f(0) = 0$.

(α) Να βρεθεί η $v(x, y)$ ώστε η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ να είναι αναλυτική.

(β) Να γραφεί η f συναρτήσει του $z = x + iy$. $\to f(z) = ze^z$

άλυτη

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $u(x, y) = ½\ln(x^2 + y^2)$. Γνωρίζουμε ότι $u = Re(f)$ για μία αναλυτική συνάρτηση f, με $f(1) = 0$.

(α) Να βρεθεί η $v(x, y)$ ώστε η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ να είναι αναλυτική.

(β) Να γραφεί η f συναρτήσει του $z = x + iy$.

άλυτη

Συνέχεια παραγώγων 2ης τάξης

Οι ολόμορφες συναρτήσεις έχουν πολύ καλές ιδιότητες.

Ειδικότερα, αν $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(x + iy)$, $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(x + iy)$, αποδεικνύεται πως

Οι u, v, είναι παραγωγίσιμες άπειρες φορές (δηλαδή $u, v \in C^{\infty}$).

Ειδικότερα, οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης είναι συνεχείς και ισχύει

$$u_{xy} = u_{yx},\ v_{xy} = v_{yx}.$$

Αρμονικές συναρτήσεις

Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω U $\subseteq$ R^2. Μια συνάρτηση f: U→R λέγεται αρμονική αν είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0, \ \ (\text{ή} \ \ f_{xx} + f_{yy} = 0).$$

για κάθε z ϵ U. Η συνθήκη της αρμονικότητας γράφεται και $\Delta f = 0$ ή $\nabla^2 f = 0$, όπου Δ είναι ο τελεστής του Laplace, ∇ είναι το διάνυσμα της κλίσεως της f:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

και ∇·∇ υποδηλώνει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων.

Σημειώσεις

Κάθε αρμονική συνάρτηση είναι λύση της δ.ε. του Laplace $\nabla^2 f = 0$

Κάθε γραμμικός συνδυασμός αρμονικών συναρτήσεων είναι αρμονική συνάρτηση.

Αρμονικές συναρτήσεις

Θεώρημα
Αν f: U → C, μία αναλυτική μιγαδική συνάρτηση τότε οι u = Re f, v = Im f είναι αρμονικές συναρτήσεις.
Απόδειξη
Άμεση συνέπεια των C-R με την επισήμανση πως οι u, v έχουν συνεχείς δεύτερες παράγωγους..

Θεώρημα
Αν u(x, y) είναι αρμονική συνάρτηση στο απλά συναφές χωρίο A, τότε η u = Re f, για κάποια αναλυτική συνάρτηση f.
Απόδειξη
Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Η συνάρτηση είναι η $f(z) = \int_{z_0}^{z} g(z)dz + u(x_0, y_0)$, όπου $g(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$
Περισσότερες λεπτομέρειες εδώ (Theorem 5.3.):
https://ocw.mit.edu/courses/18-04-complex-variables-with-applications-spring-2018/2e739bb156efb0bc7103fc43d0897dda_MIT18_04S18_topic5.pdf

Αρμονικές συναρτήσεις

Άσκηση

Να βρείτε την τιμή του k є R, ώστε η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 – kxy^2 + 12xy – 12x$, να αποτελεί πραγματικό μέρος μίας αναλυτικής συνάρτησης.

Υπόδειξη: Αν $u = Re(f)$ και f αναλυτική, τότε πρέπει η u να είναι αρμονική.

άλυτη

Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός
Έστω u μία αρμονική συνάρτηση στο U $\subset$R. Κάθε συνάρτηση v: U $\rightarrow$ R, τέτοια ώστε η u + iv να είναι αναλυτική στο U, ονομάζεται αρμονική συζυγής της u στο U .

Άσκηση
Έστω x, y $\in$ R και $u(x, y) = -5x^4y + 10x^2y^3 - y^5$. Δείξτε ότι η u είναι αρμονική και βρείτε την αρμονική συζυγής v(x, y) για την οποία v(1, 0) = 2.

άλυτη

Αρμονικές συναρτήσεις

Άσκηση $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$. , $u_x = 2x+2, \; u_{xx} = 2$

$u_y = -2y, \; u_{yy} = -2$

(α) Να αποδειχθεί ότι η u είναι αρμονική.

(β) Να βρεθεί η αρμονική συζυγής v(x, y).

Να βρεθεί η αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ως συνάρτηση του $z = x + iy$.

(α) $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow u$: Αρμονική.

(β) C.R. $v_y = u_x \Rightarrow v_y(x,y) = 2x+2 \Rightarrow v(x,y) = 2xy + 2y + c(x)$.

$\underline{v_x = -u_y} \Rightarrow v_x(x,y) = 2y + c'(x)$ $\Big\}$ $2y + c'(x) = 2y \Leftrightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow$

Όμως, $v_x(x,y) = -u_y = +2y$ $\Rightarrow c(x) = c \in \mathbb{R}$.

άλυτη

Άρα, $f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i \cdot (2xy + 2y + c) =$

$= z^2 + 2z + i \cdot c$.

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

Συμμετρίες της f(A)

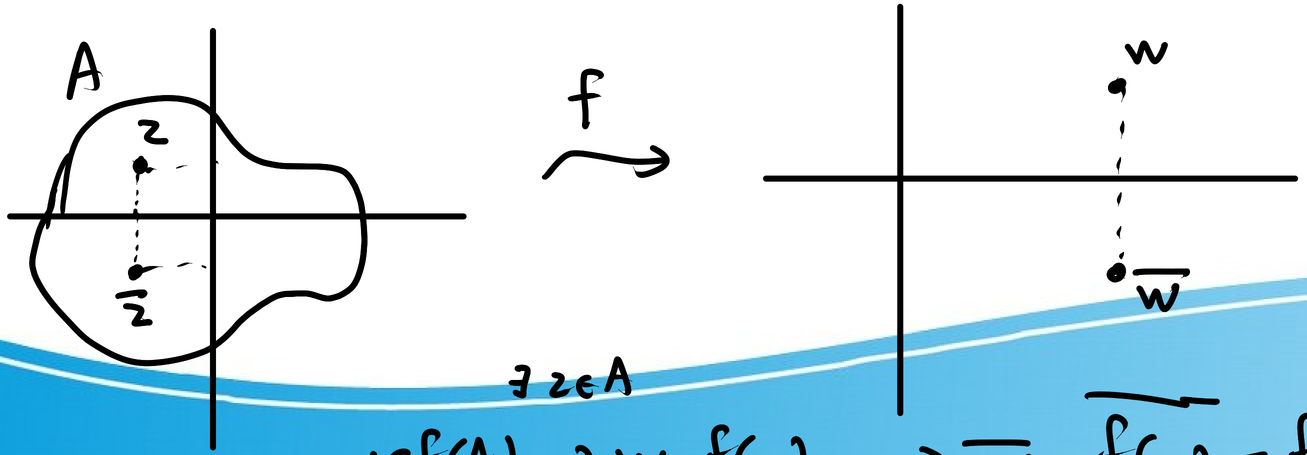
$z = x+iy,\ \bar{z} = x-iy = z^*$

Συμμετρίες της f(A)

Στην πραγματική ανάλυση υπάρχει δυνατότητα “ερμηνείας” αλγεβρικών σχέσεων με γεωμετρικό τρόπο (όπως π.χ. στις άρτιες και στις περιττές συναρτήσεις). Για τις μιγαδικές συναρτήσεις μπορούμε να διατυπώσουμε αντίστοιχες προτάσεις:

1. Έστω χωρίο A συμμετρικό ως προς τον x’x, και f: A → C. **Αν** $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ **τότε η εικόνα f(A) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x’x.**

Πράγματι, αν w є f(A), τότε w = f(z) για κάποιο z є A και $\bar{w} = \overline{f(z)} = f(\bar{z}) \in f(A)$.



