

Μιγαδικές Συναρτήσεις

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy



Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

Θεώρημα

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ένα απλά συναφές ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Αν η f είναι αναλυτική στο U , τότε για οποιοδήποτε **απλό κλειστό** μονοπάτι γ σε αυτό, είναι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Σημείωση: Κλειστό μονοπάτι σημαίνει ότι για οποιαδήποτε παραμετροποίηση του της μορφής $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, είναι $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$.

Πόρισμα

Έστω U απλά συναφές χωρίο και $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, αναλυτική συνάρτηση. Τότε, για κάθε $z_1, z_2 \in U$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz,$$

είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης, δηλαδή έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το μονοπάτι που θα επιλεγθεί για να διατρέξει τη διαδρομή από το σημείο z_1 στο σημείο z_2 .

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy



Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Θεώρημα

Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ και έστω ότι $D \subseteq U$, όπου $D = \{z: |z - z_0| \leq r\}$. Έστω $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση και έστω γ το μονοπάτι ∂D , θετικά προσανατολισμένο. Τότε, για κάθε $a \in D^\circ = \{z: |z - z_0| < r\}$ ισχύει:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Πόρισμα

Με τις ίδιες προϋποθέσεις του ολοκληρωτικού τύπου, αποδεικνύεται επιπλέον, ότι **υπάρχουν οι παράγωγοι n – τάξης** και ισχύει:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

Σημείωση: Η απόδειξη για το **Θεώρημα** είναι διαθέσιμη εδώ και για το **Πόρισμα** εδώ.

Ανάλυση σε απλά κλάσματα 1/2

$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$
$(ax + b)^k$	$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}, k = 1, 2, 3, \dots$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$
$(ax^2 + bx + c)^k$	$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}, k = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$$

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

$$3x + 11 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα 2/2

$$\frac{x^2 + 4}{x(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-2}$$

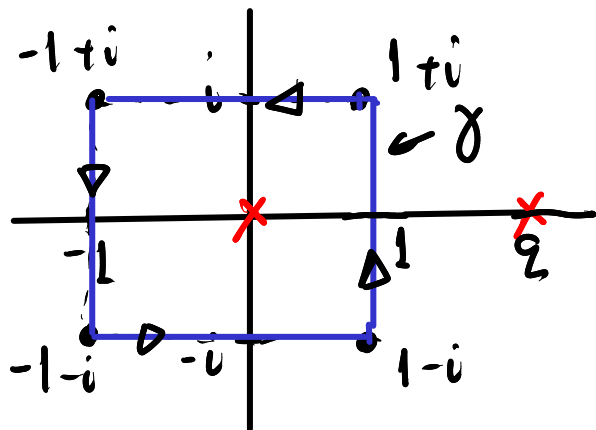
$$\frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

Αν γ είναι η ~~περίμετρος~~^{το} τετραγώνου με κορυφές $\pm 1 \pm i$, που διαγράφεται μία φορά κατά την θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 2z} dz$.

Λύση



$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 2z} dz$$

$$\frac{\cos z}{z^2 - 2z} = \frac{\cos z}{z \cdot (z - 2)} = \frac{\cos z}{z - 2}$$

$$f(z) = \frac{\cos z}{z - 2}$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - 0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Σημείωση: Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι το Θεώρημα και ο Ολοκληρωτικός Τύπος Cauchy ισχύει και για τετραγωνικά χωρία.

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: <http://mathonline.wikidot.com/cauchy-s-integral-theorem-for-rectangles>

ή εδώ: https://www.math.utah.edu/~yplee/teaching/4200f18/Cauchy_Theorem.pdf

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

Αν γ είναι η περίμετρος τετραγώνου με κορυφές $\pm 1 \pm i$, που διαγράφεται μία φορά κατά την θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{z^3 + 1}{2z^2 + 9z - 5} dz$.

