Μιγαδικές Συναρτήσεις

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Σύνοψη 1ου μαθήματος

Σύνοψη 1ου μαθήματος

Ορίσαμε τη **φανταστική μονάδα** ως μία από τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 = -1$ και αναφέραμε πως είναι ένας αριθμός που συμμετέχει όπως οι υπόλοιποι αριθμοί στις 4 πράξεις.

Αναφέραμε πως οι **μιγαδικοί αριθμοί** είναι οι αριθμοί της μορφής $\mathbf{z = \alpha + i\beta,\ \alpha,\ \beta \in R}$.

Ορίσαμε το **μέτρο** και το **όρισμα** κάθε μιγαδικού αριθμού.

Παρουσιάσαμε την εξίσωση του Euler: $\mathbf{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$. **(1)**

Παρατηρήσαμε πως η εξίσωση του Euler τοποθετεί το όρισμα φ ενός μιγαδικού ως εκθέτη στο $e^{i\varphi}$. Στη συνέχεια, οι ιδιότητες του αριθμού e^z επιτρέπουν τη διαχείριση των μιγαδικών αριθμών με τρόπο μοναδικό ως προς αυτά που γνωρίζουμε από το R.

Αναφέραμε τον τύπο του De Moivre: $\mathbf{(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx}$.

Πολική → Καρτεσιανή

1. Να γραφούν στην καρτεσιανή τους μορφή οι αριθμοί

$z_1 = e^{i2\kappa\pi}$

$z_2 = e^{\kappa\pi}$

$z_3 = 5e^{i\pi/2}$

$z_4 = 3e^{i\pi/4}$

$$z_5 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Καρτεσιανή → Πολική

2. Να γραφούν στην τριγωνομετρική τους μορφή οι αριθμοί (α) $z_1 = 3 + 3i$, (β) $z_2 = -3 + 3i$, (γ) $z_3 = 5i$.

Χρησιμότητα της πολικής μορφής

3. Αν $z = 1 + i$, να υπολογιστούν:

   α) Η πολική μορφή του z.

   β) Η πολική μορφή του z^7.

   γ) Η καρτεσιανή μορφή του z^7.

Ο πολλαπλασιασμός με i

4. (α) Να βρεθεί η πολική μορφή του i.
   (β) Αν z ϵ C, σημειώστε στο μιγαδικό επίπεδο τους αριθμούς z, iz.

Ισότητα στην πολική μορφή

5. Αν $z = |z|e^{i\varphi}$ και $w = |w|e^{i\theta}$, να δείξετε ότι

$z = w$ αν και μόνο αν **$|z| = |w|$** και **$\varphi = 2k\pi + \theta,\ k \in \mathbb{Z}$.**

Η e^z, $z \in C$, δεν είναι 1 – 1

6. Να δειχθεί ότι

- $e^{2\kappa\pi i} = 1$, $\kappa \in Z$.
- $e^z = 1$, αν και μόνο αν $z = 2\kappa\pi i$, $\kappa \in Z$.
- **$e^z = e^w$,** αν και μόνο αν **$z = w + 2\kappa\pi i$, $\kappa \in Z$.**

Ο αριθμός $\log z$, $z \in C^*$

$e^z = e^w \Rightarrow z = w + 2k\pi$

Ο αριθμός log z, z є C*

Ορισμός

Ο λογάριθμος **log z** ενός z є C, ορίζεται να είναι ***κάθε*** **αριθμός w, τέτοιος ώστε e^w = z**.

log z = {w є C: e^w = z}

Αξιοποιώντας την εξίσωση του Euler, και τις ιδιότητες της εκθετικής, μπορούμε να βρούμε τη μορφή του. Πράγματι, για z є C,

$e^{\log z} = z = \|z\| e^{i \arg z}$	(από εξίσωση του Euler, arg z: το όρισμα του z)
$= e^{\ln\|z\|} e^{i \arg z}$	($x = e^{\ln x}$, για κάθε x є (0, +∞))
$= e^{\ln\|z\| + i \arg z}$	($e^{z+w} = e^z e^w$, z, w є C)

Συμπεραίνουμε, ότι **log z = ln |z| + i (arg z + 2kπ), z є C* = C – {0}**

ή απλά

log z = ln |z| + i arg z, z є C* = C – {0}.

Ο αριθμός log z, z ϵ C*

Παρατηρήσεις (1 / 2)

1. Μεταξύ των άπειρων τιμών του $\log z = \ln |z| + i(\arg z + 2\kappa\pi)$, κ ϵ Z, ο κλάδος που αντιστοιχεί στο πρωτεύον όρισμα του z, λέγεται **κύριος κλάδος (principal value)** του λογαρίθμου του z και συμβολίζεται με Log z. Δηλαδή είναι:

$$\mathbf{Log\, z = \ln |z| + i\, Arg\, z,\ Arg\, z \in (-\pi, \pi].}$$

2. Από τον ορισμό του λογαρίθμου είναι $\mathbf{e^{\ln z} = z}$. Ωστόσο, η αντίστροφη σχέση $\mathbf{\log e^z = z}$ **δεν ισχύει** (το αριστερό μέλος έχει άπειρες τιμές).

3. Αν η συνάρτηση **log** αντικατασταθεί από τον κύριο της κλάδο **Log** τότε η σχέση $\mathbf{Log\, e^z = z}$, ισχύει μόνο για τα σημεία z του επιπέδου που βρίσκονται μέσα στη λωρίδα $\mathbf{\{z \in C: -\pi < Im z \leq \pi\}}$.

Πράγματι, τότε $\mathrm{Arg}\, e^z = \mathrm{Im}\, z$, και $\mathrm{Log}\, e^z = \ln |e^z| + i\, \mathrm{Arg}\, e^z = \ln e^{\mathrm{Re} z} + \mathrm{Arg}\, e^{i(\mathrm{Im}\, z + 2\kappa\pi)} = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z = z$.