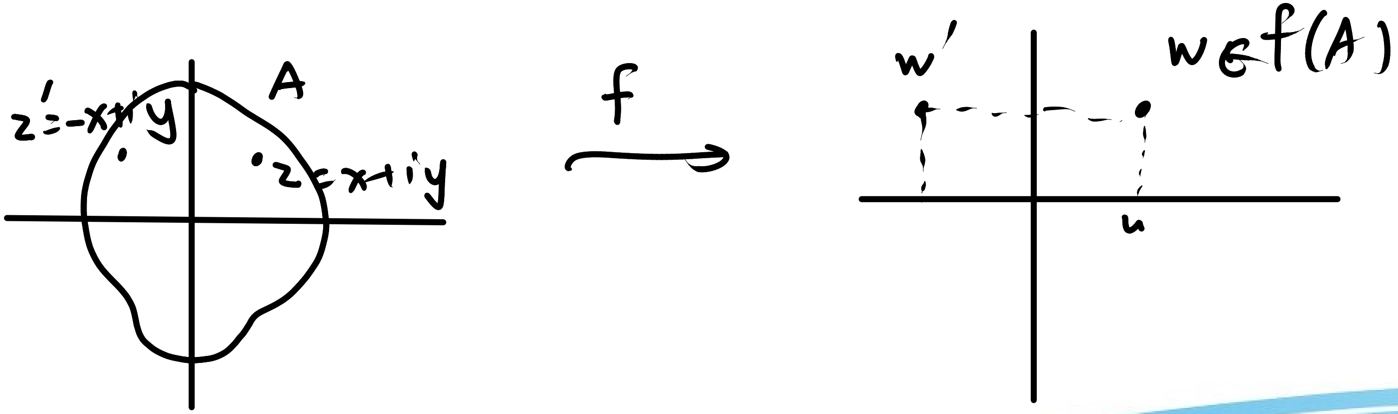
$w \in f(A) \Rightarrow w = f(z) \Rightarrow \bar{w} = \overline{f(z)} = f(\bar{z}) \Rightarrow \bar{w} \in f(A)$

$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Συμμετρίες της f(A)

2. Έστω χωρίο A συμμετρικό ως προς τον y’y, και $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$: A → C.
Αν η u είναι περιττή ως προς x και η v είναι άρτια ως προς x, ($u(-x, y) = -u(x, y)$ και $v(-x, y) = v(x, y)$) **τότε το f(A) είναι συμμετρικό ως προς τον y’y.**

Πράγματι, αν w є f(A), τότε w = f(z) για κάποιο z є A και παρατηρούμε ότι το συμμετρικό του w ως προς τον Im ανήκει και αυτό στο f(A):
$w' = -\mathrm{Re}\, w + i\, \mathrm{Im}\, w = -u(x, y) + iv(x, y) = u(-x, y) + iv(-x, y) = f(-x + iy)$ є f(A).



$w \in f(A) \Rightarrow w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Τότε $w' = -u(x,y) + i v(x,y) = u(-x,y) + i\,v(-x,y) = f(-x+iy) = f(z') \in f(A)$

Μετασχηματισμοί Möbius

Ευθείες και κύκλοι στο C

Η γενική εξίσωση ευθείας είναι $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

Η γενική εξίσωση κύκλου είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ ή $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

Άρα κύκλοι και ευθείες περιγράφονται από την εξίσωση

$$\mathbf{A(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.}$$

Θέτοντας $B = (\alpha - i\beta)/2$, τότε $\alpha x + \beta y = Bz + B^* z^* = 2\mathrm{Re}(Bz)$ και η εξίσωση γράφεται: $A|z|^2 + Bz + B^* z^* + C = 0$ ή

$$\mathbf{A|z|^2 + 2Re(Bz) + C = 0.}$$

- Αν $A = 0$: $2\mathrm{Re}(Bz) + C = 0$: Ευθεία
- Αν $A \neq 0$: $A|z|^2 + 2\mathrm{Re}(Bz) + C = 0$: Κύκλος

$$\frac{a-i\beta}{2}\cdot(x+iy) + \frac{a+i\beta}{2}\cdot(x-iy) = ax+\beta y$$

Μετάθεση – Περιστροφή

Προφανείς παρατηρήσεις

- ~~Κάθε συνάρτηση~~ της μορφής f(z) = z + b, b є C, (μετάθεση - translation) μετατοπίζει το A κατά το διάνυσμα b, στο μιγαδικό επίπεδο.

- Κάθε συνάρτηση της μορφής f(z) = az, a = $re^{i\theta}$ є C, (περιστροφή - rotation) απεικονίζει το A σε ένα όμοιό του σχήμα το οποίο είναι στραμμένο κατά γωνία θ και με μέτρο πολλαπλασιασμένο με το r = |a|.

- Η εικόνα μίας ευθείας ή κύκλου από μία μετάθεση ή μία περιστροφή είναι πάντα μία ευθεία ή κύκλος.
  Πράγματι, από την $A|z|^2 + 2Re(Bz) + C = 0$, αν w = z + b, τότε z = w – b. Μετά την αντικατάσταση προκύπτει το ζητούμενο. Αντίστοιχα όταν $w = az \rightarrow z = a^{-1}w$.

$$f(z) = a \cdot z = \underbrace{r \cdot e^{i\theta}}_{a} \cdot \underbrace{\rho \cdot e^{i\varphi}}_{z} = \underbrace{r \cdot \rho}_{} \cdot e^{i(\theta+\varphi)}$$

Μετασχηματισμοί Möbius

Πρόταση
Η συνάρτηση $f(z) = 1/z$ απεικονίζει μία ευθεία ή κύκλο σε μία ευθεία ή κύκλο.

Απόδειξη
Πράγματι, αν $A|z|^2 + Bz + B^* z^* + C = 0$ είναι μία ευθεία ή κύκλος και $w = 1/z$, τότε $z = 1/w$ και

$$A/|w|^2 + B/w + B^* /w^* + C = 0 \text{ ή}$$

$$C|w|^2 + B^*w + Bw^* + A = 0.$$

Παρατηρούμε, ότι είναι εξίσωση ευθείας ή κύκλου. Η διάκριση εξαρτάται από το αν το αρχικό σχήμα περνά από το 0 ($C = 0$) ή όχι ($C \neq 0$).

Μετασχηματισμοί Möbius

Ορισμός
Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ ad - bc \neq 0,$$

ονομάζεται μετασχηματισμός Möbius ή απλά διγραμμικός μετασχηματισμός.

Τυπικά, το πεδίο ορισμού της f είναι το C - {-d/c}, ωστόσο, ορίζοντας f(-d/c) = ∞ και f(∞) = b/d, μπορούμε να θεωρήσουμε την f ως μία απεικόνιση στο επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο C U {∞} (το οποίο αναπαριστάται γραφικά με την σφαίρα του Riemann).

Σημείωση
Η υπόθεση ad – bc ≠ 0, είναι ουσιαστική και απαραίτητη. Αν ad – bc = 0, τότε f’(z) = 0 και f(z) = σταθερή.

Μετασχηματισμοί Möbius

Παρατηρούμε, ότι

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c}\frac{1}{cz + d} = T_2 \circ R_2 \circ I \circ T_1 \circ R_1(z)$$

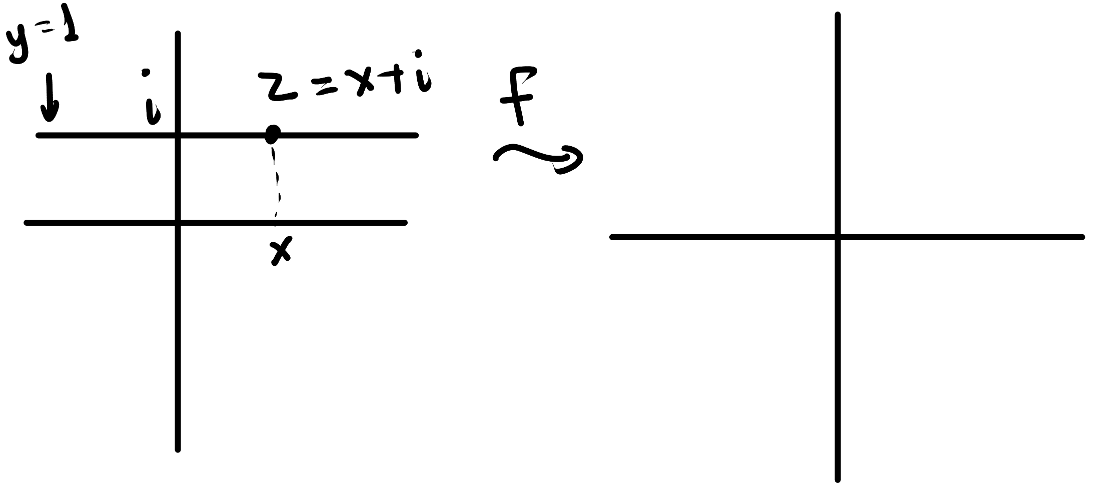
όπου $R_1(z) = cz$, $T_1(z) = z + d$, $I(z) = 1/z$, $R_2(z) = -[(ad - bc)/c]\, z$, $T_2(z) = z + a/c$.

