

Σειρές Fourier

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Σειρές Fourier

Σειρές Fourier

Οι μαθηματικοί του 18^{ου} αιώνα, συμπεριλαμβανομένων των Daniel Bernoulli και Leonard Euler, προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα της κίνησης μιας τεντωμένης χορδής με μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Αυτές ωστόσο οι δ.ε. δεν λυνόταν εύκολα καθώς δεν είχαν «στοιχειώδεις συναρτήσεις» ως λύσεις.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, εισήγαγαν άπειρες σειρές συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου που ικανοποιούσαν τις εξισώσεις.

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, ο Joseph Fourier, ενώ μελετούσε το πρόβλημα της ροής της θερμότητας, ανέπτυξε μια συνεκτική θεωρία τέτοιων σειρών οι οποίες καθιερώθηκαν να ονομάζονται σειρές Fourier.

$$m=n: \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2nx)) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2n} \sin(2nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Εισαγωγή

Εισαγωγική άσκηση 1

Συμβολίζουμε $\delta_{nm} = 1$, αν $n = m$ και 0 , αν $n \neq m$. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0. \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} [\cos(n\pi) - \cos(n(-\pi))] = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \pi \delta_{nm}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \pi \delta_{nm}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} [\sin(m-n)\pi - \sin(m-n)(-\pi)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} [\sin(m+n)\pi - \sin(m+n)(-\pi)] \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$, $\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$, $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)]$

Εισαγωγή

$$\frac{1}{n} \int \cos(nx) \cos(mx) dx = \delta_{nm}$$

Εισαγωγική άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos(x) + \alpha_2 \cdot \cos(2x) + \alpha_3 \cdot \cos(3x)$.

(α) Είναι η f περιοδική (αν ναι ποια είναι η περίοδός της;)

(β) Αξιοποιείστε την εισαγωγική άσκηση 1 για να εκφράσετε τους συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ως κατάλληλα ολοκληρώματα της f .

$$\int_{-n}^n f(x) \cos 2x dx = \alpha_0 \int_{-n}^n \cos 2x dx + \alpha_1 \int_{-n}^n \cos x \cdot \cos 2x dx + \alpha_2 \int_{-n}^n \cos 2x \cos 2x dx + \alpha_3 \int_{-n}^n \cos 3x \cos 2x dx$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{n} \int_{-n}^n f(x) \cos 2x dx$$

Βασική Ιδέα

Από την εισαγωγική άσκηση 2, προκύπτει ότι σε κάθε συνάρτηση f που είναι γραμμικός συνδυασμός $\sin$ και $\cos$ οι συντελεστές γράφονται ως ολοκλήρωμα της f .

Καθώς οι συναρτήσεις $\sin$ και $\cos$ είναι οι βασικότερες 2π -περιοδικές συναρτήσεις, εύλογα ανακύπτει το ερώτημα:

Είναι δυνατόν κάθε 2π -περιοδική συνάρτηση f να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \end{aligned}$$



$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x + \dots$$

Βασική Ιδέα

Ο Joseph Fourier κατάλαβε πως αν υπήρχε κάποια τέτοια ανάλυση της 2π -περιοδικής f , και συνέκλινε⁽¹⁾ στην f , τότε οι συντελεστές θα έπρεπε να ανάκτώνται από τα ολοκληρώματα

Είναι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{a_m}_{\cos(mx)} + \underbrace{b_m}_{\sin(mx)} \right) \underbrace{\cos(nx)}_{\cos(nx)} dx = \underbrace{a_n}_{\cos^2(nx)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \begin{cases} 2\pi a_0, & n=0 \\ \pi a_n, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{a_m}_{\cos(mx)} + \underbrace{b_m}_{\sin(mx)} \right) \sin(nx) dx = \underbrace{b_n}_{\sin^2(nx)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi b_n, \quad n \neq 0$$

Άρα, αν η f είχε ανάπτυγμα με όρους $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ τότε οι συντελεστές θα έπρεπε να είναι

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 1, \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 0.$$

(1) Ενδεικτικά, μία ικανή συνθήκη είναι: $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)| dx < +\infty$



Σειρές Fourier – 1^η έκφραση ($T = 2\pi$)

Έστω η **περιοδική συνάρτηση** f με περίοδο $T = 2\pi$, που ορίζεται στο $(-\pi, \pi)$ και περιοδικά επεκτείνεται σε όλο το $\mathbb{R}$ με τη σχέση $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην συνάρτηση f ορίζεται να είναι η παράσταση:

$$f \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

... ..

όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

... ..

