

# Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \mathcal{L}(f)(x) e^{sx} ds$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: [epdiaman@ee.duth.gr](mailto:epdiaman@ee.duth.gr)

# Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

## Ορισμός

Εστω μία πραγματική συνάρτηση  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν υπάρχει συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε  $L(f) = F$ , τότε η  $f$  καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** της  $F$ . Γράφουμε,  $s = \gamma + i\omega$

$$\mathcal{L}(f) = F$$

$$f = L^{-1}(F).$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

## Παρατηρήσεις

(α) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δεν ορίζεται πάντα (π.χ. δεν ορίζεται για τις συναρτήσεις με  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \neq 0$ .)

(β) Τύπος του Mellin: Αν η συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , έχει μετασχηματισμό Laplace την  $L(f)$ , τότε

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} L(f)(s) e^{sx} ds$$

όπου  $\gamma \in \mathbb{R}$ , οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός που εκλέγεται έτσι ώστε η κατακόρυφος  $\operatorname{Re} s = \gamma$ , να περιέχει όλους τους πόλους της  $L(f)$  στο αριστερό της μέρος.

# Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

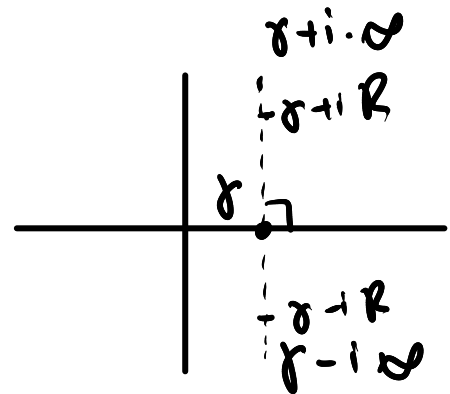
$$\begin{aligned} \text{Αν } s = \gamma + i\omega, \text{ είναι } L(f)(s) &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(\gamma + i\omega)x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\gamma x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x) f(x) e^{-\gamma x}] e^{-i\omega x} dx = \hat{g}(\omega), \text{ όπου } g(x) = H(x) f(x) e^{-\gamma x} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } g(x) = H(x) f(x) e^{-\gamma x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(\gamma + i\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$\text{ή } H(x) f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(\gamma + i\omega) e^{(\gamma + i\omega)x} d\omega. \text{ Θέτουμε } \gamma + i\omega = s \Rightarrow ds = i d\omega \text{ και}$$

$$H(x) f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + i(-\infty)}^{\gamma + i(+\infty)} L(f)(s) e^{sx} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} L(f)(s) e^{sx} ds$$

$$\text{ή } f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} L(f)(s) e^{sx} ds, x > 0.$$



# Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Η εφαρμογή του τύπου  $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} L(f)(s) e^{sx} ds,$

δεν είναι εύκολο να γίνει.

Ενδεικτικά: <https://www.youtube.com/watch?v=i2LoInAnpaM> ή [https://www.youtube.com/watch?v=\\_yY39Xz70Lo](https://www.youtube.com/watch?v=_yY39Xz70Lo)

Ωστόσο, αποδεικνύεται το:

## Θεώρημα (Lerch's Theorem)

Αν  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις και  $L(f) = L(g)$ , τότε είναι  $f = g$ .

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: <https://math.stackexchange.com/questions/1090201/equality-of-laplace-transform>

## Παράδειγμα

Να βρεθεί μία συνεχής συνάρτηση με μετασχηματισμό Laplace  $g(s) = 1/s^2, s > 0$ .

## Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(t) = t$ , τότε  $L(f)(s) = 1/s^2, s > 0$ .

Άρα,  $L^{-1}(g)(t) = t$ .

# Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

## Παράδειγμα

Να βρεθεί μία συνεχής συνάρτηση με μετασχηματισμό Laplace  $g(s) = 1/(s - \alpha)$ ,  $s > \alpha$ .

## Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(t) = e^{\alpha t}$ , τότε  $L(f)(s) = 1/(s - \alpha)$ ,  $s > \alpha$

Άρα,  $L^{-1}(g)(t) = e^{\alpha t}$ .

## Παράδειγμα

Να βρεθεί μία συνεχής συνάρτηση με μετασχηματισμό Laplace  $g(s) = s/(s^2 + \alpha^2)$ ,  $s > 0$ .

## Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(t) = \cos(\alpha t)$ , τότε  $L(f)(s) = s/(s^2 + \alpha^2)$ ,  $s > 0$ .