Λύση

$$2z^2 + 9z - 5 = 0 \quad \left| \quad \int_{\gamma} \frac{z^3 + 1}{2z^2 + 9z - 5} dz = \int_{\gamma} \frac{z^3 + 1}{2(z - \frac{1}{2})(z + 5)} dz \right.$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 81 + 40 = 121$$

$$z_{1,2} = \frac{-9 \pm 11}{4} < \frac{1}{2}$$

$$-5$$

$$= \int_{\gamma} \frac{\frac{z^3 + 1}{2(z + 5)}}{z - \frac{1}{2}} dz =$$

$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{2(z + 5)} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{9}{8}}{11} = \frac{9}{88}$$

$$= 2\pi i \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \cdot \frac{9}{88} = \frac{9\pi i}{44} \quad \text{άλυτη}$$

Ανάπτυγμα αναλυτικής συνάρτησης σε δυναμοσειρά



Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Γνωρίζουμε ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει παραγώγους κάθε τάξης. Άμεση συνέπεια είναι να υπάρχει το ανάπτυγμά της σε σειρά Taylor.

Θεώρημα

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $D(z_0, r)$, τότε η f έχει αναπαράσταση της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r, \quad \alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η αναπαράσταση αυτή της f καλείται **σειρά Taylor της f με κέντρο το z_0 και ακτίνα r** .

Η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι η ακτίνα του μέγιστου δίσκου όπου η f εξακολουθεί να είναι παραγωγίσιμη.

Σημειώσεις

1. Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://en.wikipedia.org/wiki/Analyticity_of_holomorphic_functions
2. Όπως και στην πραγματική ανάλυση, το ανάπτυγμα με κέντρο $z_0 = 0$ συνήθως ονομάζεται ανάπτυγμα Mac – Laurent.
3. Η σύγκλιση στο σύνορο του δίσκου δεν είναι τυποποιημένη.
4. Μία γεωμετρική αναπαράσταση είναι διαθέσιμη εδώ: https://complex-analysis.com/content/taylor_series.html

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Οι συντελεστές ενός αναπτύγματος Taylor είναι μοναδικοί.

Θεώρημα

Αν υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $|z - z_0| < r$, τότε

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Δηλαδή, αν καταφέρουμε να αναπτύξουμε μία συνάρτηση στη μορφή $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, τότε αυτό δεν μπορεί παρά να είναι το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το z_0 .

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 της $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$.

Λύση

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 της $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$.

Λύση

Η f ορίζεται και είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{-i, i\}$. Επιλέγουμε τον ανοικτό δίσκο $D(0, 1)$ ως το μεγαλύτερο δίσκο με κέντρο 0 που βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της. Για $z \in D(0, 1)$ είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2 + 1} &= \frac{1}{(z - i)(z + i)} = -\frac{i}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{i}{2} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{i}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{i}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}.\end{aligned}$$

Καθώς, οι συντελεστές Taylor είναι μοναδικοί, η παραπάνω σειρά είναι υποχρεωτικά η σειρά Taylor της f .

Σημείωση

Φανερά, η παραπάνω επιλογή είναι προτιμότερη από τη χρήση του ορισμού της δυναμοσειράς και τον άμεσο υπολογισμό των $f^{(n)}(0)$.

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-3z}$.

(α) Δείξτε ότι η f έχει ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 και βρείτε την ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος.

(β) Να αποδείξετε ότι για $z \neq 1/3$, $f^{(n)}(z) = \frac{3^n n!}{(1-3z)^{n+1}}$.

(γ) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το 0.

Λύση (α)

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$	$ z < 1$
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$	$\mathbb{C}$
$\sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$	$\mathbb{C}$
$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$	$\mathbb{C}$
$\log(1+z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$	$ z < 1$

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Παρατήρηση

Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy, προσφέρει ακόμα μία δυνατότητα έκφρασης των συντελεστών μίας σειράς Taylor.

Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $D(z_0, r) \subset A$, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r,$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

και $C: \gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Κάθε δυναμοσειρά ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση.

Δηλαδή, μπορούμε να παραγωγίσουμε όρο προς όρο μια δυναμοσειρά.

