

Μετασχηματισμός Fourier

(Fourier Transform)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Ανακοίνωση

Η προθεσμία για την παραλαβή των συγγραμμάτων του 2^{ου} εξαμήνου είναι **έως την Παρασκευή 30 Μαΐου 2025.**

Εισαγωγή

Άσκηση 1

Δείξτε ότι $\int e^{-i\omega x} dx = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} + c$

$$\int e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega x})' dx = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} + c = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} + c.$$

Εισαγωγή

Άσκηση 2

Υπολογίστε το $\int \cos(bx) e^{-i\omega x} dx$

Υπόδειξη: Κατά παράγοντες ολοκλήρωση ή εναλλακτικά $\cos(bx) = (e^{ibx} + e^{-ibx}) / 2$

$$\begin{aligned} \int \cos(bx) e^{-i\omega x} dx &= \int \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2} \left[\int e^{i(b-\omega)x} dx + \int e^{-i(b+\omega)x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{i}{b-\omega} e^{i(b-\omega)x} - \frac{i}{b+\omega} e^{-i(b+\omega)x} \right], \end{aligned}$$

Εισαγωγή

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, λέμε ότι είναι **απόλυτα ολοκληρώσιμη** (γράφουμε $f \in L^1(\mathbb{R})$) όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

Παράδειγμα

(α) Οι συναρτήσεις $e^{-|x|}$, $1/x^2$ ανήκουν στο $L^1(\mathbb{R})$

(β) Οι συναρτήσεις 1 , $1/x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , ΔΕΝ ανήκουν στο $L^1(\mathbb{R})$

Μετασχηματισμός Fourier

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η παράσταση

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}.$$

ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier** της f .

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται καλώς. Πράγματι:

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{-i\omega x}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier (Fourier transform) είναι ένας μιγαδικός αριθμός

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Σημείωση: Γράφουμε και $\hat{f}(\omega) = \tilde{f}(\omega) = F(f)(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$.

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

Λύση

$$\int_0^{\infty} |e^{-x}| dx < \infty$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)x} dx$$

$$= -\frac{1}{1+i\omega} \left[e^{-(1+i\omega)x} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - i \frac{\omega}{1+\omega^2}, \omega \in \mathbb{R}.$$

Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1/2 \end{cases}$ (και 0 αλλού), να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της f .

Λύση

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 -e^{-i\omega x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega x} dx = \dots$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης f ,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

είναι μία μιγαδική συνάρτηση του ω . Αν x είναι ο χρόνος και $f(x)$ ένα σήμα (ηχητικό, ηλεκτρομαγνητικό κλπ), τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f λαμβάνει μεγάλες τιμές (κατά μέτρο) στις συχνότητες ω που εκφράζονται περισσότερο στην f .

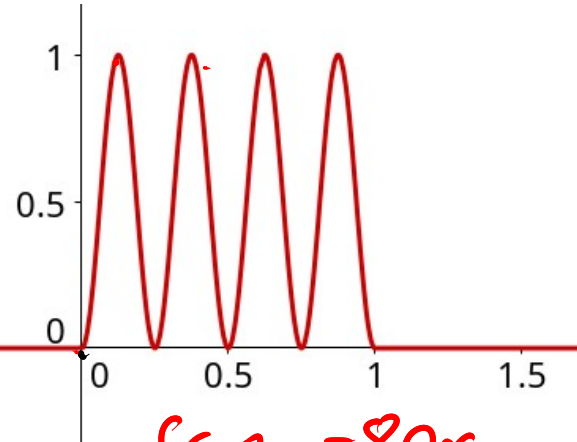
Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί μία **αποσύνθεση** του σήματος f στις συχνότητες που το αποτελούν.