Δηλαδή:

$$\mathbf{Log\, e^z = z,\ -\pi < Im z \leq \pi.}$$

Άσκηση

$\log z = \ln|z| + i \arg z.$

Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω λογαρίθμων:

(α) log i (β) log2 (γ) Log (2i) (δ) Log (-5) (ε) Log(1 + i)

$\log i = \ln|i| + i\arg(i) = \cancel{\ln 1} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

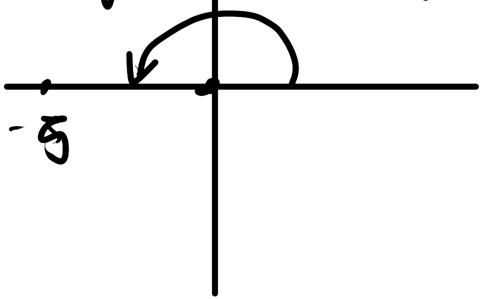
$\log 2 = \ln|2| + i\arg(2) = \ln 2 + 2k\pi i.$

$\mathrm{Log}(2i) = \ln|2i| + i\,\mathrm{Arg}(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}.$

$\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi].$

$$\operatorname{Log}(-5) = \ln|-5| + i\cdot\operatorname{Arg}(-5) = \ln 5 + i\cdot\pi.$$

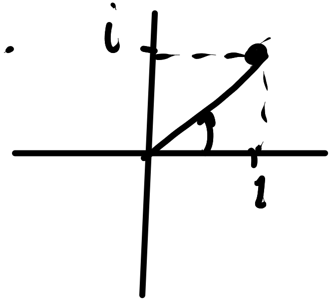
$$\arg(-5) = \pi + 2k\pi$$



$$\log(-5) = \ln 5 = i(-\pi + 2k\pi)$$

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$



Ο αριθμός log z, z ϵ C*

Παρατηρήσεις (2 / 2)

4. Η ιδιότητα ln(α·β) = ln α + ln β, που ισχύει για α, β ϵ R^+, **δεν ισχύει** στους μιγαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα

$$\mathrm{Log}((-1)i) = \mathrm{Log}(-i) = \ln|-i| - i\pi/2 = - i\pi/2, \text{ αλλά}$$

$$\mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}\, i = \ln|-1| + i\pi + \ln|i| + i\pi/2 = i3\pi/2.$$

5. Ανάλογα, **δεν είναι αληθής** η ιδιότητα $\log \bar{z} = \overline{\log z}$

6. Στη βιβλιογραφία, ο μιγαδικός λογάριθμος συμβολίζεται και Ln z.

Δυνάμεις στο C

Ορισμός

Για z, w ϵ C, ορίζουμε

$$z^w = e^{w \log z} = e^{w (\ln|z| + i \arg(z))}$$

Καθώς το log z, παίρνει άπειρες τιμές το z^w, δεν ορίζεται μονότιμα. Για να προκύψει μία μοναδική τιμή, αρκεί να επιλέξουμε έναν από τους κλάδους του λογαρίθμου.

Άσκηση

Να υπολογιστεί το 2^i (κύριος κλάδος)

$$2^i = e^{i \cdot \log 2} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{i \cdot \ln 2 - 2k\pi} = e^{-2k\pi} \cdot e^{i \ln 2}$$

$$= e^{-2k\pi} \cdot (\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Κυριος κλαδος

$2^i = e^{i \ln 2}$.

$$\log i = \cancel{\ln|i|} + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{Log}\, i = i\frac{\pi}{2}$$

Ασκήσεις

Άσκηση

Να υπολογιστεί το i^i (κύριος κλάδος).

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Log}\, i} = e^{i\cdot\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το $(1 + i)^{1 - i}$ (κύριος κλάδος).

Υπόδειξη

Είναι $\mathrm{Arg}(1 + i) = \pi/4$ και $|1 + i| = 2^{1/2}$

Ασκήσεις

Άσκηση

Να λυθεί η εξίσωση Log z = iπ/2

Υπόδειξη: Εξισώστε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο πλευρών της εξίσωσης.

$$\mathrm{Log}\, z = i\frac{\pi}{2} \;\xRightarrow{\not\Leftarrow}\; e^{\mathrm{Log}\, z} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \underline{z = i}$$

Ασκήσεις

Άσκηση

Να λυθεί η εξίσωση $e^z = \pi i$

Υπόδειξη: Εξισώστε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο πλευρών της εξίσωσης.

$$e^z = \pi i \Longleftrightarrow e^x \cos y + i e^x \sin y = \pi i \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} e^x \cdot \cos y = 0 \\ e^x \cdot \sin y = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \cos y = 0 \Leftrightarrow y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Για $y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $e^x \cdot \sin(\cancel{2k\pi + \tfrac{\pi}{2}}) = \pi \Leftrightarrow x = \ln \pi$, όπου $\sin(2k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = 1$

$$e^z = \pi i \Rightarrow z = \ln \pi + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας στο C (συνέχεια)

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας στο C

Η τετραγωνική ρίζα στο C, ορίζεται ανάλογα με το R, με τη διαφορά πως δεν υπάρχει πλέον ο περιορισμός της μη αρνητικότητας και πως η ρίζα έχει πλέον 2 τιμές.

Ορισμός

Αν z ϵ C, τότε $\sqrt{z} = \{ w \in \mathbb{C} : w^2 = z \}$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $\left(\sqrt{z}\right)^2 = z$.

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας στο C

Παράδειγμα
Να υπολογιστεί η $\sqrt{9+40\,i}$

Λύση
Λύνουμε την εξίσωση $\sqrt{9+40\,i} = \alpha + \beta i$

από την οποία βρίσκουμε (πως;) ότι $\alpha^2 - \beta^2 = 9$ και $2\alpha\beta = 40$.

Λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε (πως;) ότι

$$\sqrt{9+40\,i} = 5 + 4\,i \quad \text{ή} \quad \sqrt{9+40\,i} = -5 - 4\,i$$

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας στο C

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ως μιγαδικός αριθμός η $\sqrt{1}$

Έστω $\sqrt{1} = α + βi$. Τότε θα είναι $1 = α^2 – β^2 + 2αβi$, από όπου προκύπτει $α^2 – β^2 = 1$ και $2αβ = 0$ $\rightarrow$ $β = 0$ και $α = \pm 1$. Άρα $\sqrt{1} = \pm 1$.

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας στο C

Δραστηριότητα

Να υπολογιστεί η $\sqrt{i}$

Υπόδειξη

Έστω ότι $\sqrt{i} = \alpha + \beta i$ Υψώστε στο τετράγωνο, εξισώστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος και λύστε το σύστημα που προκύπτει.

