

Μετασχηματισμός Laplace

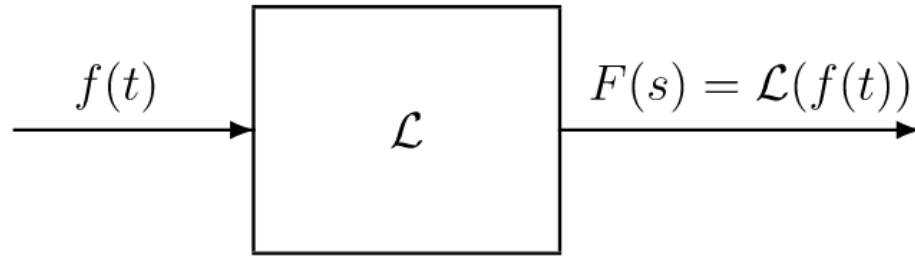
$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad s = \gamma + i\omega \in \mathbb{C}.$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας τελεστής που μετατρέπει μια συνάρτηση του χρόνου, $f(t)$, σε μια νέα συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής, $F(s)$, όπου $s = \sigma + i\omega$.



Ο μετασχηματισμός Laplace είναι πολύ χρήσιμος στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και ως εκ τούτου στην ανάλυση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

Μετασχηματισμός Laplace

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

Ορισμός

Ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$, μιας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζεται ως:

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad s = \gamma + i\omega \in \mathbb{C}. \quad e^{-sx} = \underbrace{e^{-\gamma x}}_{\text{real}} \underbrace{e^{-i\omega x}}_{\text{imaginary}}$$

Στον ορισμό αυτό, το μη γνήσιο ολοκλήρωμα γίνεται αντιληπτό ως όριο

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) e^{-sx} dx$$

Ο μετασχηματισμός ορίζεται και για μιγαδικές συναρτήσεις $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, ως εξής:

$$\mathcal{L}(f)(t) = \mathcal{L}(\operatorname{Re} f)(t) + \mathcal{L}(\operatorname{Im} f)(t).$$

Laplace vs Fourier

Αν $s = \gamma + i\omega$, είναι

$$\begin{aligned} L(f)(s) &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(\gamma + i\omega)x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\gamma x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x) f(x) e^{-\gamma x}] e^{-i\omega x} dx = \hat{g}(\omega), \text{ όπου } g(x) = H(x) f(x) e^{-\gamma x} \end{aligned}$$

Δηλαδή:

**Ο μετασχηματισμός Laplace της f
είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $H \cdot f \cdot e^{-\gamma x}$,
όπου H η συνάρτηση Heaviside.**

Είναι φανερό πως ο παράγοντας $e^{-\gamma x}$ επιτρέπει στο ολοκλήρωμα Laplace να υπάρχει για συναρτήσεις που δεν είναι ολοκληρώσιμες και για τις οποίες το αντίστοιχο ολοκλήρωμα Fourier δεν υπάρχει.

Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός

Λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι εκθετικής τάξης, αν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $M > 0$, τέτοια ώστε:

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{\lambda x}, \quad x \in [c, +\infty).$$

Παραδείγματα συναρτήσεων εκθετικής τάξης

- Κάθε φραγμένη συνάρτηση.
- $f(x) = ce^{\lambda x}$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $h(x) = \ln x$, γιατί $\ln x \leq x - 1 \leq e^x$.
- Κάθε θετική συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f(x) / e^{\lambda x} \rightarrow M < +\infty$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ (π.χ. $f(x) = x^4 e^{6x}$).
- Κάθε γινόμενο φραγμένης με εκθετική.
- $g(x) = \alpha \cdot \beta^x$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.
- $k(x) = x \cdot \ln x$, γιατί $|x \cdot \ln x| \leq x^2 = e^{2 \ln x} < e^{2x}$.