Συμπεραίνουμε, ότι:

Θεώρημα
Η εικόνα μίας ευθείας ή κύκλου μέσω ενός μετασχηματισμού Möbius είναι πάντα ευθεία ή κύκλος.
Προσοχή: Όχι απαραίτητα ευθεία σε ευθεία και κύκλος σε κύκλο.

Ασκήσεις

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας y = 1 μέσω της $f(z) = \dfrac{z - i}{-iz + 1}$



$$f(x+i) = \frac{x+i-i}{-i(x+i)+1} = \frac{x}{2-ix} = \frac{x(2+ix)}{2^2+x^2} = \frac{2x}{4+x^2} + i\,\frac{x^2}{4+x^2}$$

$A = \{z = x+i, x \in \mathbb{R}\}$, $w \in f(A) \Rightarrow w = \dfrac{2x}{4+x^2} + i\,\dfrac{x^2}{4+x^2} = u + iv$

άλυτη

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

$$u = \frac{2x}{4+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{4+x^2} \quad (1)$$

$$(u-u_0)^2+(v-v_0)^2=\rho^2$$

$$u^2 = \frac{4x^2}{(4+x^2)^2}, \quad v^2 = \frac{x^4}{(4+x^2)^2} \Rightarrow u^2 = \frac{4x^2}{\frac{x^4}{v^2}} \Leftrightarrow$$

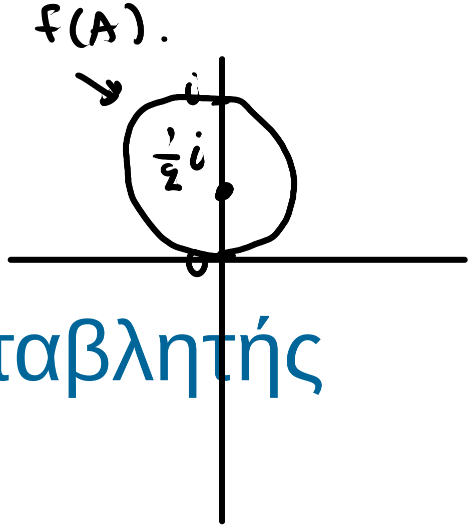
$$\Leftrightarrow u^2 = \frac{4v^2}{x^2} \quad (2)$$

$$(1): (4+x^2)\cdot v = x^2 \Leftrightarrow 4v + x^2\cdot v = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4v}{1-v} \quad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow u^2 = \frac{4v^2}{\frac{\cancel{4}\cancel{v}}{1-v}} \Leftrightarrow u^2 = v\cdot(1-v) \Leftrightarrow u^2+v^2-v=0$$

$$\Leftrightarrow u^2+v^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot v+\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$K\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

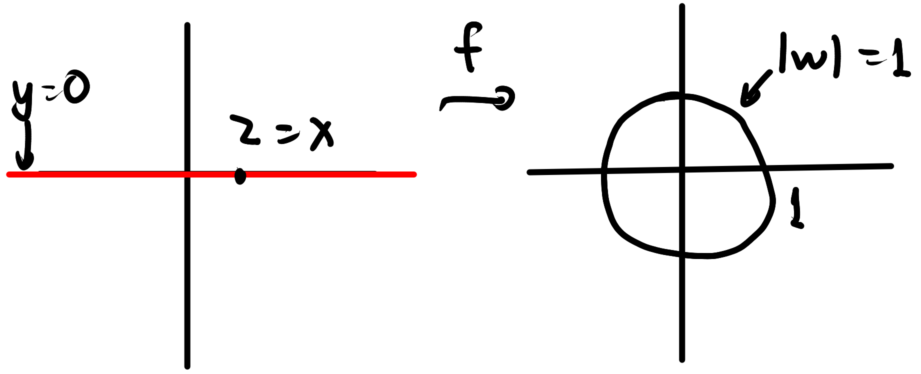


Ασκήσεις

Να δειχθεί ότι η εικόνα του πραγματικού άξονα μέσω της $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Υπόδειξη

Αναλογιστείτε την εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η εικόνα.



$w = u + iv$

$$f(x) = \frac{x-i}{x+i} = \frac{(x-i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} =$$

$$= \frac{x^2 - 2xi + i^2}{x^2 - i^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1} - i\,\frac{2x}{x^2+1}.$$

$$u = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad V = -\frac{2x}{x^2+1}$$

$(x^2+1)^2$

Πρέπει $|w| = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1.$ $u^2+v^2 = \dfrac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{(-2x)^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(x^2+1)^2} = 1.$

άλυτη

Μετασχηματισμοί Möbius

Αν οι συντελεστές του μετασχηματισμού Möbius είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει το παρακάτω:

Θεώρημα

Αν $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, τότε $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ και

η εικόνα κάθε κύκλου με κέντρο στον x'x είναι κύκλος με κέντρο στον x'x ή ευθεία κάθετη στον x'x.

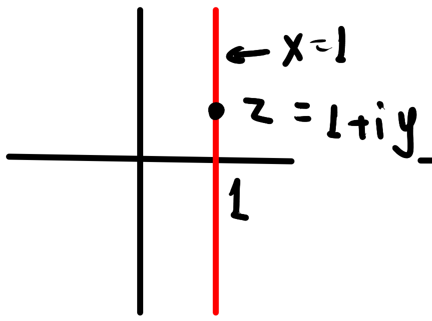
Στην περίπτωση αυτή, αν C μία ευθεία ή ένας κύκλος, για να βρούμε την f(C), αρκεί να βρούμε τα δύο αντιδιαμετρικά σημεία του πάνω στον πραγματικό άξονα.

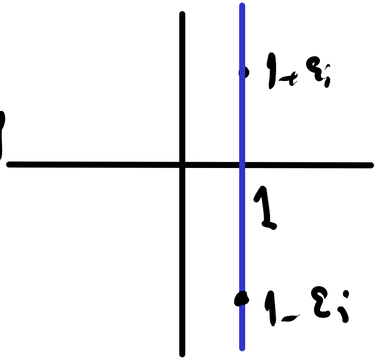
Ασκήσεις

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας x = 1 μέσω της $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Υπόδειξη: Η f έχει πραγματικούς συντελεστές.