Αντίστοιχα ορίζονται οι ρίζες μεγαλύτερης τάξης:

Ορισμός

Αν z є C, τότε $\sqrt[n]{z} = \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \}$

Δραστηριότητα

Να υπολογιστεί η $\sqrt[3]{1}$ και η $\sqrt[3]{i}$

Υπόδειξη

Θα πρέπει να βρείτε 3 διαφορετικές τιμές.

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας στο C

Παρατηρήσεις

1. Απόρροια του γεγονότος πως η τετραγωνική ρίζα αντιστοιχεί σε σύνολο δύο μιγαδικών αριθμών, είναι μία πολύ σημαντική συνέπεια που πρέπει να θυμόμαστε:

Οι ιδιότητες $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$, $\sqrt{\dfrac{z}{w}} = \dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{w}}$ δεν ισχύουν (γενικά) στο C.

Ειδικότερα, για να ισχύει $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$, πρέπει Arg z + Arg w < 2π.

Ωστόσο, οι τελευταίες ιδιότητες ισχύουν όταν τουλάχιστον ένα από τα z, w είναι πραγματικός αριθμός, με τη διευκρίνηση ότι εκφράζουν ισότητες συνόλων.

2. Στο C, ισχύει η ιδιότητα $\sqrt{\sqrt{z}} = \left(z^{1/2}\right)^{1/2} = z^{1/4} = \sqrt[4]{z}, \ z \neq 0.$

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας στο C

Παρατηρήσεις

3. Με την αξιοποίηση της πολικής μορφής των μιγαδικών αριθμών, της εξίσωσης του Euler και τον τύπο του De Moivre, αποδεικνύεται ότι $\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$

Πράγματι, αν $z = re^{i \arg z}$, με $\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2κπ$, $κ \in Z$, τότε $z^2 = r^2 e^{2i \arg z}$ και

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{r^2 e^{2i \arg z}} = \sqrt{r^2}\sqrt{e^{i \arg z}} = \pm r e^{i \arg z} = \pm z$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\sqrt{r^2} = \{-r, r\} = \pm r$.

Εναλλακτικά, το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει από τον ορισμό (όπως αποδείχθηκε στο 1ο μάθημα).

Μοναδιαίες ρίζες της φανταστικής μονάδας

Εισαγωγικό πρόβλημα

$z = re^{i\varphi}$

$r = 1$

Βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z που έχουν τις ιδιότητες:
(α) Ο z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{C}$.
(β) $z^6 = 1$.

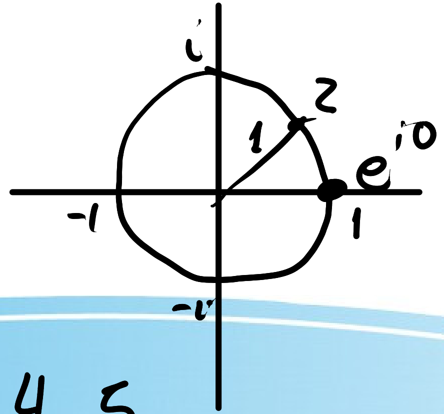
Υποδείξεις
1. Γράψτε τον z στην πολική του μορφή και αντικαταστήστε στην εξίσωση.
2. Αναλογιστείτε τη γεωμετρική σημασία του πολλαπλασιασμού στο C, την περίπτωση της ύψωσης στην 6η δύναμη και εντοπίστε τις λύσεις της εξίσωσης.

$z = e^{i\varphi}$

$z^6 = 1 \Leftrightarrow (e^{i\varphi})^6 = 1 \Leftrightarrow e^{i6\varphi} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{6}, \; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$e^{i0} = 1, \; e^{i\frac{\pi}{6}}$



Ρίζες της μονάδας

Ορισμός
Ο μιγαδικός αριθμός z καλείται **ρίζα της μονάδας** αν $z^n = 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Φανερά, ένας μιγαδικός αριθμός θα είναι ρίζα της μονάδας αν και μόνον αν έχει μέτρο 1 ($|z| = 1$), δηλαδή αν και μόνον αν είναι της μορφής $z = e^{i\varphi}$.

Ρίζες της μονάδας

Εύρεση των n – οστών ριζών της μονάδας

Λύνοντας την εξίσωση $z^n = 1$, για $z = e^{i\varphi}$ παίρνουμε:

$e^{in\varphi} = 1$	(ιδιότητες εκθετικής)
$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = 1$	(εξίσωση Euler)
$\cos(n\varphi) = 1$ και $\sin(n\varphi) = 0$	(ισότητα μιγαδικών αριθμών)
$n\varphi = 2\kappa\pi$ και $n\varphi = 2\kappa\pi$ ή $n\varphi = 2\kappa\pi - \pi$	(επίλυση $\cos x = \alpha$, $\sin x = \alpha$)
$n\varphi = 2\kappa\pi$	(κοινές λύσεις)
$\varphi = 2\kappa\pi / n$, $\kappa \in Z$	(όλες οι λύσεις)
$\varphi = 2\kappa\pi / n$, $\kappa \in 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.	**(διακεκριμένες λύσεις)**

Εναλλακτικά: $e^{in\varphi} = 1 \leftrightarrow e^{in\varphi} = e^{2\kappa\pi i} \leftrightarrow n\varphi = 2\kappa\pi \leftrightarrow \varphi = 2\kappa\pi/n$.

Ρίζες της μονάδας

Βρήκαμε ότι, αν $n \in N$ και U_n είναι το σύνολο των n – οστών ριζών της μονάδας, τότε:

$$U_n = \{e^{2\kappa\pi i/n}, \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

ή

$$U_n = \{\cos(2\kappa\pi / n) + i\sin(2\kappa\pi / n), \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Ρίζες της μονάδας

Δραστηριότητα
Να δείξετε ότι $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