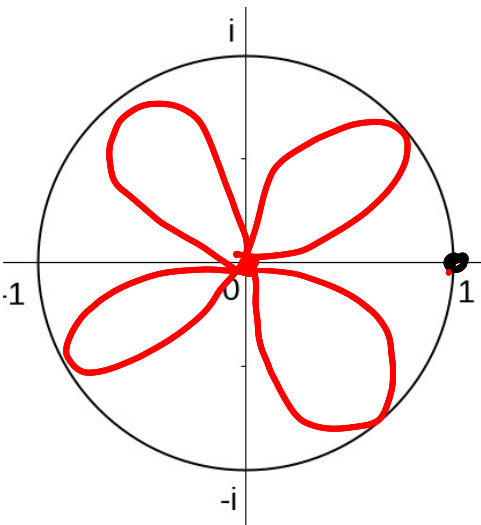
Παράδειγμα

$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2}, \quad 0 < x < 1, \text{ και } 0 \text{ αλλού, } \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx$$

$$\omega \in \mathbb{R}$$

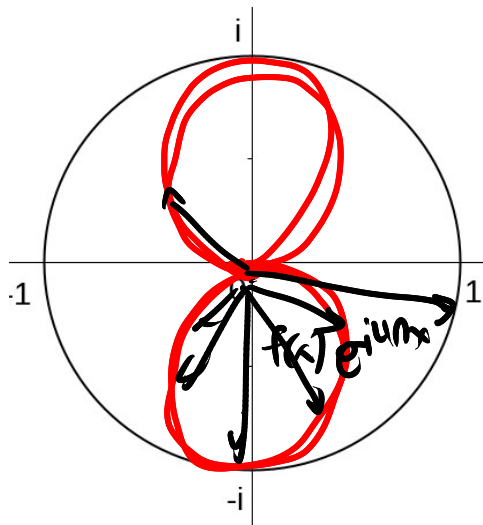


$$f(x) \cdot e^{-i\omega x}$$



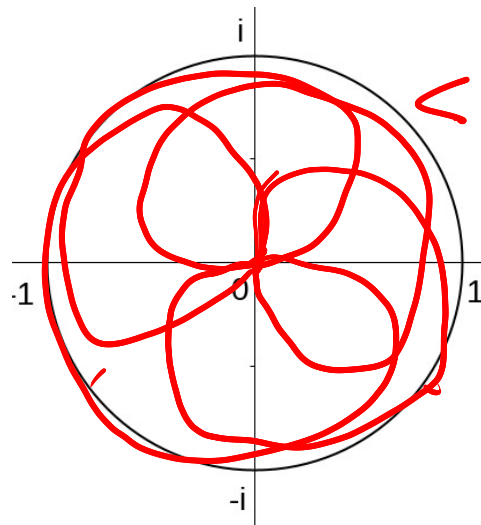
$$\omega = 1 \cdot 2\pi$$

$$f(x) \cdot e^{-i\omega x}$$



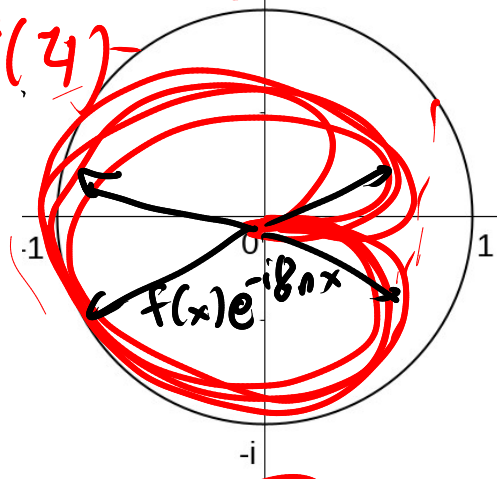
$$\omega = 2 \cdot 2\pi$$