Γράφουμε $f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Σειρές Fourier – 1^η έκφραση ($T = 2L$)

Έστω η **περιοδική συνάρτηση** f με περίοδο $T = 2L$, που ορίζεται στο $(-L, L)$ και επεκτείνεται σε όλο το $\mathbb{R}$ με τη σχέση $f(x + 2L) = f(x)$.

Η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην συνάρτηση f ορίζεται να είναι η παράσταση:

$$f \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

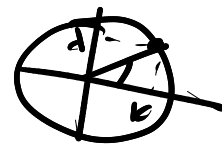
όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$|\kappa|, |\lambda| < 1$$

$$\kappa^2 + \lambda^2 = 1$$

Σειρές Fourier – 2^η έκφραση



$$\text{Είναι } \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2} \left[\overset{\kappa}{\underbrace{\frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}}}}_{\cos(\varphi_n)} \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) - \overset{\lambda}{\underbrace{\frac{-b_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}}}}_{\sin(\varphi_n)} \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \right] \quad (I)$$

Για $n \geq 1$, θεωρούμε τη γωνία φ_n , τέτοια ώστε $\cos(\varphi_n) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}}$ και $\sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}}$.

$$\text{Γράφουμε (I)} = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2} \left[\underbrace{\cos(\varphi_n)}_{\cos(\varphi_n)} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right)} - \underbrace{\sin(\varphi_n)}_{\sin(\varphi_n)} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)} \right] \stackrel{(1)}{=} A_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x + \varphi_n\right),$$

όπου $A_0 = \alpha_0$, $A_n = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{\alpha_n}\right)$, $n \geq 1$.

(1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Σειρές Fourier – 2^η έκφραση

Βρήκαμε ότι, αν f μία $2L$ –περιοδική συνάρτηση τότε

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx + \varphi_n\right)$$

$$\text{όπου } A_0 = \alpha_0, A_n = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{\alpha_n}\right), n \geq 1.$$

Το σύνολο των ζευγών (A_n, φ_n) , $n = 0, 1, \dots$ ονομάζεται **φάσμα** της σειράς Fourier.

Η ακολουθία $(A_n)_{n=0,1,2,\dots}$ είναι το **φάσμα πλάτους (amplitude spectrum)**, ενώ η $(\varphi_n)_{n=0,1,2,\dots}$ είναι το **φάσμα φάσεως (phase spectrum)**.

Σειρές Fourier – 3^η έκφραση

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) &= \frac{\alpha_n}{2} \left(e^{i\pi nx/L} + e^{-i\pi nx/L} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{i\pi nx/L} - e^{-i\pi nx/L} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha_n - ib_n}{2} \right) e^{i\pi nx/L} + \left(\frac{\alpha_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\pi nx/L} \end{aligned}$$

Περαιτέρω:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - ib_n}{2} \right) e^{i\pi nx/L} + \left(\frac{\alpha_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\pi nx/L} \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - ib_n}{2} \right) e^{i\pi nx/L} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\pi nx/L} \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - ib_n}{2} \right) e^{i\pi nx/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha_{-n} + ib_{-n}}{2} \right) e^{i\pi nx/L} \end{aligned}$$

Σειρές Fourier – 3^η έκφραση

Βρήκαμε ότι $f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - ib_n}{2} \right) e^{i\pi nx/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha_{-n} + ib_{-n}}{2} \right) e^{i\pi nx/L}$

Ορίζουμε $c_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $c_n = \frac{\alpha_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{\alpha_n + ib_n}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Αντικαθιστώντας, $\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$

βρίσκουμε: $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\pi nx/L} dx$, $n \in \mathbb{Z}$.

Δηλαδή, τελικά: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi nx/L}$, με $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\pi nx/L} dx$, $n \in \mathbb{Z}$.

Σειρές Fourier – 3^η έκφραση

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \text{ με } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των ζευγών $(|c_n|, \text{Arg}(c_n))$, $n \in \mathbb{Z}$, ονομάζεται **φάσμα** της σειράς.

Η ακολουθία $(|c_n|)_{n \in \mathbb{Z}}$ λέγεται **φάσμα πλάτους (amplitude spectrum)**, ενώ η $(\text{Arg}(c_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ λέγεται **φάσμα φάσεως (phase spectrum)**.

Σημείωση: Φανερά $|c_{-n}| = |c_n|$ και $\text{Arg}(c_{-n}) = -\text{Arg}(c_n)$.

Συνθήκες του Dirichlet

Στη συνέχεια, θα λέμε ότι μία συνάρτηση ικανοποιεί τις **συνθήκες του Dirichlet** όταν είναι:

- α) τμηματικά συνεχής,
- β) έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο,
- γ) έχει πεπερασμένου πλήθους ακρότατα.