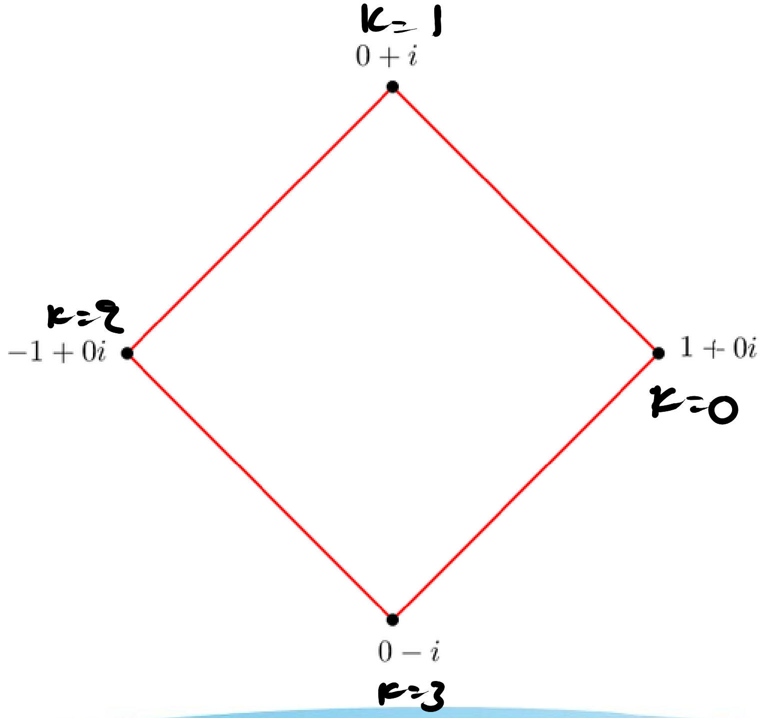
$$z^4 = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z = e^{i0} = 1$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z = e^{i\pi} = -1$$

$$z = e^{i\frac{6\pi}{4}} = -i$$



Ρίζες της μονάδας

Άσκηση
Να δειχθεί ότι κάθε 4η ρίζα της μονάδας είναι και 8η ρίζα της μονάδας.

z: 4η ρίζα $\Rightarrow z^4 = 1 \Rightarrow (z^4)^2 = 1^2 \Rightarrow z^8 = 1 \Rightarrow z$: 8η ρίζα

Ρίζες της μονάδας

Άσκηση

Τι πρέπει να ισχύει για τα m, n, ώστε μία n - οστή ρίζα της μονάδας να είναι και m – οστή ρίζα της μονάδας;

$\exists \lambda : m = \lambda \cdot n$

$z^n = 1 \Rightarrow (z^n)^\lambda = 1^\lambda \Leftrightarrow z^m = 1 \Rightarrow z : m$ ρίζα.

$\Rightarrow n / m.$

$z^m = 1$

ν – οστές ρίζες μιγαδικού z_0

Έστω $z_0 = r_0 e^{i \arg z_0}$. Αναζητούμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^n = z_0.$$

Αν $z = |z|e^{i\arg z}$, τότε $z^n = |z|^n e^{i\, n \arg z}$. Είναι, $z^n = z_0 = r_0 e^{i \arg z_0}$ άρα πρέπει να είναι:

$$|z|^n = |z_0| \text{ ή } |z| = r_0^{1/n}, \text{ και}$$

$$n \arg z = \arg z_0 \text{ ή } \arg z = (\arg z_0) / n = (\operatorname{Arg} z_0 + 2\kappa\pi) / n, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Συμπεραίνουμε, ότι $z = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, όπου $\theta = \operatorname{Arg} z_0$.

$$z^n = z_0 \Rightarrow \left(\frac{z}{|z_0|^{\frac{1}{n}}}\right)^n = e^{i\arg(z_0)} \Rightarrow z = |z_0|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},$$

$$\theta = \operatorname{Arg}(z_0).$$

ν – οστές ρίζες μιγαδικού z_0

Άσκηση

Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $z^4 = -1$ σε πολική και καρτεσιανή μορφή.

Υπόδειξη: $-1 = e^{i\pi}$

$$z^4 = -1 \iff z^4 = e^{i\pi} \iff z = e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z = e^{i\theta}, \quad z^4 = e^{4i\theta}$$

$$e^{4i\theta} = e^{i\pi} \Rightarrow 4i\theta = i\pi + 2k\pi i$$

$$4\theta = \pi + 2k\pi \iff \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$$

$$z^4 = -2 = 2e^{i\pi}, \quad |z| = \sqrt[4]{2}, \quad z = \sqrt[4]{2}\, e^{i\theta}$$

Συναρτήσεις μίας μιγαδικής μεταβλητής

Συναρτήσεις μίας μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός
Μιγαδική συνάρτηση $f: A \to C$ μίας μιγαδικής μεταβλητής ονομάζεται κάθε αντιστοιχία μεταξύ δύο υποσυνόλων του C, η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού $A \subseteq C$ σε **ένα ακριβώς** στοιχείο του συνόλου τιμών f(A). Γράφουμε $w = f(z)$, $z \in A$.

Η μοναδικότητα των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων στο C, ως προς το αποτέλεσμα που παράγουν, επιτρέπει τον ορισμό κάποιων απλών μιγαδικών συναρτήσεων.

- Κάθε αντιστοίχιση της μορφής $w = P(z)$ είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση στο C.

- Κάθε αντιστοίχιση της μορφής $w = P(z) / Q(z)$ είναι καλώς ορισμένη σε όλο το C εκτός από τις ρίζες του Q(z). Π.χ. η συνάρτηση $f(z) = 1/z$ είναι καλώς ορισμένη στο C*.

Σημείωση: Καλώς ορισμένη ονομάζεται μία συνάρτηση για την οποία είναι σαφώς προσδιορισμένο το πεδίο ορισμού της και είναι βέβαιο πως κάθε τιμή στο πεδίο ορισμού αντιστοιχεί σε ακριβώς μία τιμή στο σύνολο τιμών.

Συναρτήσεις μίας μιγαδικής μεταβλητής

Παραδείγματα (καλώς ορισμένων) μιγαδικών συναρτήσεων

- $w = P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z^1 + \alpha_0$
- $w = P(z) / Q(z) = (\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0) / (\beta_n z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \dots + \beta_0)$, $Q(z) \neq 0$.
- $w = \mathrm{Re}(z)$ (από το C στο R)
- $w = \mathrm{Im}(z)$ (από το C στο R)
- $w = \mathrm{Arg}(z)$ (από το C* στο R)
- $w = z^2$
- $w = \bar{z}$
- $w = 1/z$
- $w = e^z$ (εκθετική συνάρτηση)

Σημείωση

Η απεικόνιση w = arg z = Argz + 2κπ δεν αποτελεί συνάρτηση με την έννοια της πραγματικής ανάλυσης. Ωστόσο, στη μιγαδική ανάλυση, απεικονίσεις που αποδίδουν πολλές εικόνες, είναι αποδεκτές ως συναρτήσεις και ονομάζονται στη βιβλιογραφία πλειονότιμες ή πλειότιμες συναρτήσεις.