Παραδείγματα συναρτήσεων μη εκθετικής τάξης

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = \cot x.$$

$$\left| \frac{\tan x}{e^{\lambda x}} \right| \leq M \quad \left| \tan x \right| \leq M e^{\lambda x}$$

$$h(x) = e^{x \cdot x}, \text{ γιατί το όριο } e^{x \cdot x} / e^{\lambda x} \rightarrow +\infty, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$k(x) = 2x \cdot e^{x \cdot x} \cos(e^{x \cdot x}), \text{ γιατί τότε θα έπρεπε να είναι και η } e^{x \cdot x}, \text{ κάτι που δεν ισχύει (χρήση της ανισότητας } \cos x > 1 - x^2/2).$$

Μετασχηματισμός Laplace

Κριτήριο ύπαρξης

Έστω ότι για τη συνάρτηση $f(t)$ γνωρίζουμε ότι

(α) είναι εκθετικής τάξης, δηλαδή, $|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t}$, για κάθε $t \in [c, +\infty)$ για $M > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β) είναι τμηματικά συνεχής με πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες.

Τότε, ο μετασχηματισμός Laplace $L(f)(s)$ ορίζεται καλώς **για $s \in (\alpha, +\infty)$** και $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

Απόδειξη

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt}_{c \rightarrow \infty} = \int_0^c |f(t)e^{-st}| dt + \int_c^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt.$$

$$\int_c^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_c^{+\infty} M e^{(a-s)t} dt = \frac{M e^{c(a-s)}}{s-a}, \quad s > a.$$

Μετασχηματισμός Laplace

Το κριτήριο ύπαρξης διασφαλίζει ότι μία τμηματικά συνεχής εκθετικής τάξης συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace. Ωστόσο, υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν είναι εκθετικής τάξης αλλά έχουν μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα: Έστω $f(t) = 2te^{t^2} \cos(e^{t^2})$ Παρατηρούμε ότι $f(t) = \frac{d}{dt} \sin(e^{t^2})$ και

$$\begin{aligned} (Lf)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \frac{d}{d\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \\ &= e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \\ &= -\sin 1 - \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \\ \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau &\leq \left| \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \right| \\ &= \int_0^{\infty} se^{-s\tau} |\sin(e^{\tau^2})| d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} se^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

Πηγή:
<https://math.stackexchange.com/questions/1270635/are-there-functions-that-are-not-of-exponential-order-for-which-you-can-define-a>

Μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = 1$.

Λύση

Έστω $s = \gamma + i\omega$. Είναι $L(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \Rightarrow L(1)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt$

Όταν $\gamma = \operatorname{Re}(s) \leq 0$, το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Όταν $\gamma = \operatorname{Re}(s) > 0$, το ολοκλήρωμα συγκλίνει και

$$s = \gamma + i\omega, \gamma > 0$$

$$L(f)(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}. \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

Συμπεραίνουμε, ότι $L(f)(s) = \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

$$L(f)(s)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} \cdot \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{oscillates}} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + \frac{1}{s} e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) dt - i \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) dt.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) dt = - \frac{\gamma \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)}{\omega^2 + \gamma^2} e^{-\gamma t} \bigg|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \quad \underline{\underline{\gamma < 0}} \rightarrow -\infty$$

Μετασχηματισμός Laplace

$$s = \gamma + i\omega$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι $s \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 1

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$.

$$\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s}, s > 0$$

Υπόδειξη: $\int x e^{-sx} dx = -\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} + c$

Λύση

$$L(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-sx} dx = \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right] + \frac{1}{s^2}.$$

Αν $s < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right] = -\infty$ και ο μετασχηματισμός δεν υπάρχει.

. Αν $s = 0$, $\mathcal{L}(t)(0) = \int_0^{\infty} t dt = \infty$

Αν $s > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right] = 0$ και $L(f)(s) = \frac{1}{s^2}$.

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 2

(α) Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t^2$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{2}{s^3}$, $s > 0$.

(β) Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t^n$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$.