Λύση





$$f(1+iy) = \frac{1+iy+1}{1+iy-1} = \frac{2+iy}{iy} = \frac{y-2i}{y} = \underset{\downarrow \atop u}{1} - \underset{\downarrow \atop v}{\frac{2}{y}}\, i$$

Για $y = 0$: $f(1) = \infty \Rightarrow f(A)$: ευθεία.

$$f(1+iy) = 1 - \frac{2}{y} i$$

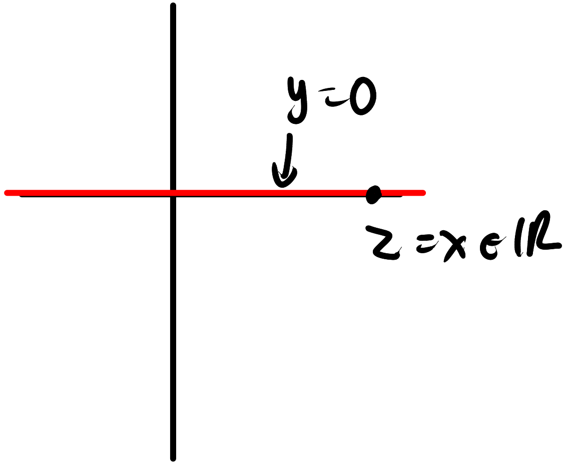
$u = 1 \quad v = \dfrac{2}{y}$

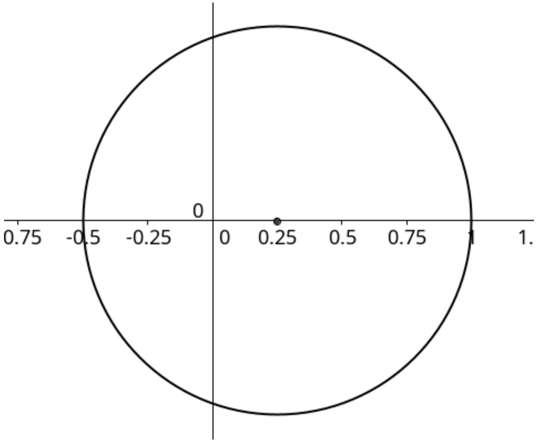
$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

Ασκήσεις

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας y = 0 μέσω της $f(z) = \dfrac{z - i}{z + 2i}$.

Λύση





$u = \dfrac{x^2-2}{x^2+4}, \quad v = \dfrac{3x}{x^2+4}$

$u^2 = \dfrac{x^4-4x^2+4}{(x^2+4)^2}, \quad v^2 = \dfrac{9x^2}{(x^2+4)^2}$

$u^2 = \dfrac{x^4-4x^2+4}{\dfrac{9x^2}{v^2}} = v^2\left(\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9x^2}\right)$

x

$u = \dfrac{x^2-2}{x^2+4} \Leftrightarrow ux^2+4u = x^2-2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4u+2}{1-u}$

$f(x) = \dfrac{x-i}{x+2i} = \dfrac{(x-i)(x-2i)}{x^2+4} = \dfrac{x^2-2}{x^2+4} - i\,\dfrac{3x}{x^2+4}$

$w = u + iv$

$(u,v) \in$ κύκλο

άλυτη

$$(*) \Rightarrow u^2 = v^2 \cdot \left(\frac{1}{9} \, \frac{4u+2}{1-u} - \frac{4}{9} + \frac{4}{9 \cdot \frac{4u+2}{1-u}} \right) \Rightarrow (u-1/4)^2 + v^2 = (3/4)^2$$

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

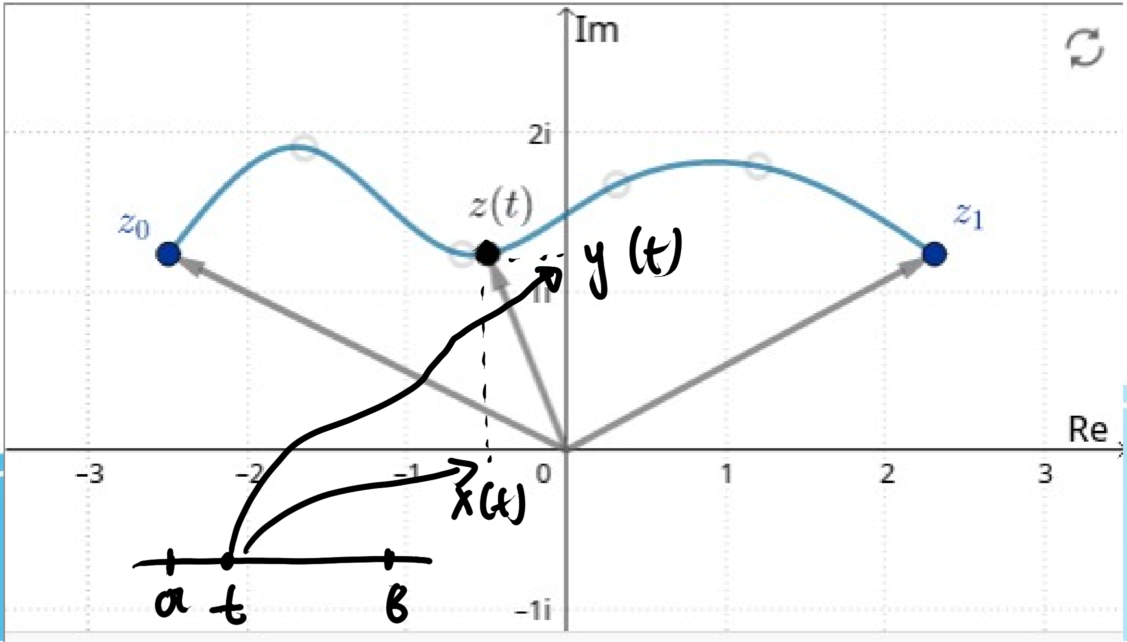
Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Κάθε καμπύλη στο C μπορεί να αναπαρασταθεί από μία εξίσωση της μορφής
z(t) = x(t) + iy(t), α ≤ t ≤ β, όπου **x(t): [α, β]** → **R**, **y(t): [α, β]** → **R**, οι πραγματικές συναρτήσεις που αποδίδουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος κάθε σημείου αντίστοιχα.

Το $z_0 = z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$, λέγεται αρχικό σημείο της καμπύλης και το $z_1 = z(\beta) = x(\beta) + iy(\beta)$, τελικό σημείο. Αν z(α) = z(β) τότε η καμπύλη λέγεται **κλειστή**. Αν η καμπύλη δεν τέμνει τον εαυτό της τότε ονομάζεται **απλή**.

Παράδειγμα ανοικτής, απλής καμπύλης:



Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Παράδειγμα 1

$z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Μία παραμετρική εξίσωση του κύκλου C: $|z| = 1$, είναι η

$$z(t) = \cos t + i \sin t, \ t \in [0, 2\pi],$$

ή πιο απλά $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δεν υπάρχει μοναδική παραμετροποίηση για μία καμπύλη. Ο ίδιος κύκλος ($|z| = 1$) θα μπορούσε να παραμετροποιηθεί με την εξίσωση

$$z(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t), \ t \in [0, 1],$$

ή με την εξίσωση

$$z(t) = e^{\pi i t/2} = \cos(\pi t/2) + i \sin(\pi t/2), \ t \in [0, 4].$$

Παρατηρήστε ότι σε όλες τις παραπάνω παραμετροποιήσεις, ο κύκλος διαγράφεται με τη "*θετική*" φορά, δηλαδή τη φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Φανερά, η έννοια της φοράς έχει νόημα μόνο για κλειστές καμπύλες.

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

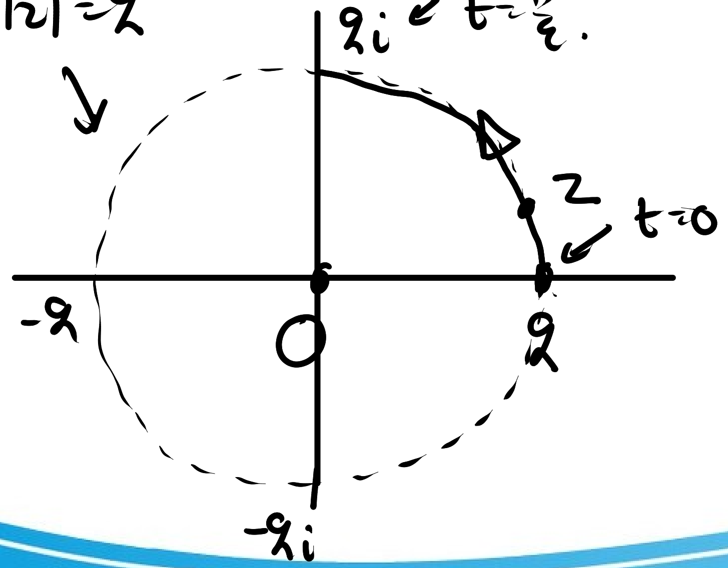
Άσκηση

(α) Να σχεδιαστεί το τόξο C του κύκλου K(0, 2), μεταξύ 2 και 2i.