Άρα,  $L^{-1}(g)(t) = \cos(\alpha t)$ .

| $\Gamma(n+1)=n!$ | $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$            | $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$               |                                                                           |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1.               | 1                               | $\frac{1}{s}$                         | 2.                              | $e^{at}$                                 | $\frac{1}{s-a}$                                                           |
| 3.               | $t^n, \quad n=1,2,3,\dots$      | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                  | 4.                              | $t^p, p > -1$                            | $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$                                             |
| 5.               | $\sqrt{t}$                      | $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$ | 6.                              | $t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\dots$ | $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$ |
| 7.               | $\sin(at)$                      | $\frac{a}{s^2+a^2}$                   | 8.                              | $\cos(at)$                               | $\frac{s}{s^2+a^2}$                                                       |
| 9.               | $t \sin(at)$                    | $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$             | 10.                             | $t \cos(at)$                             | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$                                             |
| 11.              | $\sin(at)-at \cos(at)$          | $\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$            | 12.                             | $\sin(at)+at \cos(at)$                   | $\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$                                               |
| 13.              | $\cos(at)-at \sin(at)$          | $\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$      | 14.                             | $\cos(at)+at \sin(at)$                   | $\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$                                         |
| 15.              | $\sin(at+b)$                    | $\frac{s \sin(b)+a \cos(b)}{s^2+a^2}$ | 16.                             | $\cos(at+b)$                             | $\frac{s \cos(b)-a \sin(b)}{s^2+a^2}$                                     |
| 17.              | $\sinh(at)$                     | $\frac{a}{s^2-a^2}$                   | 18.                             | $\cosh(at)$                              | $\frac{s}{s^2-a^2}$                                                       |

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

# Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού

## Ιδιότητες

Έστω  $F, G$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace δυο συναρτήσεων  $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

(α) Γραμμικότητα

$$L^{-1}(\alpha \cdot F + \beta \cdot G) = L^{-1}(\alpha \cdot F) + L^{-1}(\beta \cdot G), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(β) Μετάθεση στο πεδίο συχνοτήτων

$$L^{-1}(F(s - \lambda))(t) = f(t) e^{\lambda t}, t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \text{ [αντ. } L(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda)].$$

(γ) Μετάθεση στο πεδίο χρόνου:

$$L^{-1}(e^{-\lambda s} F(s))(t) = u_{\lambda} f(t - \lambda), t \geq 0, \lambda > 0 \text{ [αντ. } g(t) = f(t - \lambda), t \geq \lambda, L(g)(s) = e^{-\lambda s} \cdot F(s)].$$

# Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού

## Ιδιότητες

Έστω  $F, G$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace δυο συναρτήσεων  $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

(δ) Διαστολή

$$F = \mathcal{L}(f)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(\lambda s))(t) = 1/\lambda f(t/\lambda), t \geq 0, \lambda > 0 \quad [\text{αντ. } g(t) = f(\lambda t), \mathcal{L}(g)(s) = 1/\lambda \cdot F(s/\lambda), s \in (c\lambda, +\infty).]$$

(ε) Γινόμενο  $t^n f(t)$ .

$$\mathcal{L}^{-1}((-1)^n F^{(n)})(t) = t^n f(t), t \geq 0 \quad [\text{αντ. } g(t) = t^n \cdot f(t), n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s), s \in (c, +\infty)].$$

(στ) Συνέλιξη:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s))(t) = f * g(t).$$

$$f * g(x) = \int_0^x g(y) f(x-y) dy$$

## Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$ ,  $s > 2$ .

Λύση

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-2} = \underset{\substack{\uparrow \\ g(t)}}{\mathcal{L}(e^t)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ h(t)}}{\mathcal{L}(e^{2t})}$$

$$(a) F(s) = \mathcal{L}(f)(s) \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G \cdot H)$$

$$= g * h(t) = \int_0^t e^{t-y} \cdot e^{2y} dy = e^t e^y \Big|_0^t =$$

$$(b) \text{ Ευαλταρτικαί } \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{(A+B)s - 2A - B}{(s-1)(s-2)} \quad \left| \begin{array}{l} e^t(e^t - 1) = \\ = e^{2t} - e^t \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} B=-A \\ A=-1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow F(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(t) = -e^t + e^{2t}.$$

# Ασκήσεις

2. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9}$ ,  $s > 3$ .