Λύση

$$(α) \text{ Είναι: } \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = -\frac{t^2}{s} e^{-st} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

$$= -\frac{t^2}{s} e^{-st} - \frac{2}{s} t e^{-st} + \frac{2}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} = -\frac{t^2}{s} e^{-st} - \frac{2}{s} t e^{-st} - \frac{2}{s^3} e^{-st} + C.$$

$$L(t^2)(s) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-sx} dx = \left[-\frac{t^2}{s} - \frac{2}{s} t - \frac{2}{s^3} \right] e^{-st} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

$\xrightarrow{s > 0} \Delta \in \mathbb{N} \cup \text{αριθμοί}$
 $\xrightarrow{s > 0} L(t^2)(0) = \int_0^{\infty} t^2 dt = \infty$
 $\xrightarrow{s > 0} L(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$

$$L(t)(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$L(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$$

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 3

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = \sin(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$, $s > 0$.

Υπόδειξη: $\int \sin(\alpha x) e^{-sx} dx = -\frac{s \sin(\alpha x) + \alpha \cos(\alpha x)}{\alpha^2 + s^2} e^{-sx} + c$

Λύση

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt = - \frac{s \cdot \sin(\alpha t) + \alpha \cdot \cos(\alpha t)}{\alpha^2 + s^2} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

Αν $s < 0 \Rightarrow L(f)(s) \notin \mathbb{N} \cup \text{όχι}$

Αν $s = 0 \Rightarrow L(f)(0) = \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) dt \notin \mathbb{N} \cup \text{όχι}$

Αν $s > 0 \Rightarrow L(f)(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$.

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 4

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$, $s > 0$.

Υπόδειξη: $\int \cos(\alpha x) e^{-sx} dx = \frac{\alpha \sin(\alpha x) - s \cos(\alpha x)}{\alpha^2 + s^2} e^{-sx} + c$

Λύση

Μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{1}{s - \alpha}$, $s > \alpha$.

Λύση

$$L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{\alpha - s} [e^{(\alpha-s)t}]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\alpha - s} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-s)t} - 1 \right].$$

Αν $s = \alpha$, τότε $L(f)(s) = \int_0^{+\infty} dt = +\infty$ και ο μετασχηματισμός δεν υπάρχει.

Αν $s < \alpha$, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-s)t} = +\infty$ και ο μετασχηματισμός δεν υπάρχει.

Αν $s > \alpha$, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-s)t} = 0$ και $L(f)(s) = \frac{1}{s - \alpha}$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace



Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace - I

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και υπάρχει ο $L(f)$, τότε

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} L(f)(s) = 0.$$

- Αν $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $L(f), L(g)$, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} L(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-sx} dx$$

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s), s \in \{\text{τομή πεδίων ορισμού } L(f), L(g)\}$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $F(s) = L(f)(s), s > c$, τότε

$$L(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda), s - \lambda > c \text{ ή } s > c + \lambda.$$

$$L(f(t)e^{\lambda t}) = \int_0^{\infty} f(t) e^{\lambda t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-\lambda)t} dt = L(f)(s-\lambda).$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(s) = L(f)(s)$, και $g(t) = \begin{cases} 0, & t < \lambda \\ f(t - \lambda), & t \geq \lambda \end{cases}$

$$L(g)(s) = e^{-\lambda s} \cdot F(s), s \in (c, +\infty).$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L(f)(s) = 0.$$

Δραστηριότητα

Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ΔΕΝ μπορεί να είναι μετασχηματισμοί Laplace κάποιων άλλων συναρτήσεων.

$$\begin{array}{llll}
 (\alpha) F(s) = \frac{s}{s+1} & (\beta) F(s) = \frac{s^2}{s+1} & (\gamma) F(s) = \overset{\mathcal{L}(\cos t)(s)}{\downarrow} \frac{s}{s^2+1} & (\delta) \underline{F(s)} = \underline{s^2+1}.
 \end{array}$$

Η (α) δεν μπορεί γιατί $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 1 \neq 0.$

Ομοίως η (β) και η (δ).