(β) Να βρεθεί παραμετρική εξίσωση για το C.

$z = 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$

$|z| = 2$



$$z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

$$z(t) = 2e^{i\sqrt{t}}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4}.$$

$$z(t) = 2\cos t + i\,2\cdot\sin t$$

άλυτη

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Παράδειγμα 2

Μία παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος $[z_0, z_1]$, είναι η

$z_1 - z_0$

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0),\ t \in [0, 1].$$

Άσκηση

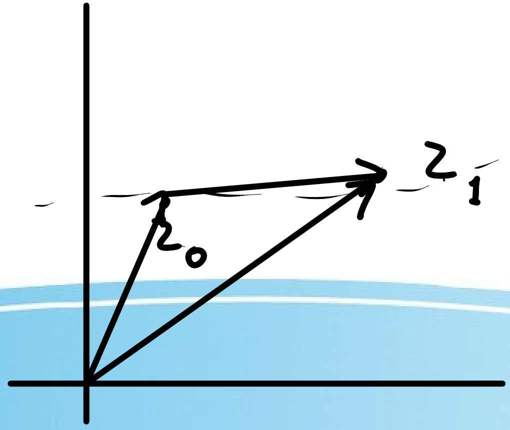
Να βρεθεί μία παραμετρική εξίσωση των ευθυγράμμων τμημάτων μεταξύ των σημείων

α) 1, 1 + i

β) -1 + i, 1 + i

γ) -1 - i, 1 + i

a) $z(t) = 1 + t\cdot(1 + i - 1) = 1 + t\cdot i,\ t \in [0, 1]$



άλυτη

Άσκηση

Αντιστοιχίστε τις παρακάτω εξισώσεις στις εικόνες τους

(α) $z_1(t) = e^{2it}$, $0 < t < 2\pi$. → (6)

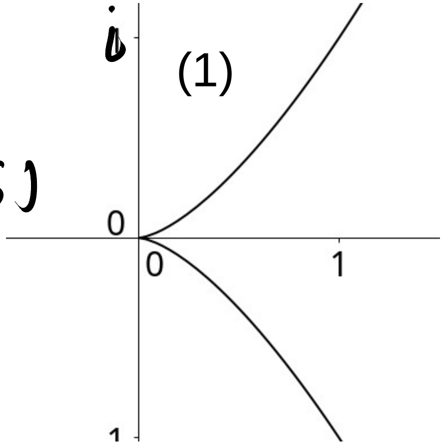
(β) $z_2(t) = i + t$. → (5)

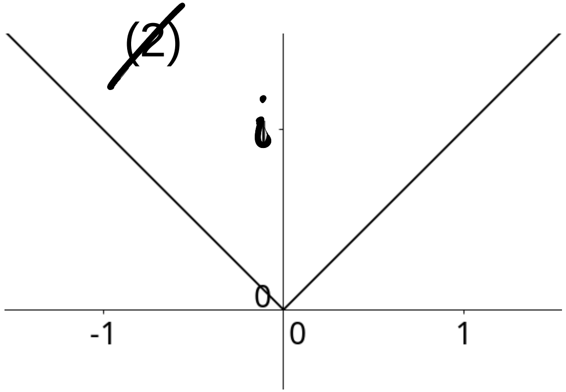
(γ) $z_3(t) = t + i|t|$. → (2)

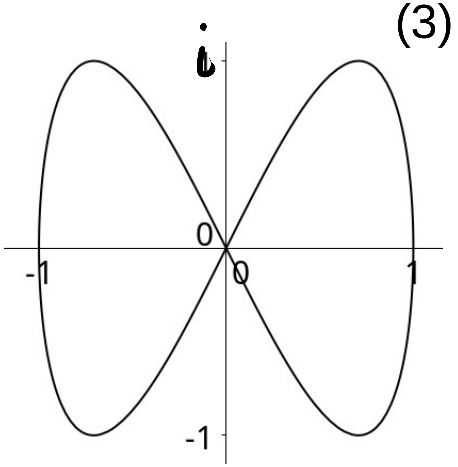
(δ) $z_4(t) = t^2 + it^3$. → (1)

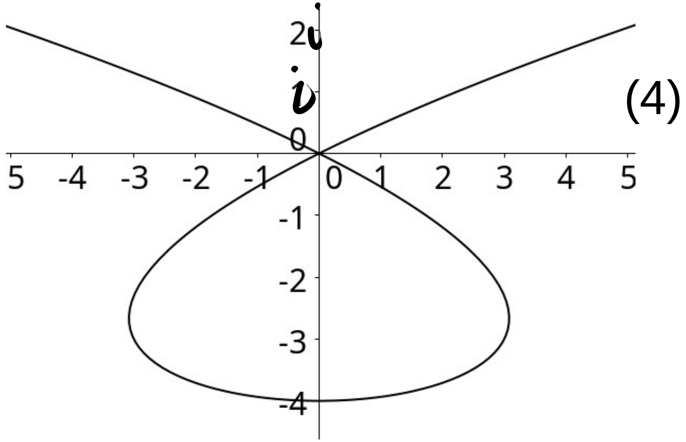
(ε) $z_5(t) = \sin t + i\sin(2t)$, $0 < t < 2\pi$. → (3)

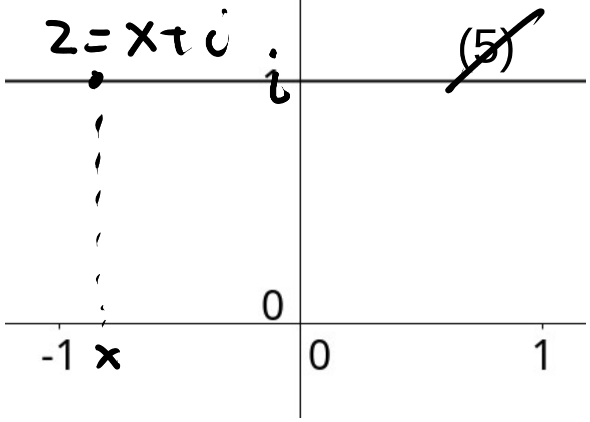
(στ) $z_6(t) = (t^3 - 4t) + i(t^2 - 4)$. → (4)

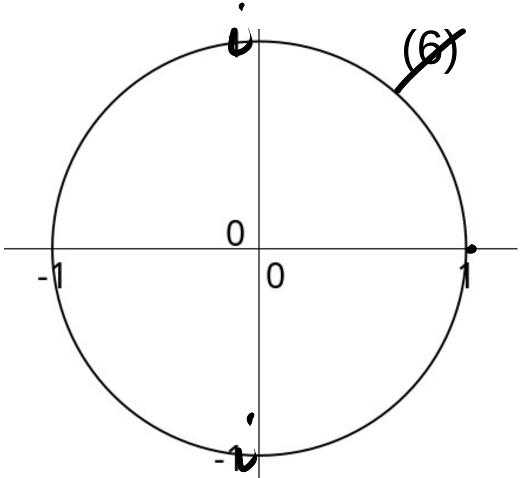












Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

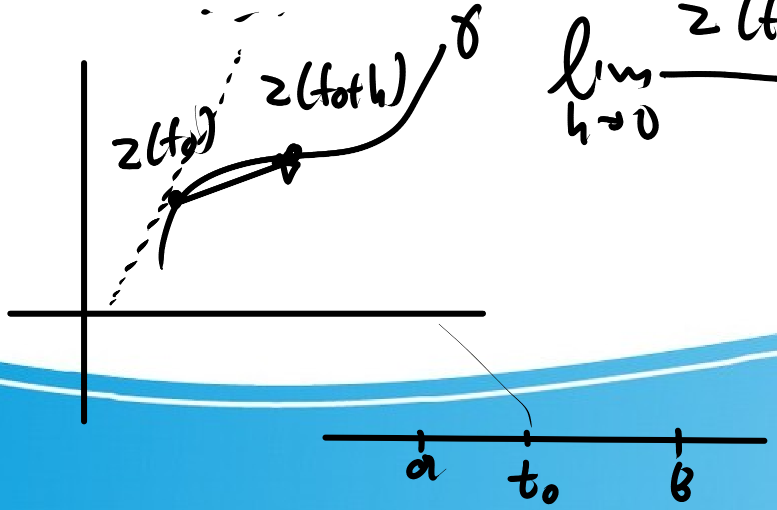
Ορισμός

Έστω γ: z(t) = x(t) + iy(t), α ≤ t ≤ β, μία καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο.