$$f(x) \cdot e^{-i\omega x}$$



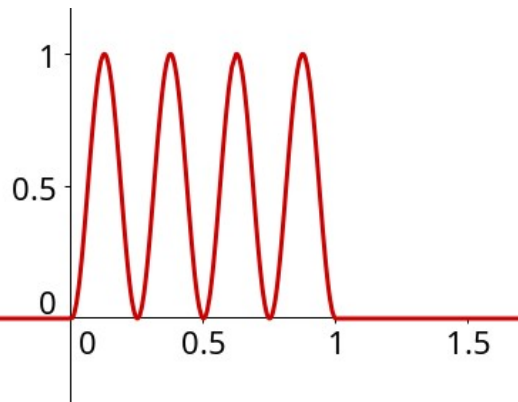
$$\omega = 3 \cdot 2\pi$$

$$f(x) \cdot e^{-i\omega x}$$

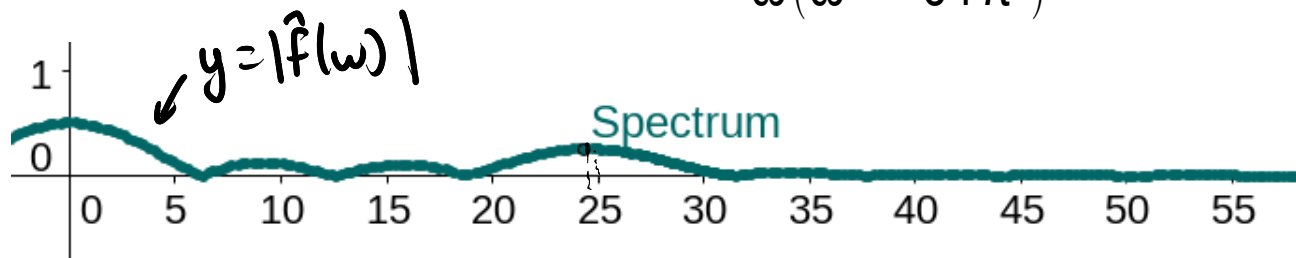


$$\omega = 4 \cdot 2\pi$$

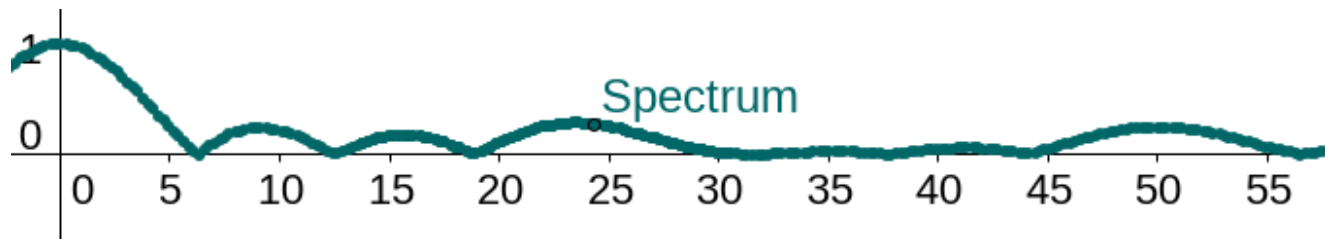
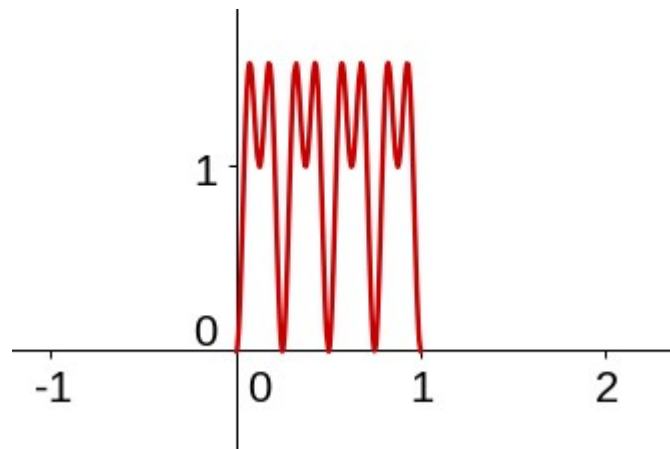
$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2}, \quad 0 < x < 1$$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{32i\pi^2 e^{-i\omega} (e^{i\omega} - 1)}{\omega(\omega^2 - 64\pi^2)}$$