**Λύση**

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την ιδιότητα  $\mathcal{L}^{-1}(F(s - c))(t) = e^{ct}f(t)$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9} = \frac{1}{(s - 3)^2}$$

$$(a) \quad F(s) = \mathcal{L}(e^{3t}) \cdot \mathcal{L}(e^{3t}) \Rightarrow f(t) = g * g(t), \text{ όπου } g(t) = e^{3t} \dots$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t)(s)$$

$$\text{ή } f(t) = \int_0^t e^{3(t-y)} e^{3y} dy = t \cdot e^{3t}.$$

$$G(s-3) = \frac{1}{(s-3)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(G(s-3))(t) = e^{3t} \cdot t$$

# Ασκήσεις

3. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

**Λύση**

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την ιδιότητα  $L^{-1}(F(s - c))(t) = e^{ct}f(t)$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1^2 - 1^2 + 5} = \frac{1}{(s-1)^2 + 2^2} = \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2} \Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) \xrightarrow{\text{τυπ.}} \sin(2t)$$

$$F(s) = \frac{1}{2}G(s-1) \Rightarrow f(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ιδιότητα}}}{e^t} \cdot g(t) \cdot \frac{1}{2} = e^t \sin(2t) \cdot \frac{1}{2}$$

| $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$            | $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$           | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$                                              |
|-----------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1. 1                              | $\frac{1}{s}$                           | 2. $\mathbf{e}^{at}$                        | $\frac{1}{s-a}$                                                           |
| 3. $t^n, \quad n=1,2,3,\dots$     | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | 4. $t^p, p > -1$                            | $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$                                             |
| 5. $\sqrt{t}$                     | $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$   | 6. $t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\dots$ | $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$ |
| 7. $\sin(at)$                     | $\frac{a}{s^2+a^2}$                     | 8. $\cos(at)$                               | $\frac{s}{s^2+a^2}$                                                       |
| 9. $t \sin(at)$                   | $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$               | 10. $t \cos(at)$                            | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$                                             |
| 11. $\sin(at) - at \cos(at)$      | $\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$              | 12. $\sin(at) + at \cos(at)$                | $\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$                                               |
| 13. $\cos(at) - at \sin(at)$      | $\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$        | 14. $\cos(at) + at \sin(at)$                | $\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$                                         |
| 15. $\sin(at+b)$                  | $\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$ | 16. $\cos(at+b)$                            | $\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$                                   |
| 17. $\sinh(at)$                   | $\frac{a}{s^2-a^2}$                     | 18. $\cosh(at)$                             | $\frac{s}{s^2-a^2}$                                                       |

|     |                                                |                                                                                 |     |                                              |                                                                  |
|-----|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 19. | $\mathbf{e}^{at} \sin(bt)$                     | $\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$                                                       | 20. | $\mathbf{e}^{at} \cos(bt)$                   | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$                                      |
| 21. | $\mathbf{e}^{at} \sinh(bt)$                    | $\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$                                                       | 22. | $\mathbf{e}^{at} \cosh(bt)$                  | $\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$                                      |
| 23. | $t^n \mathbf{e}^{at}, \quad n=1,2,3,\dots$     | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$                                                        | 24. | $f(ct)$                                      | $\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$                          |
| 25. | $u_c(t) = u(t-c)$<br><u>Heaviside Function</u> | $\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$                                                    | 26. | $\delta(t-c)$<br><u>Dirac Delta Function</u> | $\mathbf{e}^{-cs}$                                               |
| 27. | $u_c(t) f(t-c)$                                | $\mathbf{e}^{-cs} F(s)$                                                         | 28. | $u_c(t) g(t)$                                | $\mathbf{e}^{-cs} \mathfrak{L}\{g(t+c)\}$                        |
| 29. | $\mathbf{e}^{ct} f(t)$                         | $F(s-c)$                                                                        | 30. | $t^n f(t), \quad n=1,2,3,\dots$              | $(-1)^n F^{(n)}(s)$                                              |
| 31. | $\frac{1}{t} f(t)$                             | $\int_s^\infty F(u) du$                                                         | 32. | $\int_0^t f(v) dv$                           | $\frac{F(s)}{s}$                                                 |
| 33. | $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$             | $F(s) G(s)$                                                                     | 34. | $f(t+T) = f(t)$                              | $\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st} f(t) dt}{1 - \mathbf{e}^{-sT}}$ |
| 35. | $f'(t)$                                        | $sF(s) - f(0)$                                                                  | 36. | $f''(t)$                                     | $s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$                                       |
| 37. | $f^{(n)}(t)$                                   | $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ |     |                                              |                                                                  |

# Ασκήσεις

4. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 1}, s > 1$ .