Θεώρημα

Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $|z - z_0| < r$, τότε η f είναι αναλυτική για κάθε $z \in D(z_0, r)$ και

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < r,$$

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-3z)^2}$

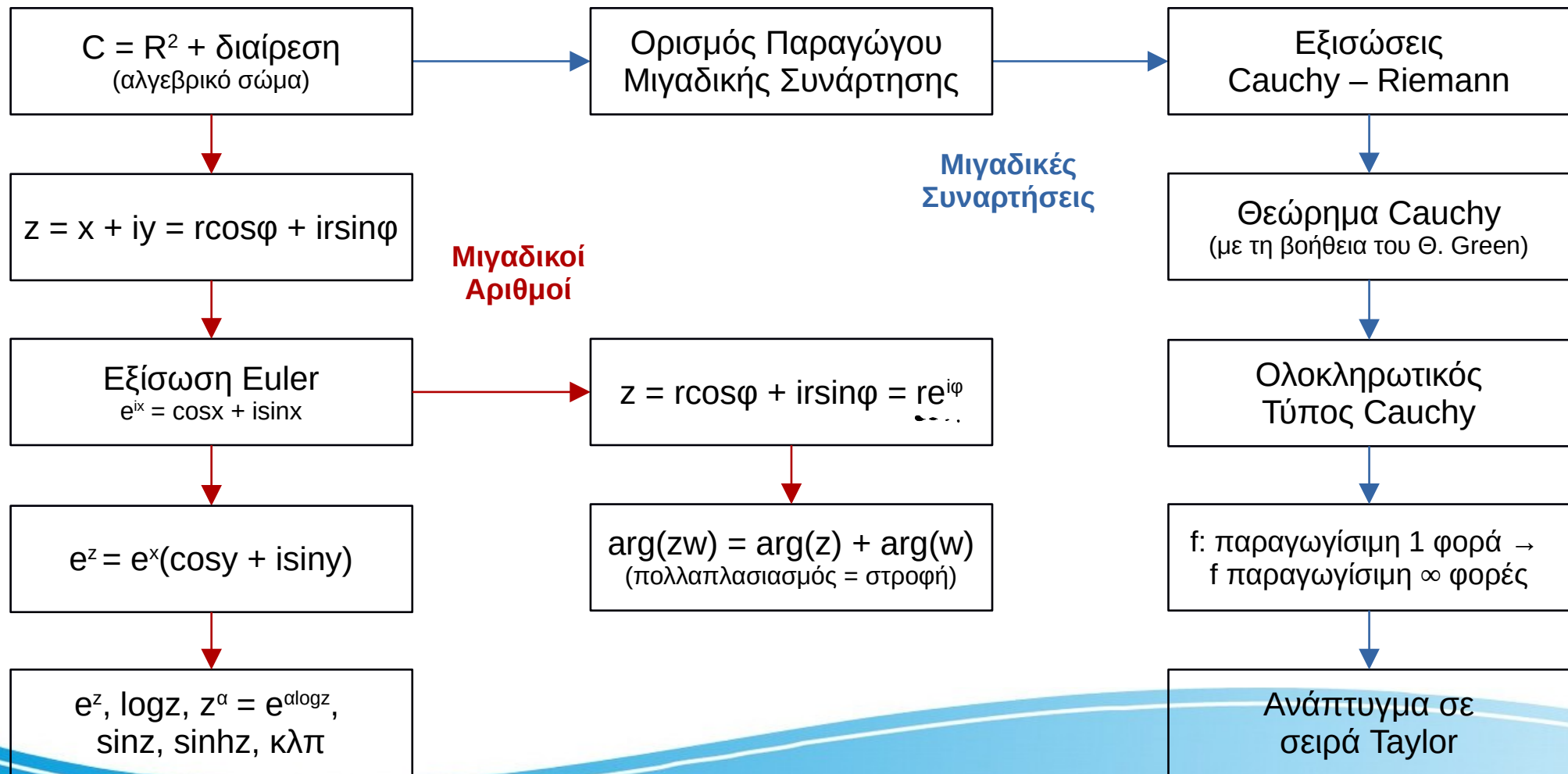
Λύση

Από προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι: $\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n, |z| < \frac{1}{3}.$

Συμπεραίνουμε, ότι, για $|z| < 1/3$, είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n 3^n z^{n-1} = \left(\frac{1}{1-3z} \right)' = \frac{3}{(1-3z)^2}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{(1-3z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n 3^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) 3^n z^n$$



Σύνοψη εννοιών και αποτελεσμάτων
(μέχρι αυτήν τη στιγμή)

Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Ορισμός

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **μεμονωμένη ανωμαλία** στο σημείο z_0 , αν

- (i) Η f δεν ορίζεται στο z_0 , και
- (ii) Υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι αναλυτική στο $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$.