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s),$$

Άσκηση 5

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = 1 + 2t$, $t \geq 0$.

Λύση

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(1+2t)(s) = \mathcal{L}(1)(s) + 2\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}, \quad s > 0.$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s),$$

Άσκηση 6

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sinh(\alpha t)$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$L(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a},$$

$$s > a$$

$$L(\sinh(\alpha t))(s) = \frac{1}{2} [L(e^{\alpha t})(s) - L(e^{-\alpha t})(s)] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{\alpha}{s^2 - a^2},$$

$s > a$ $s > -a$

$\left. \begin{matrix} s > a \\ s > -a \end{matrix} \right\} s > |a|$

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s),$$

Άσκηση 7

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = \cosh(\alpha t)$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s),$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sin^2(\alpha t)$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Αξιοποιείστε την ταυτότητα $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Λύση

$$L(f)(s) = \frac{1}{2} \left[L(1)(s) - L(\cos(2x))(s) \right] = \frac{1}{2} \left(\overset{s>0}{\frac{1}{s}} - \overset{s>0}{\frac{s}{s^2 + 4}} \right), s > 0.$$

$$L(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda), \quad s > c + \lambda.$$

Παραδείγματα

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$e^{at}f(t) \leftrightarrow F(s - a)$$

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{(s-a)}, \quad s > a$$

$$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

$$te^{at} \leftrightarrow \frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a$$

$$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}, \quad s > \lambda$$

$$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}, \quad s > \lambda$$

$$\underline{L(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda), s > c + \lambda.}$$

$$L(\sinh t)(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \quad s > 1.$$

Άσκηση 9

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = e^{\lambda t} \cdot \sinh(t)$, $t \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$L(f)(s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2 - 1}, \quad s - \lambda > 1 \Leftrightarrow s > \lambda + 1$$

$$\mathcal{L}(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda), \quad s > c + \lambda.$$

Άσκηση 10

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = e^{\lambda t} \cdot \sin^2(t)$, $t \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \lambda} - \frac{1}{(s - \lambda)^2 + 4} \right), \quad s > \lambda. \quad \mathcal{L}(\sin^2(t))(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 4} \right), \quad s > 0$$

$$g(t) = f(t - \lambda) \rightarrow L(g)(s) = e^{-\lambda s} \cdot F(s), s \in (c, +\infty).$$

2

Άσκηση 11

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $g(t) = \sin(t - \pi)$, $t \geq \pi$.

Υπόδειξη: Αν $f(x) = \sin(ax)$, τότε $L(f)(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$, $s > 0$.

$$L(g)(s) = e^{-\pi s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1^2}$$

(Laplace της g): συνάρτηση των s

$$L(g)(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace - II

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει ο $\underline{L}(f)(s)$, για $s > c$, και $\underline{g}(t) = f(\lambda t)$, $\lambda > 0$, τότε:

$$\underline{L}(g)(s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), s \in (c\lambda, +\infty)$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει ο $L(f)$, για $s > c$, και $\underline{g}(t) = t^n \cdot f(t)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε:

$$\underline{L}(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s), s \in (c, +\infty).$$

$$\underline{L}(t^n \cdot f)(s) = (-1)^n \cdot [L(f)(s)]^{(n)}$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, n -φορές παραγωγίσιμη με εκθετικής τάξης παραγώγους, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός των $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, και είναι:

$$\underline{L}(f^{(k)})(s) = s^k L(f)(s) - s^{k-1}f(0) - \dots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0), s > \alpha.$$

Ειδικότερα:

$$\text{Για } k = 1: \underline{L}(f')(s) = sL(f)(s) - f(0).$$

$$\text{Για } k = 2: \underline{L}(f'')(s) = s^2 L(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace - II

Απόδειξη για $k = 1$: $L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$.

$$L(f')(s) = \int_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx} dx = [f(x) e^{-sx}]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} (-sx)' dx = -f(0) + sL(f)(s).$$

Η παραπάνω σχέση έχει νόημα για $s > \alpha$ που εξασφαλίζει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) e^{-sx} = 0$.