Η καμπύλη γ ονομάζεται **λεία**, αν z(t) ϵ C^1([α, β]), με z’(t) ≠ 0, t ϵ (α, β). Ισοδύναμα, αν ισχύει:

1) z’(t) = x’(t) + iy’(t) ≠ 0, t ϵ (α, β).
2) z’(t) συνεχής στο [α, β].

Αν γ: z(t) = x(t) + iy(t), α ≤ t ≤ β, **είναι μία λεία καμπύλη**, τότε η διεύθυνση της εφαπτόμενης ευθείας στο z(t_0) είναι η z’(t_0).



$$\lim_{h \to 0} \frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h} = z'(t_0)$$

Λείες καμπύλες στο C

Άσκηση

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι λείες και καταγράψτε τα σημεία όπου δεν είναι.

(α) $z_1(t) = e^{2it}$, $0 < t < 2\pi$.

$z_1'(t) = (e^{2it})' = e^{2it}(2it)' = 2i \cdot e^{2it} \neq 0$

(β) $z_2(t) = i + t$.

$z_2'(t) = (i+t)' = 1 \neq 0.$

(γ) $z_3(t) = t + i|t|$.

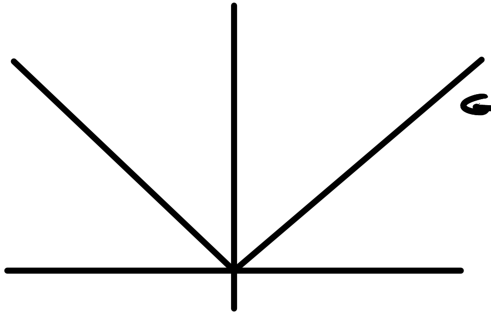
(δ) $z_4(t) = t^2 + it^3$.

(ε) $z_5(t) = \sin t + i\sin(2t)$, $0 < t < 2\pi$.

(στ) $z_6(t) = (t^3 - 4t) + i(t^2 - 4)$.

$z_4'(t) = (t^2 + it^3)' = 2t + i3t^2$

$z_4'(0) = 0 \Rightarrow$ όχι λεία για $t \in \mathbb{R}$.



$z_3(t) = t + i|t|$

$z_3'(t)$: δεν ορίζεται στο 0.

$z_6'(t) = (3t^2 - 4) + 2it \neq 0.$

$z_5'(t) = \cos t + 2i\cos(2t) \neq 0.$

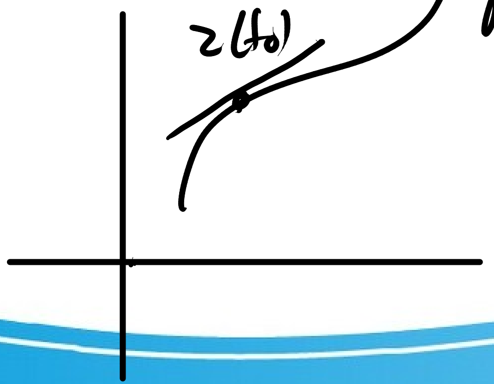
Εφαπτομένη καμπύλης στο C

Αν γ: z(t) = x(t) + iy(t), α ≤ t ≤ β, **είναι μία λεία καμπύλη**, τότε σε κάθε σημείο $z_0 = z(t_0)$ της καμπύλης **ορίζεται εφαπτομένη ευθεία**, η οποία έχει εξίσωση

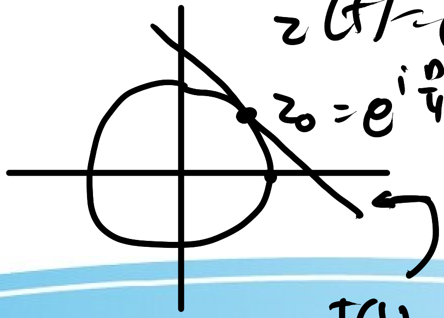
$$\textbf{ε: } l(\lambda) = z(t_0) + \lambda \cdot z'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται ευκολότερα κατανοητή αν οι μιγαδικές ποσότητες ερμηνευθούν ως διανύσματα. Στο πλαίσιο αυτό το $z'(t_0)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης και η l(t) είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του σημείου που κινείται στην καμπύλη C.

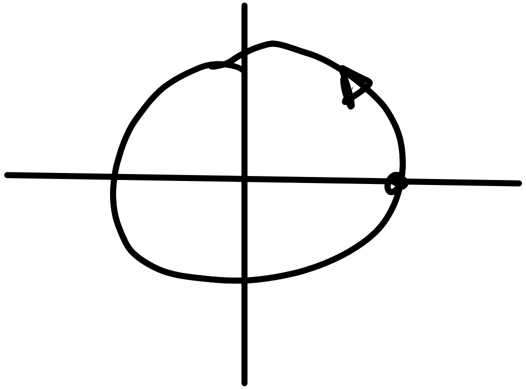
$\gamma : z(t),\ \alpha \le t \le \beta$



$z(t) = e^{it},\ 0 \le t < 2\pi$



$l(\lambda) = e^{i\frac{\pi}{4}} + \lambda \cdot e^{i\frac{\pi}{4}},\ \lambda \in \mathbb{R}$



$z_1(t) = e^{it}$, $0 \le t < 2\pi$

$z_2(t) = e^{it^2}$, $0 \le t < \sqrt{2\pi}$

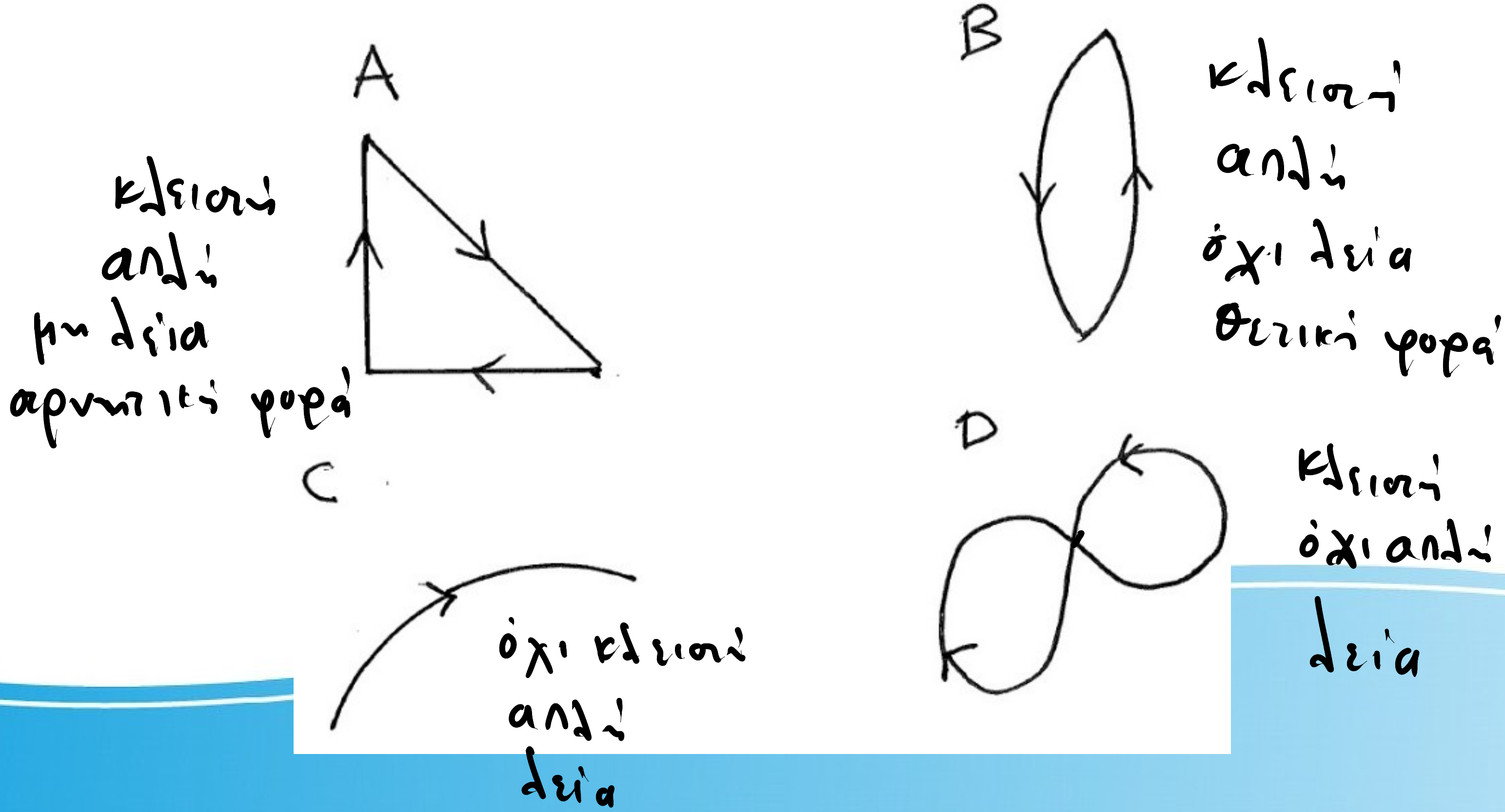
$z_1'(t) = e^{it} \neq 0$.