Συναρτήσεις ακέραιων δυνάμεων στο C

Καθώς, ο πολλαπλασιασμός ορίζεται καλώς στο C και έχει πάντα μοναδικό αποτέλεσμα, είναι φανερό πως ορίζεται καλώς και κάθε δύναμη της μορφής z^n, με $n \in N$, δηλαδή

Η απεικόνιση $z \to z^n$, $n \in N$, είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση στο C.

Καθώς $z^{-1} = 1 / z$, ορίζεται καλώς και κάθε δύναμη της μορφής z^m, με $m \in Z$, δηλαδή.

Η απεικόνιση $z \to z^m$, $m \in Z$, είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση στο C (ή στο C*).

$z \to z^a$, $a \in \mathbb{Z}$ $\qquad z^a = e^{a \log z}$,

Λογαριθμική συνάρτηση

Λογαριθμική συνάρτηση

Πεδίο ορισμού και τύπος της λογαριθμικής συνάρτησης (1 / 4)

Έστω $z \in C$ και φ ένα όρισμά του. Η αντιστοιχία

$$z \to \log z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi),\ k \in Z,$$

ορίζεται καλώς σε όλο το C^* αποδίδοντας ωστόσο άπειρες τιμές στο $\ln z$.

Άρα, *δεν είναι συνάρτηση*.

Για να γίνει συνάρτηση, πρέπει να περιορίσουμε το C^* σε ένα σύνολο στο οποίο το $\arg z$ να *μην είναι δυνατόν* να πάρει 2 διαφορετικές τιμές.

Λογαριθμική συνάρτηση

Πεδίο ορισμού και τύπος της λογαριθμικής συνάρτησης (2 / 4)

Μία απλή λύση θα ήταν να ορίζαμε

$$z \to \mathcal{L}og\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z, \quad -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi.$$

Με τον τρόπο αυτό μπορεί να οριστεί συνάρτηση στο C*, αλλά αυτή δεν θα είναι συνεχής για τα σημεία του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα. Για παράδειγμα, αν

- $\alpha_n \to -1$ με Re $\alpha_n > 0$, τότε $\ln(\alpha_n) \to i\pi$, ενώ αν
- $\beta_n \to -1$ με Re $\beta_n < 0$, τότε $\ln(\beta_n) \to -i\pi \neq \ln(\alpha_n)$.

Καθώς, είναι επιθυμητή η συνέχεια της συνάρτησης που θα προκύψει, η παραπάνω επιλογή δεν είναι ιδανική.

Λογαριθμική συνάρτηση

Πεδίο ορισμού και τύπος της λογαριθμικής συνάρτησης (3 / 4)

Ο πιο απλός τρόπος για να πετύχουμε η συνάρτηση που θα προκύψει να είναι συνεχής, είναι να χαράξουμε μία γραμμή (ευθεία ή καμπύλη) από το 0 έως το ∞ και να κρατήσουμε το μέρος του C* χωρίς αυτήν την καμπύλη.

Η γραμμή αυτή λέγεται **τομή διακλαδώσεως (branch cut)** και σχεδόν πάντα επιλέγεται να είναι το αρνητικό μέρος του πραγματικού άξονα
$\{z \in C: \mathrm{Re}\, z \leq 0, \mathrm{Im}\, z = 0\} = (-\infty, 0]$.

Δηλαδή ουσιαστικά, επιλέγουμε την κύρια τιμή του λογαρίθμου, με λίγο πιο περιορισμένο argument στις τιμές της.

Λογαριθμική συνάρτηση

Πεδίο ορισμού και τύπος της λογαριθμικής συνάρτησης (4 / 4)

Στο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου που απομένει (C – (-∞, 0]), είναι δυνατόν να οριστεί καλώς ο λογάριθμος ως συνεχής συνάρτηση.

Συμπερασματικά: Η αντιστοιχία

$$\mathbf{z \to \log z,\ \text{με}\ \log z = \ln |z| + i\,\mathrm{Arg}\, z,\ z \in C - (-\infty, 0],}$$

είναι μία καλώς ορισμένη συνεχής συνάρτηση και ονομάζεται **μιγαδική συνάρτηση του λογαρίθμου.** Γράφουμε και

$$\mathbf{\mathrm{Log}\, z = \ln |z| + i\,\mathrm{Arg}\, z,\ z \in C - (-\infty, 0],}$$

Σημείωση: Η τομή διακλαδώσεως θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε άλλη γραμμή, επιλογή που θα οδηγούσε σε άλλη συνάρτηση λογαρίθμου (από τη στιγμή που θα ήταν διαφορετικό το πεδίο ορισμού). Στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει διαφοροποίηση στην έννοια και όλες αυτές οι επιλογές αναφέρονται ως συναρτήσεις μιγαδικού λογαρίθμου. Ακόμα περισσότερο, αντί της τομής διακλάδωσης θα μπορούσε να οριστεί ένα πιο περίπλοκο υποσύνολο του C* (π.χ. σε μορφή σπείρας), αρκεί να ικανοποιούσε την προϋπόθεση να μην περιέχει κάποιο σημείο και την περιστροφή του κατά 2π rads.

Εύρος εφαρμογής των τομών διακλάδωσης (branch cut)

Εύρος εφαρμογής των τομών διακλάδωσης (branch cut)

Η ανάγκη περιορισμού του πεδίου ορισμού της συνάρτησης λογαρίθμου, προέκυψε από την ιδιότητά της να αντιστοιχεί περισσότερες από μία τιμές σε κάθε z.

Αυτό το χαρακτηριστικό με τη σειρά του οφείλεται στον ορισμό της μέσω της εκθετικής διαδικασίας ($e^{\log z} = z$) και από την ιδιότητα της τελευταίας να παραμένει αναλλοίωτη ύστερα από πλήρεις περιστροφές γύρω από την αρχή των αξόνων ($e^{i2\kappa\pi} = 1$, $\kappa \in Z$).