Κριτήριο του Dirichlet

Αποδεικνύεται ότι για κάθε $2L$ -περιοδική συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο $(-L, L)$, η σειρά Fourier της f συγκλίνει σε αυτήν σε όλα τα σημεία x στα οποία η f είναι συνεχής.

Δηλαδή, αν η $2L$ -περιοδική συνάρτηση f είναι συνεχής στο x , τότε

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

Περαιτέρω, αποδεικνύεται ότι για κάθε σημείο ασυνέχειας x_0 , είναι:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: <https://people.math.harvard.edu/~knill/teaching/math22b2019/handouts/lecture30.pdf>

...ή εδώ: Chernoff, P. R. (1980). Pointwise Convergence of Fourier Series. The American Mathematical Monthly, 87(5), 399–400.
<https://doi.org/10.2307/2321220>

$$F \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

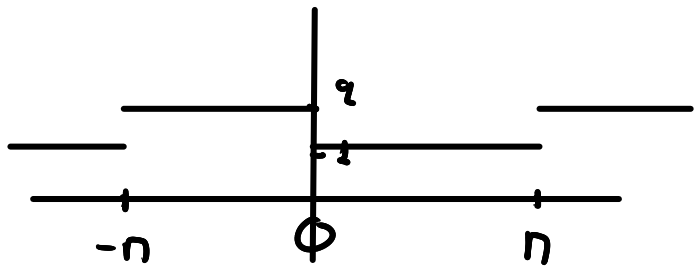
Σειρές Fourier

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

Παράδειγμα

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ και $f(x + 2\pi) = f(x)$, να δείξετε ότι $f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$

Λύση



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 3.$$

$$\begin{aligned} n > 0: \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi n} \cdot \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi n} \cdot (\cancel{\cos 0} - \cos(-n\pi)) - \frac{1}{\pi n} (\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) - \frac{1}{\pi n} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{n^2} (2 - 2(-1)^n + (-1)^n - 1) = -\frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n).$$

$$f \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \cdot \sin(nx) = \frac{3}{2} - 2 \frac{1}{n \cdot 1} \cdot \sin x - 2 \cdot \frac{1}{n \cdot 3} \sin 3x - \dots$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

$$\text{Für } x \in (-n, 0) \cup (0, n) : f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

$$\text{Für } x \in (-n, 0) \quad 0 = \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = -\frac{n}{4}.$$

$$\text{Für } x \in (0, n) \quad 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = \frac{n}{4}.$$

$$\Gamma_{1a} \chi=0 : \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1) \cdot 0]}{2k+1} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = \frac{3}{2} .$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ periodic}$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x$$

Σειρές Fourier

Παράδειγμα

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ και $f(x + 2\pi) = f(x)$, να δείξετε ότι $f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$

Λύση

Η σειρά Fourier της f είναι $f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, όπου:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \pi + \frac{1}{\pi} \pi = 3.$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{x=-\pi}^{x=0} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{x=0}^{x=\pi} = 0, n \neq 1.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} [\cos(nx)]_{x=-\pi}^{x=0} - \frac{1}{\pi n} [\cos(nx)]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] - \frac{1}{\pi n} [\cos(n\pi) - 1] = -\frac{1}{\pi n} + \frac{1}{\pi n} \cos(n\pi) = \frac{1}{\pi n} (-1 + (-1)^n) \end{aligned}$$

Σειρές Fourier

Παράδειγμα

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ και $f(x + 2\pi) = f(x)$, να δείξετε ότι $f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$

Λύση

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} [-1 + (-1)^n] \sin(nx) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \right)$$

$$f \text{ συνεχής στο } (-\pi, 0): 2 = f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} \quad \text{ή} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$f \text{ συνεχής στο } (0, \pi): 1 = f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} \quad \text{ή} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η } f \text{ δεν είναι συνεχής: } \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

Αναπαράσταση: <https://www.geogebra.org/m/fdaYrVCH> για $f(x) = 3 - (\operatorname{sgn}(x) + 3) / 2$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n}{L} \pi x\right) + b_n \sin\left(\frac{n}{L} \pi x\right), \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n}{L} \pi x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n}{L} \pi x\right) dx$$

Σειρές Fourier

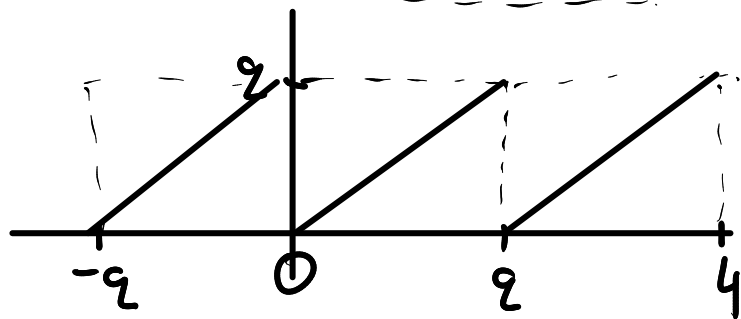
$f: 2L$ -περίοδος.