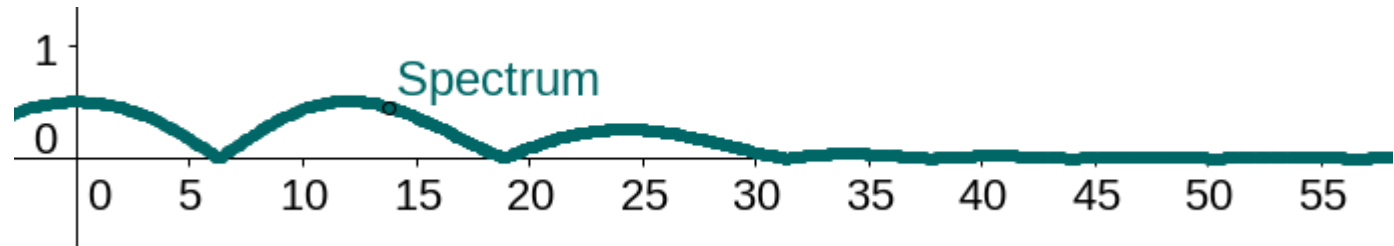
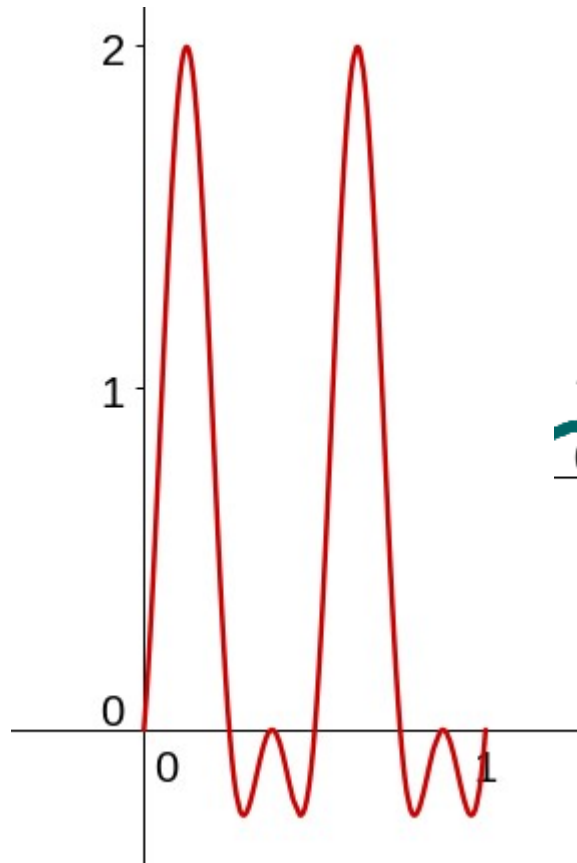


$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2} + \frac{1 - \cos(16\pi x)}{2}, \quad 0 < x < 1$$



$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2} + \sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$



Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Αν $\hat{f}$, ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως:

$$F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Αποδεικνύεται⁽¹⁾ πως σε κάθε σημείο συνέχειας της f είναι:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$F^{-1}(F(f)(\omega)) = f(x)$$

ή

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Όπως και στην περίπτωση του κανονικού μετασχηματισμού, η συνθήκη $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ είναι μία από τις ικανές συνθήκες ύπαρξης του αντίστροφου μετασχηματισμού.

(1) <https://math.stackexchange.com/a/2879354/664787>

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα 1

(α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της f .

(β) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, να αποδείξετε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 \cos(\omega x) dx - i \int_{-1}^1 \sin(\omega x) dx \\ &= \left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega} \right]_{x=-1}^{x=1} - i \left[\frac{\cos(\omega x)}{\omega} \right]_{x=-1}^{x=1} = 2 \frac{\sin \omega}{\omega} \end{aligned}$$

Σημειώσεις: 1. Καθώς η f είναι άρτια, μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας μόνο το ολοκλήρωμα με το συνημίτονο.