Η παραπάνω παρατήρηση, καταδεικνύει ότι το ίδιο αναμένεται να συμβαίνει σε κάθε συνάρτηση που ορίζεται με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης όπως είναι:

- Οι δυνάμεις με εκθέτη στο R – Z: $z^{\mu/\nu} = (e^{\log z})^{\mu/\nu} = e^{\mu/\nu \log z}$.
- Οι δυνάμεις με βάση α ϵ R και μιγαδικό εκθέτη: $\alpha^z = (e^{\log \alpha})^z = e^{z \log \alpha}$.
- Οι δυνάμεις με βάση και εκθέτη μιγαδικούς αριθμούς: $w^z = (e^{\log w})^z = e^{z \log w}$.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις είναι αναγκαία η τομή διακλάδωσης για τον περιορισμό του C και τον καλό ορισμό της αντίστοιχης συνάρτησης. Ειδικότερα, οι παραπάνω τρεις αντιστοιχίες είναι καλώς ορισμένες συνεχείς συναρτήσεις στο C – (-∞, 0].

Εύρος εφαρμογής των τομών διακλάδωσης (branch cut)

Σημείωση

Το γεγονός πως η απεικόνιση $z \to z^m$, $m \in N$, είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση σε όλο το C, επιβεβαιώνεται και από την έκφρασή της μέσω της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης.

Πράγματι, για $z = 0$, φανερά είναι $0^m = 0$, ενώ για $z \in C^*$, η τιμή της z^m επαληθεύουμε ότι ορίζεται με μοναδικό τρόπο ως εξής:

$$
\begin{aligned}
z^m &= (e^{\ln z})^m \\
&= e^{m \log z} \\
&= e^{m \ln|z| + i\, m \arg z} && (\log z = \ln|z| + i \arg z) \\
&= e^{m \ln|z|} e^{i\, m \operatorname{Arg} z + 2\kappa m \pi i} && (\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\kappa\pi) \\
&= e^{m \ln|z|} e^{i\, m \operatorname{Arg} z} e^{2\kappa m \pi i} && (e^{\alpha + \beta} = e^{\alpha} e^{\beta}) \\
&= e^{m \ln|z|} e^{i\, m \operatorname{Arg} z}. && (e^{2\kappa m \pi i} = 1)
\end{aligned}
$$

Αντίστοιχα, η $z \to z^m$, $m \in Z - N$, είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση σε όλο το C^*.

Εύρος εφαρμογής των τομών διακλάδωσης (branch cut)

Αξιοσημείωτη είναι μία πιθανή παρανόηση που πρέπει να διευκρινιστεί. Για κάθε z, w ϵ C, η συνάρτηση $w^z = (e^{\log w})^z = e^{z \log w}$ είναι καλώς ορισμένη στο C - (-∞, 0], χωρίς δυνατότητα επέκτασης σε όλο το C. Θέτοντας, ωστόσο w = e, παίρνουμε ότι και το ίδιο θα πρέπει να ισχύει για την e^z, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα προηγούμενα, καθώς είδαμε ότι η $z \to e^z$, είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση σε όλο το C και αποδίδει ακριβώς μία τιμή για κάθε μιγαδικό z.

Η παρανόηση αυτή οφείλεται στο διαφορετικό τρόπο που ορίζεται η e^z στην μία και στην άλλη περίπτωση. Στην πρώτη ($w^z = e^{z \log w}$), ο ορισμός “κληρονομεί” την δυσκολία του λογαρίθμου και την αναγκαιότητα του περιορισμού του πεδίου ορισμού, ενώ στη δεύτερη, (όπως ακριβώς το χρησιμοποίησε ο Euler), η παράσταση e^z, βασίζεται στην αναλυτική έκφραση της εκθετικής συνάρτησης $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ η οποία συγκλίνει καλώς σε κάθε z ϵ C.

Στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει διαφορετική αναπαράσταση των δύο συναρτήσεων και για το λόγο αυτό πρέπει να είναι σαφές κάθε φορά το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται η παράσταση e^z.

Πραγματικό και φανταστικό μέρος συνάρτησης

Πραγματικό και φανταστικό μέρος συνάρτησης

Γνωρίζουμε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος.

Αν f είναι μία μιγαδική συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής τότε η εικόνα f(z) έχει για κάθε ένα z ένα πραγματικό μέρος $f_R(z)$ και ένα μιγαδικό μέρος $f_I(z)$. Δηλαδή, ορίζονται καλώς, οι πραγματικές συναρτήσεις μίας μιγαδικής μεταβλητής, f_R, f_I: $A \to R$, με

$$\mathbf{f_R(z) = Re(f(z)),}\ \text{και}\ \mathbf{f_I(z) = Im(f(z)).}$$

Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνάρτησης f**.

Με εφαρμογή των ιδιοτήτων των συζυγών $\quad Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \qquad Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

μπορεί να αποδειχθεί ότι η ανάλυση μίας συνάρτησης f: $A \to R$,στην μορφή

$$\mathbf{f(z) = f_R(z) + if_I(z),\ f_R,\ f_I:\ A \to R,}$$

είναι πάντα εφικτή.

Πραγματικό και φανταστικό μέρος συνάρτησης

Θεώρημα
Έστω A ⊆ C. Για κάθε συνάρτηση f: A → C, υπάρχουν δύο πραγματικές συναρτήσεις μίας μιγαδικής μεταβλητής, f_R, f_I: με πεδίο ορισμού το A τέτοιες ώστε

$$\mathbf{f(z) = f_R(z) + i f_I(z),\ f_R,\ f_I:\ A \to R.}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι κατασκευαστική.
Για κάθε z є A, ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_R(z) = \dfrac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}$ και $f_I(z) = \dfrac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}$

Εύκολα (πως;) δείχνουμε ότι $f_R(z) = \overline{f_R(z)}$ και $f_I(z) = \overline{f_I(z)}$ συνεπώς $f_R(z)$, $f_I(z)$ є R,

ενώ ομοίως εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι για κάθε z є A, είναι $f(z) = f_R(z) + i f_I(z)$

Σημείωση: Γράφουμε ισοδύναμα, $f(z) = f_R(z) + i f_I(z) = \text{Re } f(z) + i \text{ Im } f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$.

Ασκήσεις

$$z = re^{i\theta} \leftarrow \arg(z)$$

r ↑ $|z|$

Άσκηση 1
Για τις παρακάτω συναρτήσεις f: A → C,
(α) Να βρεθεί το όρισμα της εικόνας arg(f(z))
(β) Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος τους.

1. $f(z) = 1/z$, $z \in C^*$.
2. $f(z) = e^z$, $z \in C$.