**Λύση**

$$s^2 + 2s \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = (s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

## Ασκήσεις

5. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

Λύση

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) : \frac{2}{\sqrt{3}}$$

# Ασκήσεις

6. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s - 3}, s > 3.$

**Λύση**

# Ασκήσεις

7. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{s}{(s+1)^3}$ ,  $s > -1$ .

Λύση

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1-1}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$\text{Είναι: } \mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = e^{-t} \cdot t - e^{-t} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s-1}, \quad \mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}(e^{at} \cdot f(t))(s) = F(s-a)$$

## Ασκήσεις

8. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $F(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)^2}, s > 1$ .

Λύση

$$F(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)^2} = \frac{\overbrace{(s-1)^2}^{(s-1)^2}}{s} + \frac{\overbrace{s \cdot (s-1)}^{s \cdot (s-1)}}{s-1} + \frac{\overbrace{s}^s}{(s-1)^2} = \frac{A(s-1)^2 + B s(s-1) + \Gamma s}{s \cdot (s-1)^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = A \cdot 1 + B \cdot e^t + \Gamma \cdot t \cdot e^t \quad \left( \begin{array}{l} \text{απομένει ο ακριβής} \\ \text{υπολογισμός των } A, B, \Gamma \end{array} \right)$$

# Ασκήσεις

9. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

**Λύση**

Υπόδειξη:  $L(f'')(s) = s^2 L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow L(y'') + 4L(y) = 0 \Rightarrow s^2 L(y)(s) + s - 1 + 4L(y)(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow L(y)(s) \cdot (s^2 + 4) = 1 - s \Leftrightarrow L(y)(s) = \frac{1-s}{s^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} - \frac{s}{s^2+2^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)(t) - L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right) = \frac{1}{2} \sin(2t) - \cos(2t).$$

# Ασκήσεις

10. (α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2y' + y = (t^2 - 1)e^t, y'(0) = 2, y(0) = 1.$$

είναι

$$L(y)(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \left( s + 4 + \frac{2}{(s-1)^3} - \frac{1}{s-1} \right)$$

(β) Βρείτε τη λύση της εξίσωσης.

## Λύση

Υπόδειξη: Είναι  $L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$  και  $L(f'')(s) = s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$



# Ασκήσεις

11. (α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης της εξίσωσης  $y(t) = 1 + \int_0^t y(\omega) \cos(t - \omega) d\omega$ ,

είναι  $L(y)(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s^2 - s + 1)}$ . (β) Βρείτε τη λύση της εξίσωσης.

Λύση

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(\omega) \cdot \cos(t - \omega) d\omega \Rightarrow y(t) = 1 + y * \cos(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(y) \cdot \mathcal{L}(\cos t) \Leftrightarrow \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s} + \mathcal{L}(y) \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{(s+1)^2}{s(s^2 - s + 1)} = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) : \frac{(s+1)^2}{s \cdot (s^2 - s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 - s + 1} = \dots$$

# Ασκήσεις

12. (α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης της εξίσωσης  $te^{at} = \int_0^t y(\omega)y(t-\omega)d\omega$ .

είναι  $\underline{L(y)(s)} = \pm \frac{1}{s-a}, s > a$ . (β) Βρείτε τη λύση της εξίσωσης.

Λύση

$$te^{at} = \int_0^t y(\omega) \cdot y(t-\omega) d\omega \Leftrightarrow te^{at} = y * y(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{L(te^{at})}(s) = (\underline{L(y)}(s))^2 \Leftrightarrow \underline{L(y)}(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \Leftrightarrow \underline{L(y)}(s) = \pm \frac{1}{s-a}$$

$$\underline{L(t)}(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \underline{L(e^{at} \cdot t)} = \frac{1}{(s-a)^2}$$



# Ασκήσεις

13. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών  $y' - 2y = 1$ , όπου  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$ , και  $y(0) = 1$ .