2. Η ολοκλήρωση του $e^{-i\omega x}$ μπορεί να γίνει απευθείας, με τους γνωστούς κανόνες ολοκλήρωσης.

$$\text{(β)} \quad \text{Για κάθε } x \text{ είναι: } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega x) 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x) 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ παίρνουμε, } 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega = \pi \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση δέλτα του Dirac ορίζεται ως εξής: $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$

Η δ δεν είναι συνάρτηση με την τυπική έννοια, ωστόσο αποκτά έννοια ως όριο της συνάρτησης

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}, \text{ καθώς το } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Ορισμένες από τις ιδιότητες της συνάρτησης δ είναι οι εξής:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \alpha) f(x) dx = f(\alpha) \quad (3) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x) f(x) dx = \frac{1}{|\alpha|} f(x) \quad (4) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = 2\pi \delta(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier της δ : $\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega 0} = 1.$

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα 3

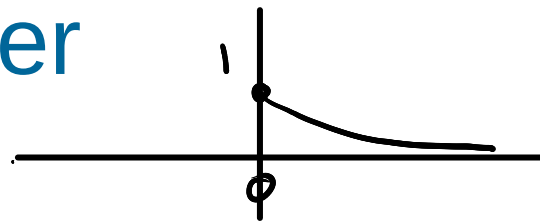
Η συνάρτηση $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, ονομάζεται μοναδιαία βηματική συνάρτηση ή συνάρτηση Heaviside.

Η συνάρτηση f δεν είναι ολοκληρώσιμη, ωστόσο μπορεί να προσεγγιστεί ως όριο των $H_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ για $\alpha \rightarrow 0^+$.

Αποδεικνύεται ότι $H'(x) = \delta(x)$.

Μετασχηματισμός Fourier της H : $\hat{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$

Μετασχηματισμός Fourier



Άσκηση

(α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, δείξτε ότι $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$.

(β) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, να υπολογίσετε το $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx$, $\alpha \neq 0$.

Λύση $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx = \dots$

(α) Από προηγούμενη άσκηση είναι $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega} = \frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{(β) Είναι } F^{-1}(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) \left(\frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega x) - \omega \cos(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση

(α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, δείξτε ότι $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$.

(β) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, να υπολογίσετε το $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx$, $\alpha \neq 0$.

Λύση

(β) f συνεχής $\mathbb{R} - \{0\}$ άρα $f(x) = F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega$

Συμπεραίνουμε ότι:

$$x < 0: \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = 0.$$

$$x > 0: \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = e^{-x} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = \pi e^{-x}.$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Έστω ότι για τις f, g υπάρχει μετασχηματισμός Fourier (π.χ. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$). Συμβολίζουμε:

$$F(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$F(c_1 f + c_2 g)(\omega) = c_1 F(f)(\omega) + c_2 F(g)(\omega)$$

$$F(f(x - \alpha))(\omega) = e^{-i\omega\alpha} F(f)(\omega)$$

$$F(e^{-i\lambda x} f(x))(\omega) = F(f)(\omega - \lambda)$$

$$F(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F(f)\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

Συνέλιξη συναρτήσεων

Ορισμός

Έστω δύο συναρτήσεις f, g . Η συνέλιξη (convolution) των f, g ορίζεται να είναι:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Η συνέλιξη δεν υπάρχει πάντα (π.χ. υπάρχει όταν $f, g \in L^2(\mathbb{R})$). Ωστόσο, όταν υπάρχει έχει τις εξής ιδιότητες:

Ιδιότητες της συνέλιξης $f * g$.

(α) Αντιμεταθετική: $f * g = g * f$

(β) Προσεταιριστική: $f * (g * h) = (f * g) * h$

(β) Επιμεριστική: $f * (g + h) = f * g + f * h$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

Συνέλιξη συναρτήσεων

Αποδεικνύεται ότι $\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

Πράγματι:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(x-y)} f(x-y) e^{-i\omega y} g(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(x-y)} f(x-y) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y} g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u} f(u) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y} g(y) dy \\ &= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι: $\widehat{f \cdot g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$.