Παραδείγματα

- Το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της $1/z$.
- Το i και το $-i$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της $1 / (z^2 + 1)$.
- Τα σημεία $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της $1 / \sin z$.
- Το 0 δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία της $\text{Log } z$ γιατί δεν υπάρχει περιοχή της μορφής $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$, για κάποιο $r > 0$, στην οποία η $\text{Log } z$ να είναι αναλυτική.

Μη Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Μία μιγαδική συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μη μεμονωμένες ανωμαλίες.

Παράδειγμα 1 (ανωμαλία ως σημείο συσσώρευσης – cluster point)

Η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \tan(1/z)$ έχει ανωμαλία στο 0 αλλά και σε κάθε άλλο σημείο της ακολουθίας $\alpha_n = (\pi/2 + n\pi)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε σημείο της ακολουθίας α_n είναι μεμονωμένο, ωστόσο το 0 δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία γιατί $\alpha_n \rightarrow 0$, συνεπώς σε οποιονδήποτε δίσκο της μορφής $0 < |z - z_0| < r$, υπάρχει τουλάχιστον ένα ακόμα σημείο στο οποίο η f δεν ορίζεται.

Παράδειγμα 2 (ανωμαλία ως φυσικό σύνορο – natural boundary)

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ συγκλίνει για κάθε $|z| < 1$, και ορίζει εκεί μία αναλυτική συνάρτηση $f(z)$. Ωστόσο, αυτή αποκλίνει σε κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου, καθώς:

α) για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, αυτή αποκλίνει στις 2^n - ρίζες της μονάδας.

β) Το σύνολο $\{2^n \text{ - ρίζες της μονάδας, } n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο μοναδιαίο κύκλο.

Σχετικοί σύνδεσμοι:

<https://math.stackexchange.com/questions/184666/help-proving-the-primitive-roots-of-unity-are-dense-in-the-unit-circle>

https://en.wikipedia.org/wiki/Lacunary_function

<https://math.stackexchange.com/questions/1716255/fz-sum-n-geq-0-z2n-all-z-such-that-z-1-are-singular>

Μη Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Μία μιγαδική συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μη μεμονωμένες ανωμαλίες.

Παράδειγμα 1 (ανωμαλία ως σημείο συσσώρευσης – cluster point)

Η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \tan(1/z)$ έχει ανωμαλία στο 0 αλλά και σε κάθε άλλο σημείο της ακολουθίας $\alpha_n = (\pi/2 + n\pi)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε σημείο της ακολουθίας α_n είναι μεμονωμένο, ωστόσο το 0 δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία γιατί $\alpha_n \rightarrow 0$, συνεπώς σε οποιονδήποτε δίσκο της μορφής $0 < |z - z_0| < r$, υπάρχει τουλάχιστον ένα ακόμα σημείο στο οποίο η f δεν ορίζεται.

Παράδειγμα 2 (ανωμαλία ως φυσικό σύνορο – natural boundary)

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ συγκλίνει για κάθε $|z| < 1$, και ορίζει εκεί μία αναλυτική συνάρτηση $f(z)$. Ωστόσο, αυτή αποκλίνει σε κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου, καθώς:

α) για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, αυτή αποκλίνει στις 2^n - ρίζες της μονάδας.

β) Το σύνολο $\{2^n \text{ - ρίζες της μονάδας, } n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο μοναδιαίο κύκλο.