Λύση

$$y' - 2y = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1) \Rightarrow s \cdot \mathcal{L}(y) - 1 - 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow (s-2) \cdot \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} + 1 \Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{s+1}{s \cdot (s-2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$\frac{s+1}{s \cdot (s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} = \frac{(A+B)s - 2A}{s \cdot (s-2)} \quad \Bigg| \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{2t}.$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=1 \\ -2A=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2 \mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)$$

## Ασκήσεις

14. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών  $y'' + y = \sin(2x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

Λύση

$$y'' + y = \sin(2x) \Rightarrow s^2 \cdot \mathcal{L}(y) - s - 1 + \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2 + 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(y) \cdot (s^2 + 1) = \frac{2}{s^2 + 4} + s + 1 \Leftrightarrow \mathcal{L}(y)(s) = \frac{2 + (s+1) \cdot (s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Είναι  $\frac{2 + (s+1)(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{\Gamma s + \Delta}{s^2 + 4} = \dots$

$$\mathcal{L}(y'') = s^2 \mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0), \quad \mathcal{L}(y') = s \mathcal{L}(y) - y(0)$$

## Ασκήσεις

15. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών  $ty'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

Λύση

$$t \cdot y'' + (1 - 2t) \cdot y' - 2y = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t \cdot y'') + \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(t \cdot y') - 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$\mathcal{L}(t y') = (-1) \cdot [\mathcal{L}(y')]', \quad \mathcal{L}(t y'') = (-1) \cdot [\mathcal{L}(y'')]'$$

$$= - (s \mathcal{L}'(y) + \mathcal{L}(y)) \quad = - (2s \mathcal{L}(y) + s^2 \mathcal{L}'(y) - 1)$$

$$-2s \mathcal{L}(y) - s^2 \mathcal{L}'(y) + 1 + s \mathcal{L}(y) - 1 + 2s \mathcal{L}'(y) + 2\mathcal{L}(y) - 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$\mathcal{L}'(y) \cdot (2s - s^2) - s \mathcal{L}(y) = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{L}'(y)}{\mathcal{L}(y)} = \frac{1}{2-s} \Rightarrow (\ln \mathcal{L}(y))' = \frac{1}{2-s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln h(y) = -\ln(2-s) \Rightarrow h(y) = \frac{1}{2-s} \Rightarrow y(t) = -e^{2t}.$$

# Ασκήσεις

16. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών  $y' + z' = t$ ,  $y'' - z = e^{-t}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -2$ ,  $z(0) = 0$ .

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} y' + z' = t \\ y'' - z = e^{-t} \end{array} \right\} \xRightarrow{\mathcal{L}} \left. \begin{array}{l} s \cdot \mathcal{L}(y) - 3 + s \cdot \mathcal{L}(z) = \frac{1}{s^2} \\ s^2 \cdot \mathcal{L}(y) - 3s - 2 - \mathcal{L}(z) = \frac{1}{s+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Γραμμικό} \\ \text{σύστημα} \\ \text{ως προς} \\ \mathcal{L}(y), \mathcal{L}(z) \end{array}$$

Σύστημα δ.ε.

# Ασκήσεις

17. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών  $y' = 2y + z$ ,  $z' = -y + 2z$ ,  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = -1$ .

**Λύση**



# Ασκήσεις

18. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών  $y' + x = t$ ,  $x' - y = 1$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 1$ .

**Λύση**

# Ασκήσεις

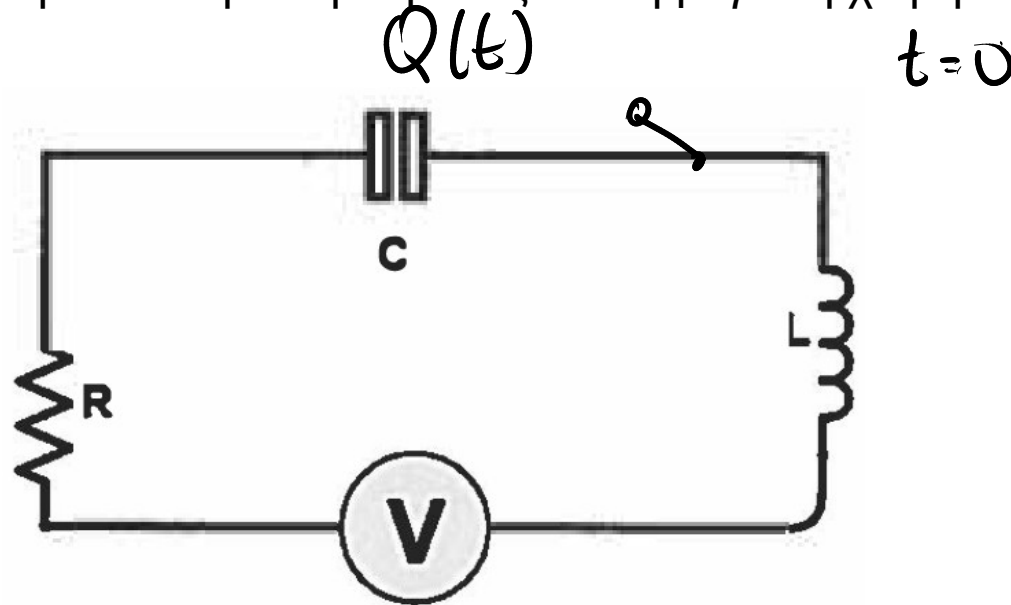
19. Να λυθεί η ολοκληροδιαφορική εξίσωση  $y'(t) = e^{-t} + 2 \int_0^t y(\omega) e^{t-\omega} d\omega$ ,  $t \geq 0$ ,  $y(0) = 1$ .