Για $k = 2$: $L(f'')(s) = s^2 L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$.

$$\begin{aligned} L(f'')(s) &= \int_0^{+\infty} f''(x) e^{-sx} dx = [f'(x) e^{-sx}]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} f'(x) e^{-sx} (-sx)' dx = -f'(0) + sL(f')(s) \\ &= -f'(0) + s[sL(f)(s) - f(0)] = s^2 L(f)(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση έχει νόημα για $s > \alpha$ που εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) e^{-sx} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) e^{-sx} = 0.$$

$$g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 12

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = te^{2t}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$, $s > 2$.

Λύση

$$f(t) = te^{2t}$$

$$L(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

$$L(t \cdot e^{2t}) = (-1)^1 \cdot [L(e^{2t})(s)]' = - \left(\frac{1}{s-2} \right)' = \frac{1}{(s-2)^2}, \quad s > 2.$$

$$g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 13

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t \cdot \cos(\alpha t)$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$, $s > 0$.

$$\mathcal{L}(\cos(\alpha t)) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

Λύση

$$\mathcal{L}(t \cdot \cos(\alpha t))(s) = (-1)^1 \cdot \left(\frac{s}{s^2 + \alpha^2} \right)' = - \frac{s^2 + \alpha^2 - s \cdot (2s)}{(s^2 + \alpha^2)^2} = \frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}, s > 0.$$

$$g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 14

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t^2 \cdot e^{at}$, $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{2}{(s-a)^3}$, $s > a$.

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$$

Λύση

$$\mathcal{L}(t^2 \cdot e^{at})(s) = (-1)^2 \cdot [\mathcal{L}(e^{at})(s)]'' = \frac{2}{(s-a)^3}, s > a.$$

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a} \Rightarrow (\mathcal{L}(e^{at}))' = -\frac{1}{(s-a)^2} \Rightarrow (\mathcal{L}(e^{at})(s))'' = \frac{2}{(s-a)^3}$$

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t} \cdot f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s - \lambda).$$

$$\mathcal{L}(1) \rightarrow g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow \mathcal{L}(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 15

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t \cdot e^t \cdot \cos(t)$, $t \geq 0$, να βρεθεί η $\mathcal{L}(f)$.

Λύση

$$\mathcal{L}(t \cdot e^t \cdot \cos(t))(s)$$

$$(a) \mathcal{L}(e^t \cdot \cos(t))(s) \stackrel{(a)}{=} \mathcal{L}(\cos t)(s-1) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}, \quad s-1 > 0 \quad \text{ή} \quad s > 1.$$

$$\mathcal{L}(t \cdot e^t \cdot \cos(t))(s) \stackrel{(1)}{=} (-1)^1 \cdot \left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1} \right)' = - \frac{(s-1)^2+1 - 2(s-1)^2}{[(s-1)^2+1]^2} = \frac{(s-1)^2-1}{[(s-1)^2+1]^2}, \quad s > 1.$$

$$(b) \mathcal{L}(t \cos t)(s) \stackrel{(1)}{=} (-1)^1 \cdot \left(\frac{s}{s^2+1} \right)' = - \frac{s^2+1 - s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(e^t \cdot t \cdot \cos t)(s) \stackrel{(a)}{=} \frac{(s-1)^2-1}{[(s-1)^2+1]^2}, \quad s > 1.$$

$$\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad s > 0$$

$$L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$$

Άσκηση 16

Έστω συνάρτηση $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί την $y' + 2y = e^{-3t}$, $y(0) = 1$.

Δείξτε ότι $L(y)(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$, $s > -3$.