Άσκηση 1

$$2L = 2 \Rightarrow L = 1.$$

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x$, $0 \leq x < 2$ και $f(x+2) = f(x)$, να βρεθεί η σειρά Fourier της f .

Δίνεται ότι $\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + c$, $\int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + c$



$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 2.$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^2 x \cos(n\pi x) dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi} x \sin(n\pi x) + \frac{1}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \cdot \left[2 \sin(2n\pi) + \frac{1}{n\pi} \cos(2n\pi) - 0 - \frac{1}{n\pi} \right] = 0.$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_0^2 x \cdot \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi x) + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin(n\pi x) \Big|_{x=0}^{x=2} \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \left[2 \cos(\cancel{2}n\pi) + \frac{1}{n\pi} \sin(\cancel{2}n\pi) \right] = -\frac{2}{n\pi}
 \end{aligned}$$

$$\text{Eival } f \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi} \right) \sin(n\pi x)$$

$$\text{Für } x \in (0, 2): 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n} = x$$

$$\text{Für } x=0: 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi 0)}{n} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = 1$$

Σειρές Fourier

$$2L = 10 \Rightarrow L = 5.$$

Άσκηση 2: Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 \leq x < 0 \\ 3, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$ και $f(x+10) = f(x)$, τότε να δείξετε ότι

$$(\alpha) \quad f(x) \sim \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left[\frac{\pi}{5}(2k+1)x\right], \quad (\beta) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Λύση } (\alpha) \quad \alpha_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_0^5 3 dx = 3.$$

$$n \geq 1: \quad \alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos\left(\frac{\pi}{5} nx\right) dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos\left(\frac{\pi}{5} nx\right) dx = \frac{5}{\pi n} \left[\sin\left(\frac{\pi}{5} nx\right) \right]_{x=0}^{x=5} = 0.$$

$$n \geq 0: \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \sin\left(\frac{\pi}{5} nx\right) dx = \frac{3}{\pi n} [1 - (-1)^n]$$

$$\text{Είναι } f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{5} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{5} nx\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin\left(\frac{\pi}{5} nx\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{\pi}{5}(2k+1)x\right) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{\pi x}{5}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5 \frac{\pi x}{5}\right) + \dots \right]$$

Σειρές Fourier

Άσκηση 2: Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 \leq x < 0 \\ 3, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$ και $f(x+10) = f(x)$, τότε να δείξετε ότι

$$(\beta) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(a) f(x) \sim \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left[\frac{\pi}{5}(2k+1)x\right]$$

Για $x \in (-5, 0) \cup (0, 5)$: $f(x) =$ σειρά Fourier.

$$\text{Για } x = \frac{5}{\pi} \in (0, 5) : 3 = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Σειρές Fourier

Άσκηση 3

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ και $f(x+4) = f(x)$,

(α) να βρεθεί η σειρά Fourier της f . (β) Να δείξετε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Δίνεται ότι $\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + c$, $\int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + c$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, ονομάζεται **περιττή** αν

α) αν $x \in A$, τότε $-x \in A$

β) $f(-x) = -f(x)$.

π.χ. οι $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5 - 3x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \tan(3x)$ είναι περιττές συναρτήσεις.