**Λύση**

# Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

Ο μετασχηματισμός Laplace έγινε ιδιαίτερα δημοφιλής μέσα από τη χρήση του στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων από τον ηλεκτρολόγο μηχανικό Oliver Heaviside.

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να αναλύσουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα για να βρούμε την ένταση του ρεύματος και τη μέγιστη χωρητικότητά του.



# Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

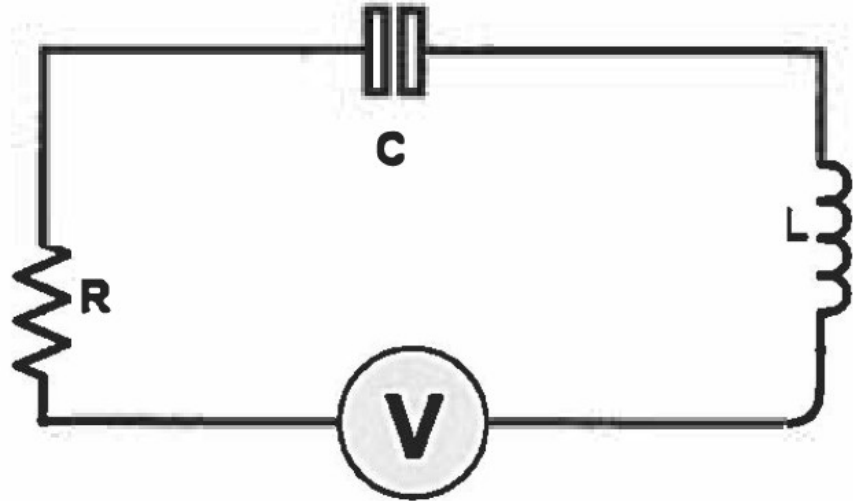
R σημαίνει αντίσταση που μετρείται σε Ohms.

L σημαίνει πηνίο που έχει επαγωγή μετρημένη σε Henrys.

C είναι ο πυκνωτής που έχει χωρητικότητα μετρημένη σε Farads.

V σημαίνει γεννήτρια ή μπαταρία και μετρείται σε Volt.

Q συμβολίζει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο του κυκλώματος και μετρείται σε Coulomb.



# Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

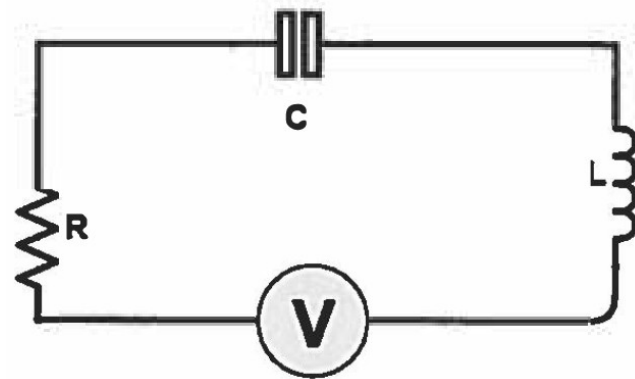
Θα βρούμε τη συνάρτηση που αποδίδει τα φορτία των πυκνωτών  $Q(t)$  και την ένταση του ρεύματος  $I(t)$  ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

Από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff, γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όλων των διαφορών δυναμικού στους επιμέρους κλάδους ενός βρόχου ισούται με μηδέν. Ισοδύναμα:

$$V(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t).$$

Είναι

- $V_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot Q'(t),$
- $V_C(t) = Q(t) / C,$
- $V_L(t) = L \cdot I'(t) = L \cdot Q''(t).$