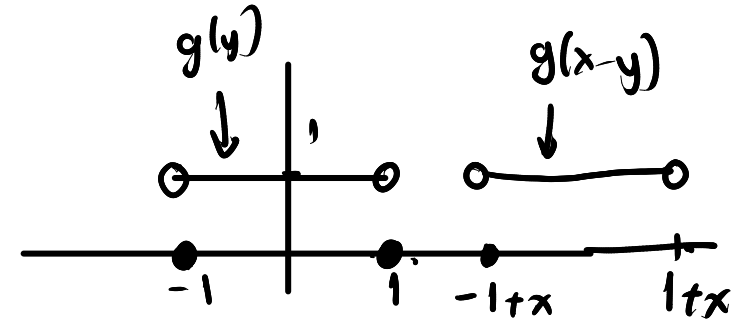
Συνέλιξη συναρτήσεων

$$\underline{1 < -1+x} \Leftrightarrow \underline{x > 2}$$

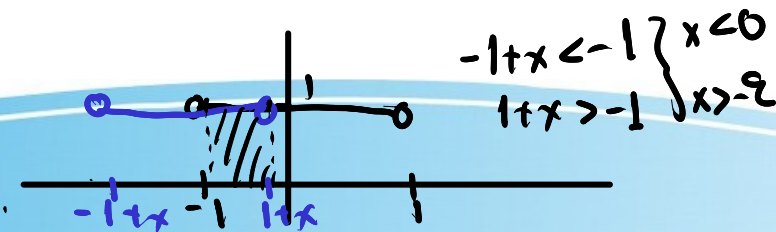
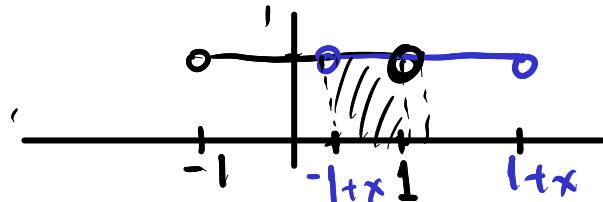
Άσκηση: Έστω $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$.

(α) Δείξτε ότι $g * g = f$.

(β) Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της f .



$$-1 < -1+x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$



$$(a) \quad g * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \cdot g(y) dy$$

• Για $x > 2$: $g * g(x) = 0$.

• Για $0 < x < 2$: $g * g(x) = \int_{-1+x}^1 1 \cdot 1 dy = 2 - x$

• Για $-2 < x < 0$: $g * g(x) = \int_{-1}^{1+x} 1 \cdot 1 dy = 2 + x$

• Για $x < -2$: $g * g(x) = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} 1+x < -1 \\ x < 2 \end{matrix}}$$

$$g * g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2 \\ 2-x, & 0 \leq x < 2 \\ 2+x, & -2 \leq x < 0 \\ 0, & x < -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2-|x| \\ 2-|x|, -2 \leq x < 0 \end{matrix} = f(x).$$

$$f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier και παράγωγος

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της f (π.χ. $f' \in L^1(\mathbb{R})$). Τότε,

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x) dx = [e^{-i\omega x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} e^{-i\omega x} f(x) dx = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\widehat{f''}(\omega) = i\omega \hat{f}'(\omega) = (i\omega)^2 \hat{f}(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega), \text{ κλπ.}$$

Αν επιπλέον, η $xf(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε:

$$\widehat{xf(x)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} xf(x) dx = i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier και παράγωγος

Παράδειγμα

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, τότε $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

Απόδειξη

Παραγωγίζουμε την f και βρίσκουμε $f'(x) = -xf(x)$.

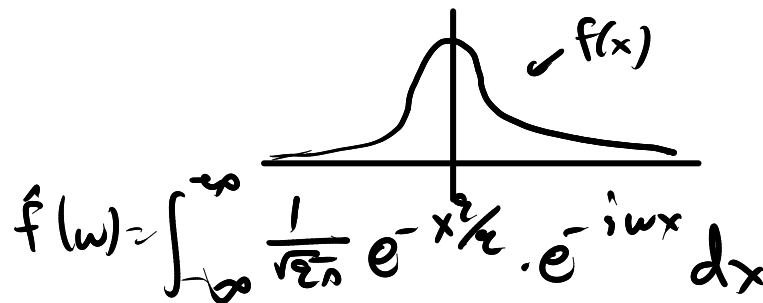
Παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier των δύο μελών της εξίσωσης:

$$\widehat{f'(\omega)} = -\widehat{xf(x)}(\omega) \Leftrightarrow i\omega \hat{f}(\omega) = -i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) \Leftrightarrow \frac{\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = -\omega \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega} [\ln \hat{f}(\omega)] = -\omega \Leftrightarrow \ln(\hat{f}(\omega)) = -\frac{\omega^2}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow \hat{f}(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{2}} \text{ και } C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Βρήκαμε, ότι $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