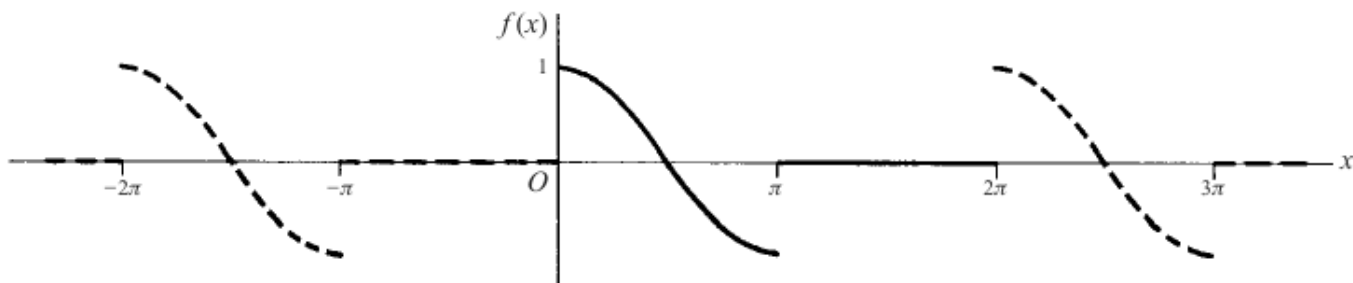
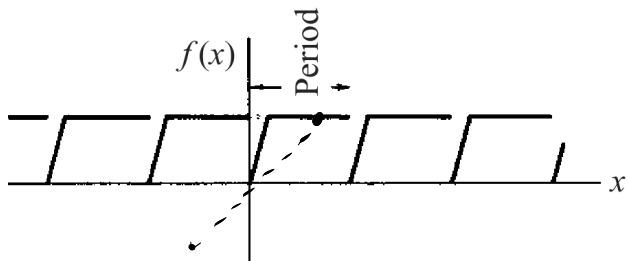
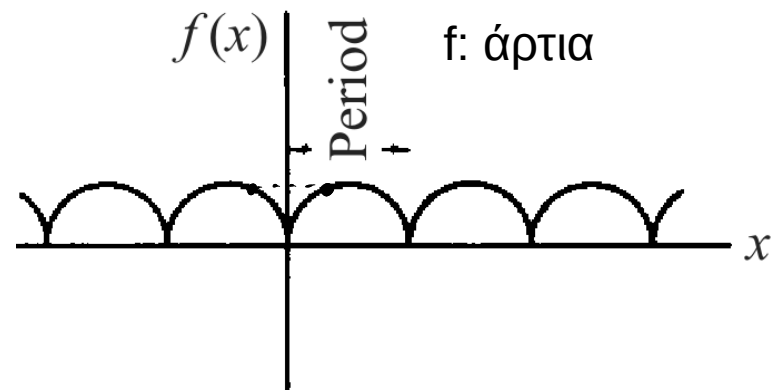
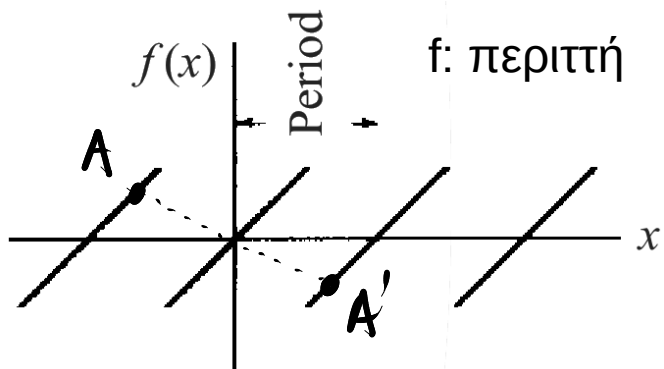
Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, ονομάζεται **άρτια** αν

α) αν $x \in A$, τότε $-x \in A$

β) $f(-x) = f(x)$.

π.χ. οι $f(x) = x^4$, $f(x) = x^2 - 3x^6$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x + e^{-x}$ είναι άρτιες συναρτήσεις.

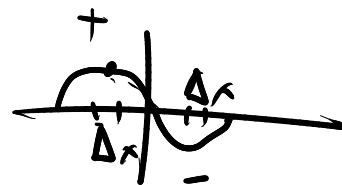
Άρτιες και περιττές συναρτήσεις



f : περιοδική αλλά ούτε άρτια ούτε περιττή

$$\int f(x) dx = \sum f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις



- Αν f περιττή, τότε $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$. π.χ. $\int_{-L}^L \sin(\alpha x) dx = 0$.
- Αν f άρτια, τότε $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$. π.χ. $\int_{-L}^L \cos(\alpha x) dx = 2 \int_0^L \cos(\alpha x) dx$.
- Αν f περιττή, και g άρτια, τότε $f \cdot g$ περιττή και $\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = 0$.
π.χ. f : περιττή $\Rightarrow \int_{-L}^L f(x) \cos(\alpha x) dx = 0$.
- Αν f άρτια, και g άρτια, τότε $f \cdot g$ άρτια και $\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = 2 \int_0^L f(x)g(x) dx$.
π.χ. f : άρτια $\Rightarrow \int_{-L}^L f(x) \cos(\alpha x) dx = 2 \int_0^L f(x) \cos(\alpha x) dx$.

οξρ. αρτ.