Λύση

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t} \Rightarrow \mathcal{L}(y')(s) + 2\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(e^{-3t})(s)$$

$$\Rightarrow s \cdot \mathcal{L}(y)(s) - y(0) + 2\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s+3}, s > -3.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y)(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}, s > -3.$$

$$L(f'')(s) = s^2 L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$$

Άσκηση 17

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί την $y'' + 2y' - 3y = 1$, με $y(0) = 2$ και $y'(0) = 1$. Δείξτε ότι

$$L(y)(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s(s-1)(s+3)}, \quad s > 0$$

Λύση

$$y'' + 2y' - 3y = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(y'')(s) + 2\mathcal{L}(y')(s) - 3\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(1)(s)$$

$$\Rightarrow \underline{s^2 \mathcal{L}(y)(s) - 2s - 1} + 2(s \mathcal{L}(y)(s) - 2) - 3\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 2s - 3) \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s} + 2s + 5 \Leftrightarrow \mathcal{L}(y)(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s \cdot (s-1)(s+3)}, \quad s > 0$$

Συνέλιξη συναρτήσεων

Η συνέλιξη (convolution) των $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζεται να είναι: $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$.

Αν $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τότε: $f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$.

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{array} \right\} 0 \leq y \leq x$$

Ιδιότητες της συνέλιξης $f * g$.

(α) Αντιμεταθετική: $f * g = g * f$

(β) Προσεταιριστική: $f * (g * h) = (f * g) * h$

(β) Επιμεριστική: $f * (g + h) = f * g + f * h$

Μετασχηματισμός συνέλιξης συναρτήσεων

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Έστω $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τμηματικά συνεχείς, εκθετικής τάξης συναρτήσεις και έστω $L(f), L(g)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των f, g . Τότε, ορίζεται ο $L(f * g)$ και είναι

$$L(f * g)(s) = L(f)(s) L(g)(s)$$

$$L(f * g)(s) = L(f)(s) L(g)(s)$$

$$L(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

Άσκηση 18

Αν $f(t) = e^{at}$, $g(t) = e^{bt}$, να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνέλιξης $f * g$.

Λύση

$$f * g(x) = \int_0^x e^{a(x-t)} \cdot e^{bt} dt$$

$$L(f * g)(s) = L(f)(s) \cdot L(g)(s) = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-b}, \quad s > \max(a, b).$$

Μετασχηματισμός συνέλιξης συναρτήσεων

Άσκηση 19

Έστω $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, και λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης $y(t) = e^{-t} + \int_0^t y(\omega) \sin(t - \omega) d\omega$.

Να δείξετε ότι $L(y)(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s + 1)}, s > 0$.

Λύση

$$y(t) = e^{-t} + y * \sin(t) \Rightarrow L(y)(s) = L(e^{-t})(s) + L(y)(s) \cdot L(\sin(t))(s)$$

$$\Rightarrow L(y)(s) = \frac{1}{s+1} + L(y)(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}, s > 0$$

$$\Rightarrow L(y)(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s+1)}, s > 0.$$

Μετασχηματισμός περιοδικής συνάρτησης

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τμηματικά συνεχής, εκθετικής τάξης περιοδική συνάρτηση με περίοδο T και έστω $L(f)$ ο μετασχηματισμός Laplace της f . Τότε, ισχύει η εξής σχέση:

$$L(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt.$$

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: <https://math.stackexchange.com/questions/1552013/on-laplace-transform-of-periodic-functions>

Παράδειγμα

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, περιοδική με περίοδο $T = 2$ και $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ να βρεθεί ο $L(f)$.

Λύση

Από το Θεώρημα είναι:

$$\begin{aligned} L(f)(s) &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 -e^{-st} dt + \int_1^2 e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{1}{s} [e^{-st}]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{s} [e^{-st}]_{t=1}^{t=2} \right) = \frac{2e^{-s} - 1 - e^{-2s}}{s(1 - e^{-2s})}. \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός περιοδικής συνάρτησης

Άσκηση 20

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, περιοδική με περίοδο $T = 1$ και $f(t) = t$, $0 \leq t < 1$, να δείξετε ότι

$$L(f)(s) = \frac{2 - 2e^{-s} - 2se^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}, s > 0.$$

Λύση