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad \arg f(z) = \arg \frac{1}{re^{i\theta}} = \arg\left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right) = -\theta^{+2k\pi} = \underline{-\arg(z)}$$

$$z = re^{i\theta} \qquad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = f_R(z) + i f_I(z), \quad f_R(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}, \quad f_I(z) = -\frac{\operatorname{Im} y}{|z|^2}.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = e^z$, είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$.

Υπόδειξη

Μία συνάρτηση $f: A \to C$, λέγεται περιοδική όταν υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε

(α) Για κάθε $z \in A$, είναι $z - T$, $z + T \in A$.

(β) $f(z + T) = f(z - T) = f(z)$

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} e^{2\pi i} = e^{z} \cdot 1 = e^{z}.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση Log z = -2 + 3i, όπου Log z = ln|z| + iArg(z), z ϵ C – (-∞, 0], ο κύριος κλάδος της συνάρτησης του λογαρίθμου.

Υπόδειξη: Ο κύριος κλάδος είναι 1-1 συνάρτηση.

$$\mathrm{Log}\, z = -2 + 3i \Rightarrow e^{\mathrm{Log}\, z} = e^{-2+3i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = e^{-2} \cdot e^{3i} = e^{-2}(\cos 3 + i \sin 3).$$

$$|e^z| = e^{Re z} \Rightarrow \ln|e^z| = Re z \quad , \arg(e^z) = Im z + 2\kappa\pi$$

Ασκήσεις

Άσκηση 4

Να λυθεί στο C η εξίσωση $e^z = \alpha i$, $\alpha > 0$. (απάντηση: $z = \ln \alpha + i(2\kappa\pi + \pi/2)$, $\kappa \in Z$).

Υπόδειξη: Προσοχή: Ο λογάριθμος είναι πλειονότιμος.

$$e^z = \alpha i \Rightarrow \log e^z = \log \alpha i$$

$$\Leftrightarrow \ln|e^z| + i\arg(e^z) = \ln|\alpha i| + i\arg(\alpha i)$$

$$\Leftrightarrow Re z + i(Im z + 2\lambda\pi) = \ln \alpha + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow Re z + i\, Im z = \ln \alpha + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi - 2\lambda\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \ln \alpha + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right), \ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 5

Να βρεθεί το μέτρο, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού

$$z = e^{(2+3i)x},\ x \in R.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 6

Να βρεθεί το μέτρο, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού

$$z = e^{e^{ix}}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι $\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}$.

$$\overline{e^{z}} = \overline{e^{x} \cdot e^{iy}} = \overline{e^{x}} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{x} \cdot e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

$z = x+iy$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Η επέκταση του ορισμού των sin x, cos x από το R στο C, γίνεται με τη βοήθεια της εξίσωσης του Euler. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

και ότι

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων βρίσκουμε ότι

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix}) / 2 \text{ και } \sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) / (2i).$$

Η χρήση αυτών των τύπων για τον ορισμό των sin z, cos z εξασφαλίζει ότι για z = x ϵ R, θα έχουμε στη διάθεσή μας τις πραγματικές εκδόσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Ορισμός
Για κάθε z є C, ορίζουμε $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ και $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Αποδεικνύεται ότι για τις cos z, sin z ισχύουν οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες. Σε αντίθεση ωστόσο με την πραγματική εκδοχή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, **οι sinz και cosz δεν είναι φραγμένες συναρτήσεις στο C.**

Πράγματι, καθώς από την τριγωνική ανισότητα είναι $|1 - e^{2ix} e^{-2y}| \geq |\,|1| - |e^{2ix} e^{-2y}|\,| = 1 - e^{-2y}$, εκτιμούμε:

$$|\sin z| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{e^{2iz} - 1}{e^{iz}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1 - e^{2ix}e^{-2y}}{e^{ix}e^{-y}}\right| \geq \frac{1}{2}\frac{1-e^{-2y}}{e^{-y}} = \frac{1}{2}\frac{e^{2y} - 1}{e^{y}}.$$

Από την τελευταία εκτίμηση, προκύπτει $\lim_{y \to \pm\infty} |\sin z| = +\infty$. Ανάλογη εκτίμηση, μπορεί να γίνει για την f(z) = cos z.

Σημείωση: Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει ως απλό πόρισμα του θεωρήματος του Liouville, το οποίο δηλώνει πως κάθε μιγαδική συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη σε όλο το C πρέπει να είναι φραγμένη. Άρα η f(z) = sin z η οποία είναι παραγωγίσιμη και ορίζεται σε όλο το C, δεν μπορεί να είναι φραγμένη.

$$e^z = e^w \Longleftrightarrow z = w + 2k\pi i$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Άσκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση sin z = 0. (απάντηση z = κπ, κ є Z).

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Longleftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Longleftrightarrow iz = -iz + 2k\pi i$$

$$\Longleftrightarrow 2z = 2k\pi \Longleftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Άσκηση 2
Να λυθεί η εξίσωση $\cos z = 0$. (απάντηση $z = \pi/2 + \kappa\pi$, $\kappa \in Z$).

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ και $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, z є C.

$$\overline{\sin z} = \overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} = \frac{\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}}{\overline{2i}} = \frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} = \sin \bar{z}.$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $z \in C$.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Άσκηση 5

Να δείξετε ότι (α) $\sin(-z) = -\sin z$, (β) $\cos(-z) = \cos z$.

(γ) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ και (δ) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της μιγαδικής συνάρτησης ημιτόνου

Η συνάρτηση του μιγαδικού ημιτόνου f(z) = sin z συμμετέχει στον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα, μέσω της συναρτησιακής εξίσωσης

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Επιπλέον, σχετίζεται με τη συνάρτηση του Riemann $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ μέσω της συναρτησιακής εξίσωσης

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\zeta(1-z).$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο C

Ανάλογα με το R, ορίζονται οι συναρτήσεις της **εφαπτομένης tan z** και της **συνεφαπτομένης cot z**.

Ορισμός

Ορίζουμε $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $z \neq \dfrac{\pi}{2} + \kappa\pi$ και $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $z \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ιδιότητες

Για κάθε z = x + iy ϵ C, ισχύουν τα εξής: (α) $\tan(-z) = -\tan z$.

(β) $\tan(z + \pi) = \tan z$

(γ) $\lim_{y \to +\infty} \tan z = i$ και $\lim_{y \to -\infty} \tan z = -i$.