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Αν f **περιττή** συνάρτηση, τότε $\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Δηλαδή:

f : περιττή $\rightarrow$ Σειρά Fourier $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$ με $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Αντίστοιχα, αν f **άρτια** συνάρτηση, τότε $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Δηλαδή:

f : άρτια $\rightarrow$ Σειρά Fourier: $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$ με $\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Αν f **περιττή** συνάρτηση, τότε στα σημεία συνέχειας της f :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

$$2L = 2n \Rightarrow L = n$$

Αν f **άρτια** συνάρτηση, τότε στα σημεία συνέχειας της f :

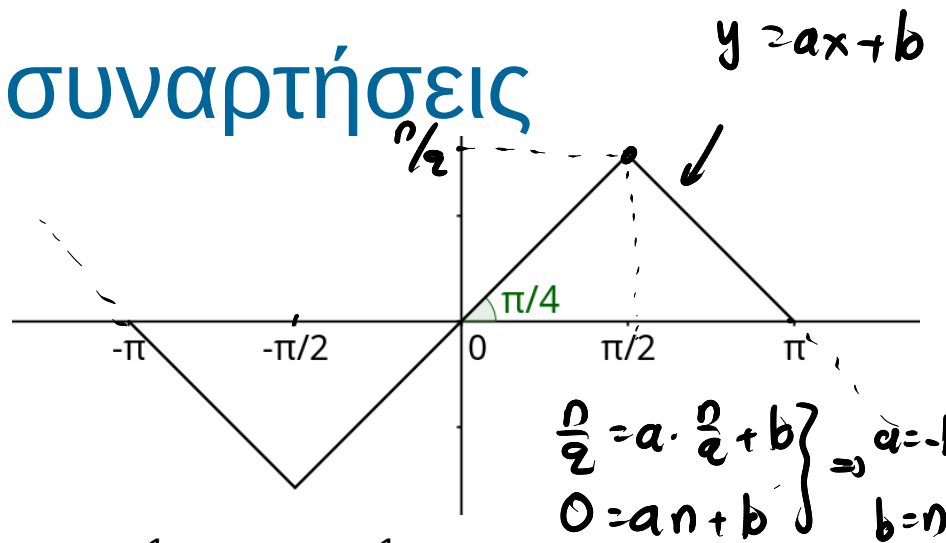
$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι για την 2π -περιοδική περιττή συνάρτηση

του σχήματος είναι
$$f(x) = 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx)$$



Δίνεται ότι $\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + c$, $\int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + c$

f : περιττή $\Rightarrow f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Για $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $f(x) = \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot x = x$ | $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx$

$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$: $f(x) = -x + \pi$

Bonus ερώτημα: Δείξτε ότι: $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1 - (-1)^n}{2i^{n-1}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} x \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (n-x) \sin(nx) dx &= \pi \cdot \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right] - \left[-\frac{1}{n^2} \sin(nx) \right] \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^x = \\ &= -\frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{1}{n} (-1)^n + \frac{\pi}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

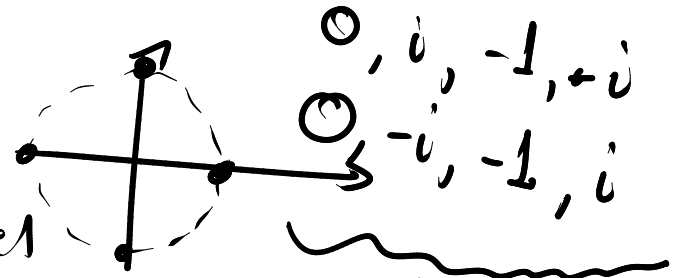
$$b_n = \frac{2}{n} \left[\frac{1-n}{n} (-1)^n + \frac{n-2}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] (j)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right] \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{n} \left[-\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n} \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \frac{4}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{4}{n \cdot n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n \cdot n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1 - (-1)^n}{2i^{n-1}}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{2}} - e^{-i\frac{n\pi}{2}}}{2i} \rightarrow \begin{cases} (-1)^k, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases}$$