Σχετικοί σύνδεσμοι:

<https://math.stackexchange.com/questions/184666/help-proving-the-primitive-roots-of-unity-are-dense-in-the-unit-circle>

https://en.wikipedia.org/wiki/Lacunary_function

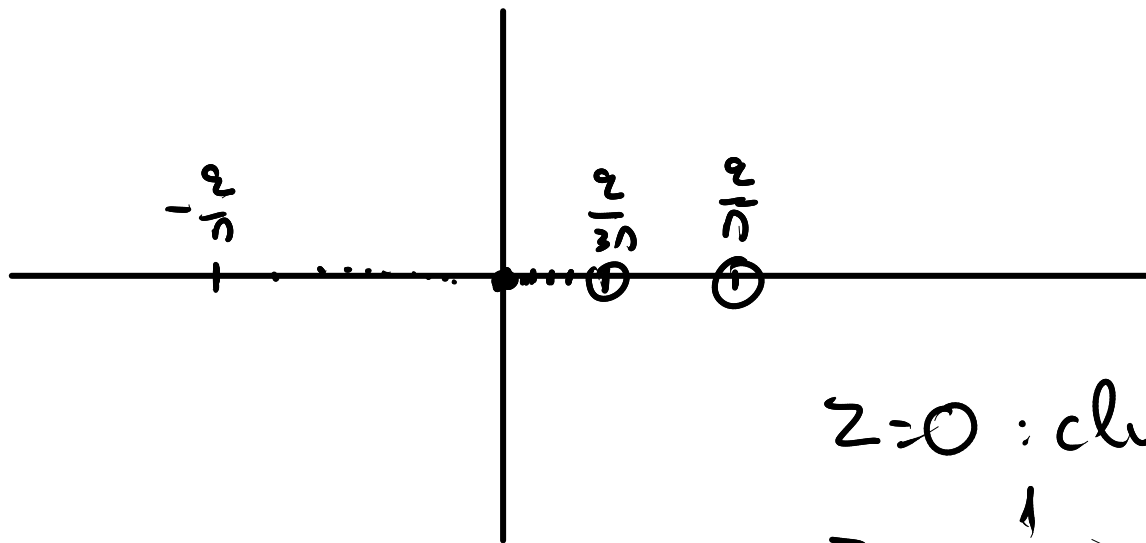
<https://math.stackexchange.com/questions/1716255/fz-sum-n-geq-0-z2n-all-z-such-that-z-1-are-singular>

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right| < \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n < \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}, \quad |z| < 1.$$

$\downarrow$

$$|z| + |z|^2 + |z|^4 + |z|^8 \dots \qquad 1 + |z| + |z|^2 \dots$$

$\tan \frac{1}{z}$, δεν ορίζεται όταν $\frac{1}{z} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $z = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$
 $k \in \mathbb{Z}$.



$z=0$: cluster point

$z = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$: μεμονωμένα, $k \in \mathbb{Z}$.

Ανάπτυγμα Laurent

Για **συναρτήσεις με μεμονωμένες ανωμαλίες**, ισχύει το εξής θεώρημα αναπαράστασης της τιμής της συνάρτησης σε ένα σημείο $z \neq z_0$, με όρους της μορφής $\lambda(z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Θεώρημα

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, αναλυτική συνάρτηση με μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο $z_0 \in A$. Για κάθε δακτύλιο $U = \{z \in \mathbb{C}: 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \leq +\infty\} \subseteq A$, ισχύει:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{\alpha_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \dots$$

όπου $\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, $n \in \mathbb{Z}$ και $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $R_1 < r < R_2$.

Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται **ανάπτυγμα Laurent με κέντρο z_0 της f** .

Σημείωση

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://wiki.seg.org/wiki/Laurent%27s_theorem



Ανάπτυγμα Laurent

Παρατηρήσεις

1. Το άθροισμα $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$, ονομάζεται **κύριο μέρος** του αναπτύγματος Laurent.

2. Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$, στη συνέχεια θα ονομάζεται **σειρά Laurent**.

3. Μοναδικότητα συντελεστών αναπτύγματος

Όπως και στην περίπτωση των σειρών Taylor, αν η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$, συγκλίνει σε μία

συνάρτηση f , τότε θα είναι $b_n = a_n$, όπου $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. Το ανάπτυγμα Laurent στο z_0 στην περίπτωση μίας αναλυτικής στο z_0 συνάρτησης ταυτίζεται με το ανάπτυγμα Taylor.