(δ) $\tan z = \dfrac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$

Υπερβολικές Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Υπερβολικές Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός
Για κάθε z ϵ C, ορίζονται και δύο επιπλέον συναρτήσεις, το **υπερβολικό συνημίτονο cosh z** και το **υπερβολικό ημίτονο sinh z** ως εξής:

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Εξ ορισμού, είναι **cosh (iz) = cos z** και **sinh (iz) = i sin z**.

Υπερβολικές Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ιδιότητες υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου

Για κάθε $z = x + iy \in C$, ισχύουν τα εξής:

- $\sinh(-z) = -\sinh z$.
- $\cosh(-z) = \cosh z$.
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
- $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$.
- $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$, $|\sinh z| = (\sinh^2 x + \sin^2 y)^{½}$.
- $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$, $|\cosh z| = (\sinh^2 x + \cos^2 y)^{½}$.

Υπερβολικές Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ανάλογα, ορίζονται οι συναρτήσεις της **υπερβολικής εφαπτομένης tanh z** και της **υπερβολικής συνεφαπτομένης coth z.**

Ορισμός

Ορίζουμε $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$, $z \neq \left(\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)i$ και $\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$, $z \neq \kappa\pi i$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι

(α) Οι συναρτήσεις sin z, cos z είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

(β) Οι συναρτήσεις sinh z, cosh z είναι περιοδικές με περίοδο 2πi.

Ασκήσεις

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις tanh z και coth z είναι περιοδικές με περίοδο πi.

Ασκήσεις

Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση $\sinh z = 0$.

Υπόδειξη

Χρησιμοποιείστε τον ορισμό. Απάντηση: $z = \kappa\pi i$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ασκήσεις

Άσκηση 4

Να λυθεί η εξίσωση $\cosh z = 0$.

Απάντηση: $z = (\kappa\pi + \pi/2)i$, $\kappa \in Z$.

Ασκήσεις

Άσκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση $\sin z = \cosh 4$

Υπόδειξη: Μετατρέψτε την σε τριώνυμο και αξιοποιήστε ότι $1 - \cosh^2 4 = \sinh^2 4$

Ασκήσεις

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι $|\sin z| = \sin^2 x + \sinh^2 y$ και $|\cos z| = \cos^2 x + \sinh^2 y$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Στο R, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις (συνήθως) ορίζονται ως εξής:

Αντίστροφο ημίτονο: $y = \arcsin x$ ή $y = \sin^{-1}x: [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

Αντίστροφο συνημίτονο: $y = \arccos x$ ή $y = \cos^{-1}x: [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Αντίστροφη εφαπτομένη: $y = \arctan x$ ή $y = \tan^{-1}x: R \to (-\pi/2, \pi/2)$.

Αντίστροφη συνεφαπτομένη: $y = \operatorname{arccot} x$ ή $y = \cot^{-1}x: R \to (0, \pi)$.

Τύπος σε κλειστή μορφή για τις παραπάνω συναρτήσεις δεν υπάρχει. Σε μορφή ορισμένου ολοκληρώματος, υπάρχουν οι εξής εκφράσεις:

$$\sin^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\ |x| \le 1 \qquad \cos^{-1}x = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\ |x| \le 1$$

$$\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \qquad \cot^{-1}x = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Σε αντίθεση με την πραγματική περίπτωση, στο C ο υπολογισμός της αντίστροφης μπορεί να οδηγήσει σε κλειστό τύπο υπολογισμού των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Πράγματι,

$$\sin w = z \Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \Leftrightarrow \left(e^{iw}\right)^2 - 2iz\,e^{iw} - 1 = 0.$$

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια (ως προς e^{iw}) εξίσωση (είτε με διακρίνουσα είτε με συμπλήρωση τετραγώνου), βρίσκουμε

$$e^{iw} = iz \pm (1 - z^2)^{1/2} \quad \text{ή} \quad iw = \log[\, iz \pm (1 - z^2)^{1/2}] \quad \text{ή} \quad w = -i \log[\, iz \pm (1 - z^2)^{1/2}]$$

Καθώς προκύπτουν δύο τιμές, η αντιστοίχιση αυτή δεν είναι συνάρτηση. Επιλέγοντας όμως μόνο τον κλάδο που αντιστοιχεί στο + γράφουμε **arcsin z = $\sin^{-1} z = -i \log[\, iz + (1 - z^2)^{1/2}]$**

Σημειώνεται, πως στον παραπάνω τύπο, η παράσταση $(1 - z^2)^{1/2}$ λαμβάνει δύο τιμές για κάθε z, ενώ ο λογάριθμος λαμβάνει άπειρες. Άρα, η arcsin είναι μια πλειονότιμη συνάρτηση, η οποία για να γίνει μονότιμη, πρέπει να θεωρηθεί πως παίρνουμε τους κύριους κλάδους των επιμέρους συναρτήσεων.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Όπως, αποδείχθηκε ότι $\sin^{-1}z = -i \log[iz + (1 - z^2)^{½}]$, με αντίστοιχο τρόπο, αποδεικνύεται ότι:

$\cos^{-1} z = -i \log[z + i(1 - z^2)^{½}]$, $\tan^{-1}z = i/2 \log [(i + z) / (i - z)]$, $z \neq \pm i$

$\cot^{-1}z = -i/2 \log [(z + i) / (z - i)]$, $z \neq \pm i$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η τιμή του $\cos^{-1}2$

Λύση

Είναι $\cos^{-1}2 = -i \log[2 + i(1 - 2^2)^{½}]$

$= -i \log(2 + i(-3)^{½})$

$= -i \log(2 \pm 3^{½})$ (log: μιγαδικός λογάριθμος)

$= -i (\ln|2 \pm 3^{½}| + 2κπi)$, $κ \in Z$. (ln: πραγματικός λογάριθμος)

$= -i \ln(2 \pm 3^{½}) + 2κπ$, $κ \in Z$.

Αντίστροφες υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις αντιστρέφονται και οι τύποι που δίνουν τις αντίστροφες είναι οι εξής:

$$\sinh^{-1} z = \log[\, z + (z^2 + 1)^{½}]$$

$$\cosh^{-1} z = \log[\, z + (z^2 - 1)^{½}]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\ z \neq \pm 1$$

$$\coth^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\ z \neq \pm 1$$