$n=2k$

$$A_{p,q} : 2i \cdot (-1)^k$$

Εvaluation:

$$\sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) = \frac{e^{i \frac{n \pi}{2}} - e^{-i \frac{n \pi}{2}}}{2i} = \frac{e^{i n \pi} - 1}{2i \cdot e^{i \frac{n \pi}{2}}} = \frac{(-1)^n - 1}{2i^{n+1}} = \frac{1 - (-1)^n}{2i^{n-1}}.$$

$$i = e^{i \frac{\pi}{2}}$$

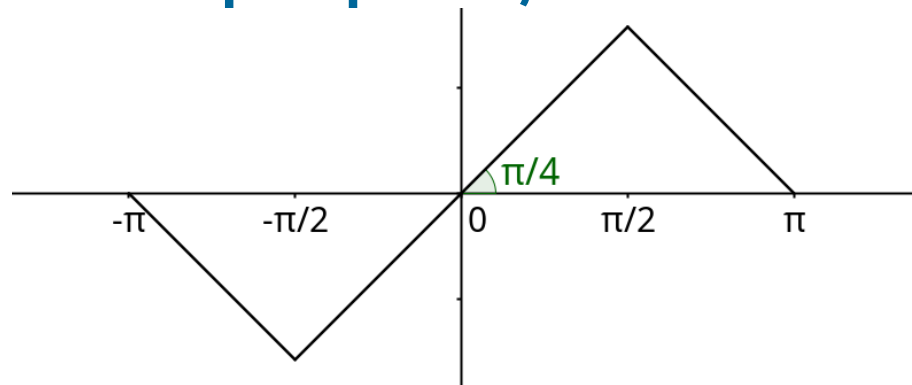
$$e^{i \frac{n \pi}{2}} = \left(e^{i \frac{\pi}{2}}\right)^n = i^n$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι για την 2π -περιοδική περιττή συνάρτηση

του σχήματος είναι $f(x) = 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx)$



Δίνεται ότι $\int x \cos(nx) dx = \frac{1}{n} x \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) + c$, $\int x \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} x \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) + c$

Λύση

Η f είναι 2π -περιοδική συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι συνθήκες του Dirichlet.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα για $x \in \mathbb{R}$, θα είναι: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$, με $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$, $n \geq 1$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Συμπεραίνουμε, ότι $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx)$

Bonus ερώτημα: Δείξτε ότι: $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1 - (-1)^n}{2i^{n-1}}$

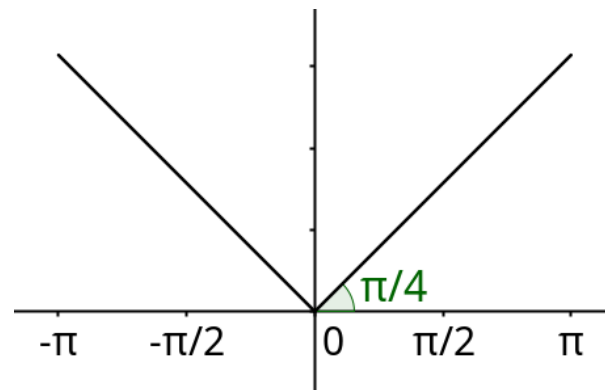
Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Άσκηση 5

Να δείξετε ότι για την 2π -περιοδική συνάρτηση

του σχήματος είναι



$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} (-1)^n - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Άσκηση 6

Έστω η 2π -περιοδική συνάρτηση f , με $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$.

(α) Να βρεθεί η σειρά Fourier της f .

(β) Να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Δίνεται ότι: $\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x^2 \sin(ax) + \frac{2}{a^2} x \cos(ax) - \frac{2}{a^3} \sin(ax) + c$

$$\int x^2 \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x^2 \cos(ax) + \frac{2}{a^2} x \sin(ax) + \frac{2}{a^3} \cos(ax) + c$$

Ταυτότητα του Parseval

Θεώρημα (ταυτότητα του Parseval)

Έστω ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet στο $(-L, L)$ και

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

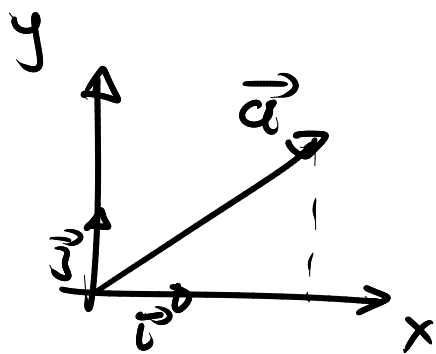
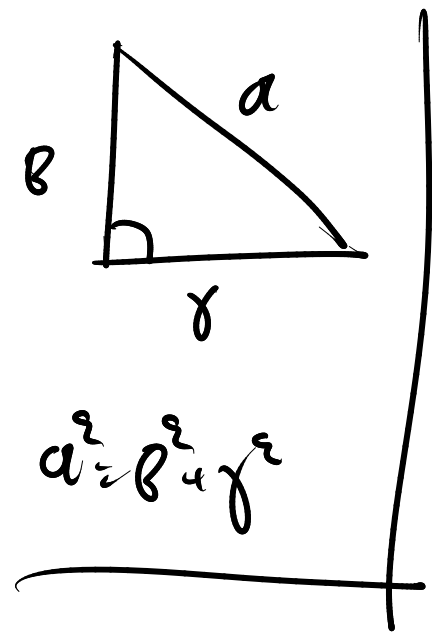
Τότε,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^2 + b_n^2)$$

Απόδειξη: Αντικατάσταση, επιμεριστική ιδιότητα και εφαρμογή της εισαγωγικής άσκησης 1.