Προκύπτει η εξίσωση  $LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t),$  όπου  $Q(0) = 0,$  και  $Q'(0) = 0.$

# Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t).$$

Για τα δεδομένα του κυκλώματος γράφουμε

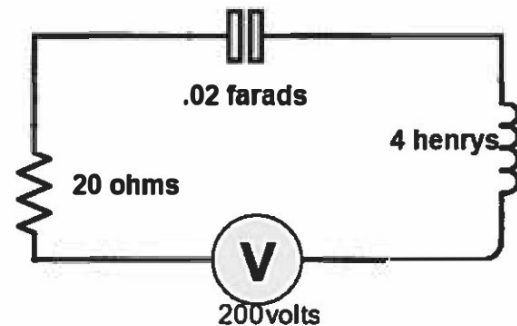
$$4Q''(t) + 20Q'(t) + \frac{1}{0,02}Q(t) = 200 \Leftrightarrow Q''(t) + 5Q'(t) + \frac{25}{2}Q(t) = 50.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη και μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$L(Q)(s) = \frac{50}{s(s^2 + 5s + 25/2)}$$

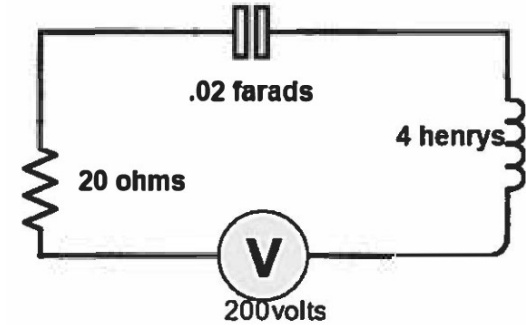
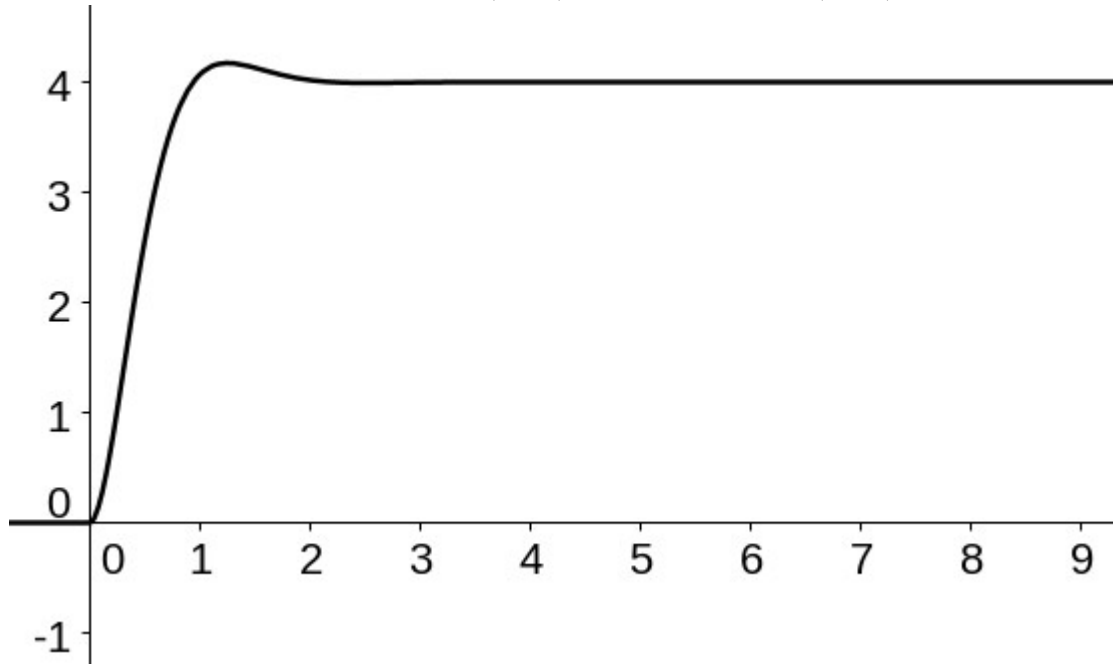
Και υπολογίζοντας τον αντίστροφο Laplace του δεξιού μέλους καταλήγουμε:

$$Q(t) = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{5}{2}t\right) - 4e^{-\frac{5}{2}t} \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$$



# Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

$$Q(t) = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{5}{2}t\right) - 4e^{-\frac{5}{2}t} \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$$



Εντολή Geogebra για το διάγραμμα:  $\text{An}[x \geq 0, 4 - 4e^{(-5x / 2)} \cos(5x / 2) - 4e^{(-5x / 2)} \sin(5x / 2)]$

# Εφαρμογή στην ραδιενεργή διάσπαση

Όταν ένας πυρήνας διασπάται σε θυγατρικό πυρήνα, ο θυγατρικός πυρήνας μπορεί να είναι ραδιενεργός, και αποσυντίθεται σε έναν τρίτο πυρήνα, διαδικασία που συνεχίζεται μέχρι να φτάσει τελικά σε έναν σταθερό ισότοπο που δεν διασπάται. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως διαδοχική ραδιενεργή διάσπαση.

Για παράδειγμα, ο πυρήνας του Ραδίου (Ra) 226 με χρόνο ημιζωής 1.601 έτη, αποσυντίθεται σε Ραδόνιο (Rn) 222 και το τελευταίο, με χρόνο ημιζωής 3,82 ημέρες, διασπάται σε έναν πυρήνα πολώνιο (Po) 218, ο οποίος είναι επίσης ραδιενεργός, με χρόνο ημιζωής 3,05 λεπτά, και έτσι η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να φτάσει τελικά στον σταθερό πυρήνα μολύβδου (Pb) 208

Στόχος της μελέτης της διαδοχικής διάσπασης είναι ο εντοπισμός του πλήθους των ατόμων ή των πυρήνων κάθε στοιχείου τη χρονική στιγμή  $t \geq 0$ .

Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία της ραδιενεργής διάσπασης ολοκληρώνεται ύστερα από 3 μετατροπές. Συμβολίζουμε με  $N_1(t)$ , τον αριθμό των ατόμων των μητρικών στοιχείων σε χρόνο  $t$  που διασπώνται με ρυθμό  $\lambda_1$ , με  $N_2(t)$ , το πλήθος των ενεργών θυγατρικών πυρήνων που με τη σειρά τους διασπώνται με ρυθμό  $\lambda_2$  και με  $N_3(t)$ , το πλήθος των πυρήνων 3ης γενιάς.

# Εφαρμογή στην ραδιενεργή διάσπαση

Είναι  $N_1(t) = N_1(0) > 0$ ,  $N_2(t) = 0$ ,  $N_3(t) = 0$ . Οι εξισώσεις που προσδιορίζουν την εξέλιξη της διαδικασίας είναι:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t), \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t), \quad \frac{dN_3(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t).^{(1)}$$

Η πρώτη διαφορική εξίσωση λύνεται εύκολα και δίνει:  $N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}$ . Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στη δεύτερη και στην τρίτη βρίσκουμε:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]$$

$$N_3(t) = N_1(0) \left[ 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right]$$

Σημειώσεις;

(1) Η γενική περίπτωση περιγράφεται από τις εξισώσεις του Bateman ([https://en.wikipedia.org/wiki/Radioactive\\_decay#Chain\\_of\\_any\\_number\\_of\\_decays](https://en.wikipedia.org/wiki/Radioactive_decay#Chain_of_any_number_of_decays))

(2) Μία γενικότερη περίπτωση όπου η διαδικασία διάσπασης ακολουθεί η βήματα μπορεί να βρεθεί στην δημοσίευση:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009254184901888>

# Ενδεικτικά Παλαιότερα Θέματα

1. Να δείξετε ότι αν  $z = e^{i\theta}$  τότε  $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ,  $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ .
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $z\bar{z} - \frac{i}{2}\bar{z} + \frac{i}{2}z = 0$  περιγράφει τον κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το  $i/2$  και ακτίνα  $1/2$ .
3. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις Cauchy – Riemann ισχύουν για τις συναρτήσεις  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ .
4. Έστω η συνάρτηση  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$ . Να βρεθεί αναλυτική μιγαδική συνάρτηση  $f$ , τ.ω.  $\operatorname{Re} f = u$ .
5. Να υπολογίσετε το  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5+3\cos x)} dx$ .
6. Έστω  $f$  η  $2\pi$  – περιοδική περιττή συνάρτηση με  $f(x) = x(\pi - x)$ ,  $0 < x < \pi$ .  
(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ως σειρά Fourier την παράσταση  $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)^3}$   
(β) Να δείξετε ότι  $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32}$ .