$z_2'(t) = e^{it^2} \cdot 2t$

Για $t=0$, $z_2'(0)=0$.

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι (α) κλειστές, (β) απλές, (γ) λείες, (δ) με θετική φορά;



Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Άσκηση 2

(α) Να σχεδιαστεί το μονοπάτι C που διατρέχει το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία
1 – i, 1 + i, -1 + i, -1 – i.

(β) Να βρεθεί παραμετρική εξίσωση για το C.

άλυτη

Σύμμορφες απεικονίσεις

Σύμμορφες απεικονίσεις

Ορισμός
Μια ολόμορφη συνάρτηση $f : A \to C$ λέγεται **σύμμορφος μετασχηματισμός** ή **σύμμορφη απεικόνιση** (conformal mapping) στο $D \subset A$, αν $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$.

Παραδείγματα
1. Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι σύμμορφη σε όλο το C.

2. Η συνάρτηση $f(z) = z^2$ είναι σύμμορφη στο $C^* = C - \{0\}$.

3. Η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ είναι σύμμορφη στο $C - \{κπ, κ \in Z\}$.

4. Κάθε μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, είναι σύμμορφος στο $C - \{-d/c\}$.

$f \circ z_1$, $f \circ z_2$

Σύμμορφες απεικονίσεις

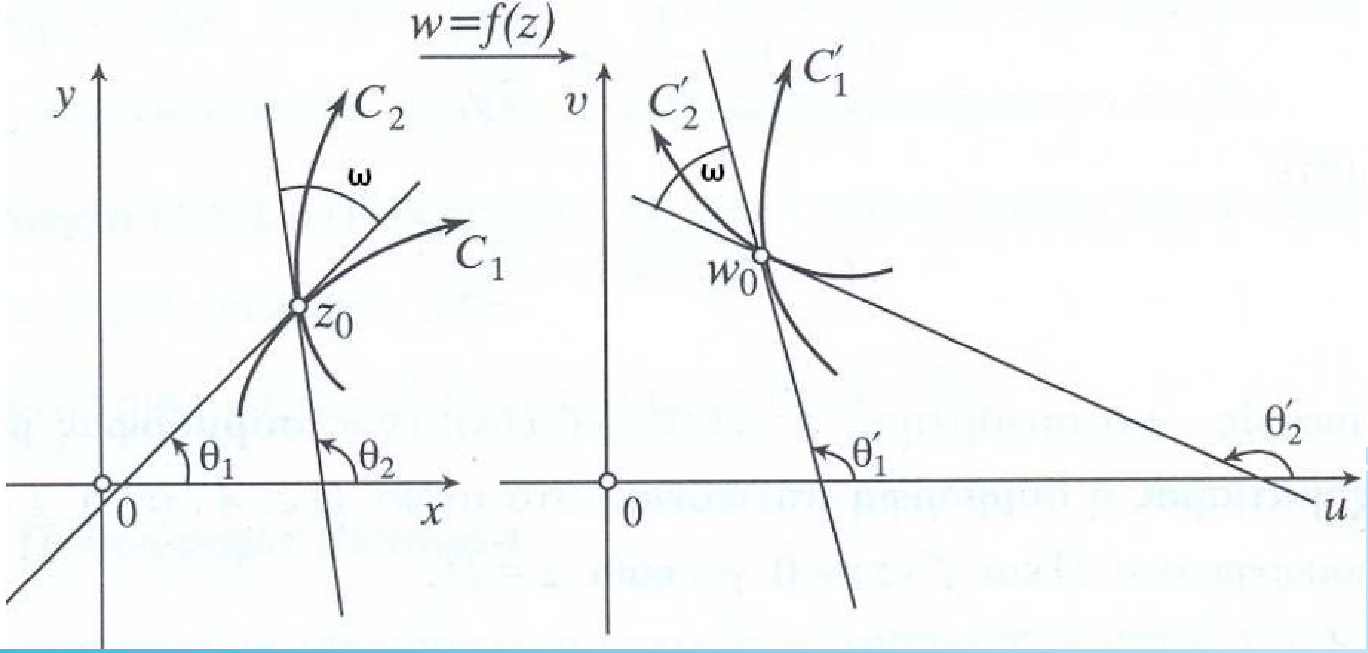
Οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μία αξιοσημείωτη γεωμετρική ιδιότητα.

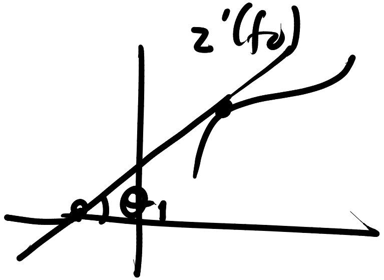
Κάθε σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό.

C_1: $z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$
C_2: $z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t)$

$f(C_1)$: $w_1(t) = f(z_1(t))$
$f(C_2)$: $w_2(t) = f(z_2(t))$

$\theta'_2 - \theta'_1 = \theta_2 - \theta_1 = \omega$





$$z_1'(t_0) = x_1'(t_0) + i y_1'(t_0)$$

$$\tan\theta_1 = \frac{y_1'(t_0)}{x_1'(t_0)}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{y_2'(t_0)}{x_2'(t_0)}$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$w = \rho e^{i\varphi}$$