Σημείωση: Αν θεωρήσουμε το χώρο $L^2[-\pi, \pi]$ με βάση $\left[\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \right]$, τότε η συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διάνυσμα στο χώρο αυτό.

Οι συντελεστές Fourier είναι οι προβολές της f σε κάθε ένα από τα διανύσματα της βάσης και η ταυτότητα του Parseval είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα.



$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\vec{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \vec{b}_n$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$$

$$a_1 = (\vec{a}, \vec{i})$$

$$a_2 = (\vec{a}, \vec{j})$$

$$a_n = (\vec{a}, \vec{b}_n)$$

Η ταυτότητα του Parseval ως μορφή του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο, γράφεται $\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$, όπου $\vec{e}_1 = (1, 0)$ και $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Επιπλέον, αν $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos(\vec{v}, \vec{u})$, τότε $\alpha_1 = \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle$, $\alpha_2 = \langle \vec{v}, \vec{e}_2 \rangle$

και $|\vec{v}|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.

Στο παραπάνω πλαίσιο, τα α_1, α_2 είναι οι προβολές του $\vec{v}$ στα διανύσματα βάσης.

Γενίκευση 1: Γενικότερα, αν $\langle f, g \rangle$ ένα εσωτερικό γινόμενο και $[e_n]_{n \in \mathbb{N}}$, ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων ($\langle e_n, e_m \rangle = 0$, $n \neq m$ και $\langle e_n, e_n \rangle = 1$) τότε για κάθε $f = \sum \alpha_n e_n$, μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha_n = \langle f, e_n \rangle \text{ και } \langle f, f \rangle = \sum \alpha_n^2.$$

Σημείωση: Με προϋποθέσεις σχετικά με τη σύγκλιση του αθροίσματος αν αυτό είναι άπειρο..

Οι συντελεστές α_n είναι οι “προβολές” της f σε κάθε ένα από τα διανύσματα της βάσης $[e_n]_{n \in \mathbb{N}}$, και η ταυτότητα $\langle f, f \rangle = \sum \alpha_n^2$ είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Η ταυτότητα του Parseval ως μορφή του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Γενίκευση 2: Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx$.

Αν $\zeta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\zeta_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$, $n \geq 1$, $e_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε το

σύστημα $[\zeta_n, e_n]_{n \geq 0}$, αποτελείται από ορθογώνια και μοναδιαία στοιχεία ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Κάτω από αυτήν τη θεώρηση, μπορούμε να δούμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \zeta_n \rangle \zeta_n + \langle f, e_n \rangle e_n$$

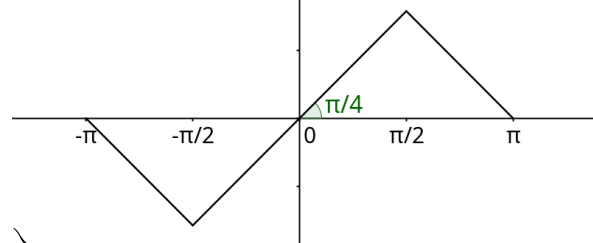
$$\text{όπου } \langle f, \zeta_0 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}, \quad \langle f, \zeta_n \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx = \alpha_n, \quad n \geq 1,$$

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx = b_n, \quad n \geq 0.$$

$$\text{Συμπεραίνουμε, } \langle f, f \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \zeta_n \rangle^2 + \langle f, e_n \rangle^2 \Leftrightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^2 + b_n^2)$$

και η ταυτότητα του Parseval αναγνωρίζεται ως μία εκδοχή του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Ταυτότητα του Parseval



Άσκηση 7

Για τη 2π -περιοδική συνάρτηση του σχήματος είναι $f(x) = 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Από Θ. Parseval: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x^2 dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{(\pi-x)^3}{3} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24} \right] = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{as } n=2k \\ \rightarrow (-1)^k & \text{as } n=2k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$$

Ταυτότητα του Parseval

Άσκηση 8

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$ και $f(x + 4) = f(x)$. (α) να βρεθεί η σειρά Fourier της f .

(β) Να γραφεί η ταυτότητα του Parseval (γ) Ναδειχθεί ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Δίνεται ότι $\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + c$, $\int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + c$