Σημείωση: Ανάλογα αποδεικνύεται πως για την $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ είναι $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$



$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-i\omega x} dx$

Εφαρμογή σε ΔΕ

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $u_t(t, x) = u_{xx}(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(0, x) = \delta(x)$.

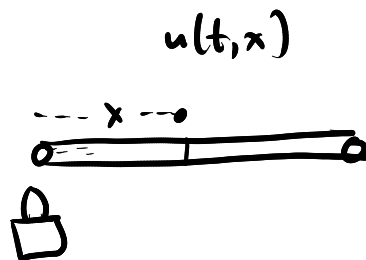
Θεωρούμε γνωστό ότι αν $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ τότε $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$

Λύση

Εφαρμόζουμε στη δ.ε. μετασχηματισμό Fourier (ως προς x).

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega) = \widehat{u''}(\omega) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \hat{u}(\omega) = -\omega^2 \hat{u}(\omega), \text{ με } \hat{u}(0, \omega) = \hat{\delta}(\omega) = 1.$$

Η τελευταία δ.ε. λύνεται εύκολα και βρίσκουμε: $\hat{u}(t, \omega) = e^{-\omega^2 t} \Leftrightarrow u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$



$F(t)$	$\widehat{F}(\omega)$
$f(x)$ $f(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$	$\widehat{f}(\omega)$
$\widehat{f(-t)}$	$2\pi f(\omega)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + i\omega}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\beta(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t < 1, \\ 0, & \text{if } t > 1 \end{cases}$	$2 \operatorname{sinc}(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}$
$\frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}(t)$	$\beta(\omega)$

$\widehat{f'(t)}$	$i\omega \widehat{f}(\omega)$
$\widehat{f''(t)}$	$(i\omega)^2 \widehat{f}(\omega)$
$\widehat{tf(t)}$	$i \frac{d}{d\omega} \widehat{f}(\omega)$
$t^2 f(t)$	$i^2 \frac{d^2}{d\omega^2} \widehat{f}(\omega)$
$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$\widehat{f}(\omega - \omega_0)$
$f\left(\frac{t - t_0}{k}\right)$	$ke^{-i\omega t_0} \widehat{f}(k\omega)$
$(f * g)(t)$	$\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$
$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0 \\ 1, & \text{if } t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)f(t)$	$e^{-i\omega t_0} \widehat{f}(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Γενικά, ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης είναι ένας μιγαδικός αριθμός:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Αν f μία **άρτια** συνάρτηση, τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = 0$ και

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx.$$

Ειδικότερα, $\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos[(-\omega)x] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{f}: \text{άρτια}.$

Επιπλέον, $\hat{f}: \text{άρτια} \Rightarrow \hat{f}(\omega) \sin(\omega x)$ περιττή και

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega.$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Γενικά, ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης είναι ένας μιγαδικός αριθμός:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Αν f μία **περιττή** συνάρτηση, τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 0$ και

$$\hat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Ειδικότερα, $\hat{f}(-\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin[(-\omega)x] dx = 2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = -\hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{f}: \text{περιττή}.$

Επιπλέον, $\hat{f}: \text{περιττή} \Rightarrow \hat{f}(\omega) \cos(\omega x)$ περιττή και

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega.$$

Ημ/Συν μετασχηματισμός Fourier

Στην περίπτωση όπου μία συνάρτηση f ορίζεται στο $(0, +\infty)$, τότε μπορούμε να την επεκτείνουμε στο $(-\infty, 0)$:

(α) ως περιττή συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$ $g: \text{παραρτητική}$ $g(-x) = -g(x)$

Τότε θα ισχύει: $\hat{g}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{g}(\omega) \sin(\omega x) d\omega, x \geq 0$.