$$zw = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$$

Απαραιτήτως: $z'(t_0) \neq 0$

$$f(C_1) : w_1(t) = f(z_1(t))$$

$$w_1'(t) = f'(z_1(t))\cdot z_1'(t)$$

$$w_1'(t_0) = f'(z_1(t_0))\cdot z_1'(t_0)$$

$$w_1'(t_0) = f'(z_0)\cdot z_1'(t_0)$$

$$w_2'(t_0) = f'(z_0)\cdot z_2'(t_0)$$

$$\arg(w_1'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg(z_1'(t_0))$$

$$\arg(w_2'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg(z_2'(t_0))$$

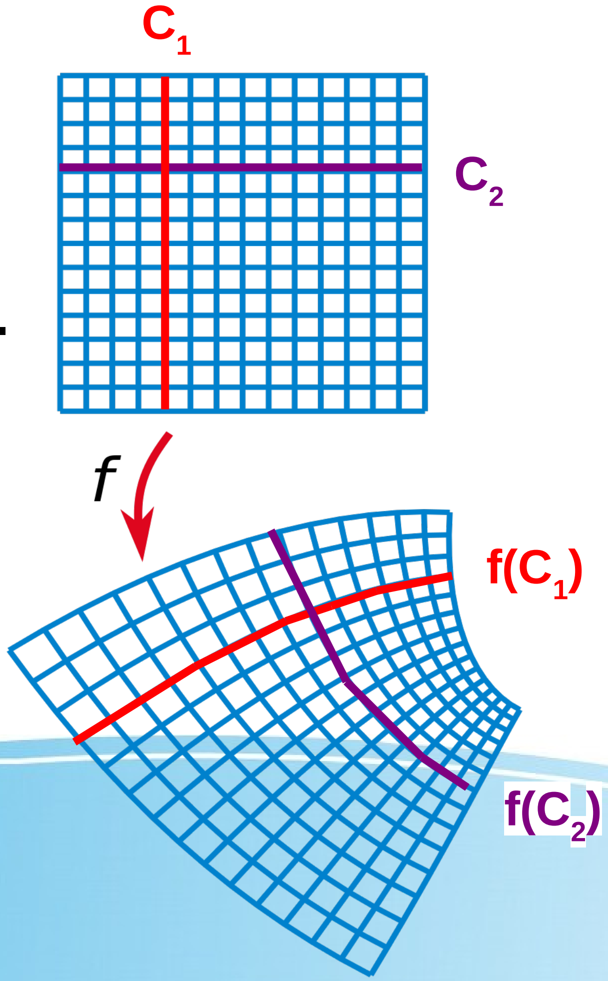
Σύμμορφες απεικονίσεις

Οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μία αξιοσημείωτη γεωμετρική ιδιότητα.

Κάθε σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό.

C_1: $z_1(t) = x_1 + ti$ (ή C_1: Re $z = x_1$)
C_2: $z_2(t) = iy_1 + t$ (ή C_2: Im $z = y_1$)

$$C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow f(C_1) \perp f(C_2)$$



C_1: $z_1(t) = x_1 + ti$ (ή C_1: $\mathrm{Re}\, z = x_1$)

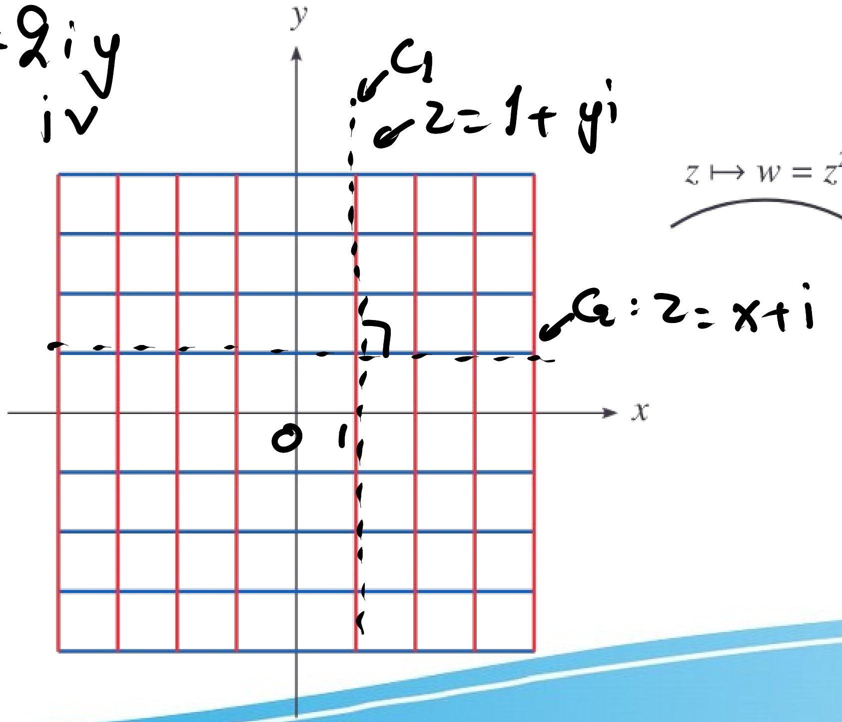
C_2: $z_2(t) = iy_1 + t$ (ή C_2: $\mathrm{Im}\, z = y_1$)

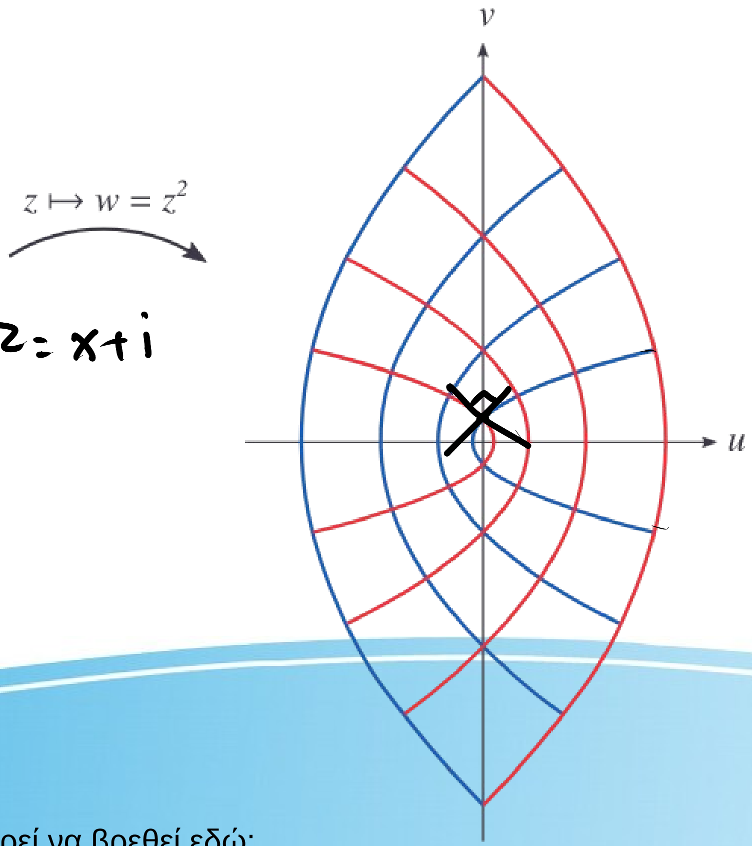
$C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow f(C_1) \perp f(C_2)$, όπου $f(z) = z^2$. $= (x^2 - y^2) + 2ixy$.

$f(C_1)$: $w = \underbrace{(1-y^2)}_{u} + \underbrace{2iy}_{iv}$

$u = 1 - v^2$

$v^2 = 1 - u$





Μία απόδειξη πως η εικόνα ευθειών της μορφής $x = x_0$, $y = y_0$, είναι παραβολές, μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/959949/find-the-sketch-of-y-1-under-the-mapping-fz-z2

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Μία παραμετρική εξίσωση ενός μονοπατιού στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι παρά μία μιγαδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής:

$$w(t) = u(t) + iv(t),\ t \in \Delta \subseteq R.$$

Καθώς, τόσο η παράγωγος όσο και το ολοκλήρωμα έχει την αθροιστική ιδιότητα, ισχύουν για τις συναρτήσεις αυτές, όλα τα γνώριμα συμπεράσματα από την πραγματική ανάλυση.

$$\begin{aligned}
w'(t) &= u'(t) + iv'(t) \\
\int_a^b w(t)\, dt &= \int_a^b u(t)\, dt + i\int_a^b v(t)\, dt \\
\mathrm{Re}\int_a^b w(t)\, dt &= \int_a^b \mathrm{Re}(w(t))\, dt \\
\mathrm{Im}\int_a^b w(t)\, dt &= \int_a^b \mathrm{Im}(w(t))\, dt \\
\left|\int_a^b w(t)\, dt\right| &\leq \int_a^b |w(t)|\, dt
\end{aligned}$$

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Άσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $w_1(t) = 1 + it^2$, $w_2(t) = e^{3it}$. Να βρεθούν τα εξής:

(α) $w'_1(t)$

(β) $w'_2(t)$

(γ) $\int_0^{2\pi} w_1(t)\, dt$

(δ) $\int_0^{2\pi} w_2(t)\, dt$

(ε) Να σχεδιαστούν οι καμπύλες $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

άλυτη