(β) ως άρτια συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$

Τότε θα ισχύει: $\hat{g}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega, x \geq 0$.

Ημ/Συν μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση 3

Έστω $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

(α) Να επεκταθεί η f ως περιττή συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$,

(β) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της g είναι $\hat{g}(\omega) = -2i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(γ) να δείξετε ότι: $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$, $a > 0$.



Υπόδειξη: Αν f : περιττή τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$, $x \geq 0$.

Δίνεται ότι: $\int e^{-x} \sin(ax) dx = -\frac{e^{-x}}{a^2 + 1} (a \cos(ax) + \sin(ax)) + c$

$$(a) \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(-x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x > 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases} = -g(x)$$

$$(b) \quad \hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \sin(\omega x) dx = -2i \int_0^{+\infty} g(x) \sin(\omega x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -2i \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(\omega x) dx = +2i \frac{e^{-x}}{\omega^2 + 1} [\omega \cdot \cos(\omega x) + \sin(\omega x)] \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} \\
 &= -2i \frac{1}{\omega^2 + 1} \cdot [\omega \cdot 1 + 0] = \frac{-2i \cdot \omega}{\omega^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

$$\begin{aligned}
 g(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \sin(\omega x) d\omega \\
 &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) \sin(\omega x) d\omega = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-2i \cdot \omega}{\omega^2 + 1} \cdot \sin(\omega x) d\omega = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega \xrightarrow{x > 0} e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega \quad \text{and for } x < 0
 \end{aligned}$$

Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Άσκηση 4

Να βρεθεί μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1 - \omega), & 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & , \omega > 1 \end{cases}$$

Δίνεται ότι $\int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + c$

Υπόδειξη: Αν f περιττή τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$, $x \geq 0$.

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = \frac{\pi}{2}(1 - \omega), \quad 0 \leq \omega \leq 1. \quad \text{Έστω } f: \text{ περιττή.}$$

$$\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = -\pi i (1 - \omega), \quad 0 \leq \omega \leq 1.$$

$$\text{Τότε } f(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega = -\frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{n} \int_0^1 (-ni)(1-w) \cdot \sin(wx) dw = - \int_0^1 \sin(wx) dw + \int_0^1 w \sin(wx) dw = \\
&= - \frac{1}{x} \cos(wx) \Big|_{w=0}^{w=1} - \frac{1}{x} w \cos(wx) \Big|_{w=0}^{w=1} + \frac{1}{x^2} \sin(wx) \Big|_{w=0}^{w=1} \\
&= - \frac{\cos(x) - 1}{x} - \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} = \frac{1 - 2\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}.
\end{aligned}$$

Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Άσκηση 5

Να βρεθεί μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1 - \omega), & 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$$

Δίνεται ότι $\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + c$

Υπόδειξη: Αν f άρτια τότε $\hat{g}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega, x \geq 0$.

Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Άσκηση 6

Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση $\int_0^{+\infty} y(x) \sin(\omega x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < 1 \\ 2, & 1 \leq \omega < 2 \\ 0, & \omega \geq 2. \end{cases}$

Υπόδειξη: Αν f : περιττή τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$, $x \geq 0$.

Έστω λύση $y(x)$: περιττή

Από τη σειρά στο ολοκλήρωμα

Δραστηριότητα

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και περιοδική στο $[-L, L]$.

$$\text{Αν } \omega_n = \frac{\pi n}{L}, \text{ τότε } \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L} \text{ και } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega_n,$$

$$\text{όπου } C(\omega_n) = \frac{c_n}{\Delta\omega_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Για $L \rightarrow +\infty$, είναι $\Delta(\omega_n) \rightarrow 0$ και από τα παραπάνω παίρνουμε:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega_n \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \text{ όπου } C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Δηλαδή: Ο μετασχηματισμός Fourier είναι η οριακή περίπτωση των σειρών Fourier όταν η περίοδος της συνάρτησης προσεγγίζει το άπειρο.