Ανάπτυγμα Laurent

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(z) = e^{1/z}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το 0.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \dots \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \xRightarrow{z \neq 0} e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n} =$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots =$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$(-k)! = \Gamma(1-k)$$

$\frac{1}{n!}$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n}$$

$$\underline{\underline{n = -k}}$$

$$\sum_{-k=0}^{\infty}$$

$$\frac{1}{\Gamma(-k+1) \cdot z^{-k}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^0 \frac{z^k}{\Gamma(1-k)}$$

$$= \dots + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 1$$

$\swarrow \quad \downarrow \quad \nwarrow$
 $a_3 = \frac{1}{6} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_0$

Ανάπτυγμα Laurent

Λύση παραδείγματος 1

Για να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = e^{1/z}$ γύρω από το 0, θα εκμεταλλευτούμε το ανάπτυγμα Taylor της e^z γύρω από το ίδιο σημείο. Για $r > 0$ και για κάθε $z \in D(0, r)$ (ισοδύναμα $|z| < r$) είναι

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Θέτοντας, όπου z το $1/z$ παίρνουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $|1/z| < r$ ή $|z| > 1/r$ θα είναι

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

Το r μπορεί να γίνει απροσδιόριστα μεγάλο, άρα η αναπαράσταση αυτή ισχύει για κάθε z με $|z| > 0$.

Καθώς η παραπάνω σειρά συγκλίνει στο $e^{1/z}$, από τη μοναδικότητα των συντελεστών Laurent έχουμε ότι η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα Laurent της $e^{1/z}$.

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent γύρω από το 0 έχει άπειρους όρους.

Ανάπτυγμα Laurent

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(z) = \sin z / z$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το 0.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Ανάπτυγμα Laurent

Λύση παραδείγματος 2

Για να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = \sin z / z$ γύρω από το 0, θα εκμεταλλευτούμε το ανάπτυγμα Taylor της $\sin z$ γύρω από το ίδιο σημείο. Για $r > 0$ και για κάθε $z \in D(0, r)$ (ισοδύναμα $|z| < r$) είναι

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Διαιρώντας με το z , παίρνουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $0 < |z| < r$, θα είναι

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Καθώς η παραπάνω σειρά συγκλίνει στο $\sin z / z$, από τη μοναδικότητα των συντελεστών Laurent έχουμε ότι η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα Laurent της $\sin z / z$.

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent γύρω από το 0 δεν έχει όρους.

Ανάπτυγμα Laurent

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στα 0 και 1.

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f :

(α) γύρω από το 0.

(β) γύρω από το 1.

$$(a) f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n, |z| < 1 \end{aligned}$$

$$(b) f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

$$\begin{aligned} (b) \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{-1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(1-z)} = \\ &= -\frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^n$$

$$\frac{1}{z \cdot (z-1)} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Ανάπτυγμα Laurent

Λύση του παραδείγματος 3

Για να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent γύρω από κάθε σημείο, θα σπάσουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων και θα εκμεταλλευτούμε τη γεωμετρική σειρά προσπαθώντας να δημιουργήσουμε αθροίσματα συμβατά με τη μορφή των σειρών Laurent.

Ανάπτυγμα Laurent γύρω από το 0:
$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad 0 < |z| < 1.$$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent γύρω από το 0 έχει έναν όρο.

Ανάπτυγμα Laurent γύρω από το 1:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent γύρω από το 1 έχει έναν όρο.

Κατάταξη των ανωμαλιών

Έστω, ότι η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0 . Για το κύριο μέρος του αναπτύγματος $\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n (z - z_0)^n$, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις.

1. Δεν έχει κανέναν όρο (δηλαδή $\alpha_n = 0, n = -1, -2, \dots$). Στην περίπτωση αυτή το z_0 ονομάζεται **επουσιώδης ή απαλείψιμη ανωμαλία**.
2. Έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων. Στην περίπτωση αυτή το z_0 ονομάζεται **πόλος τάξης m** , όπου m το πλήθος των μη μηδενικών όρων.
3. Έχει άπειρους μη μηδενικούς όρους. Στην περίπτωση αυτή το z_0 ονομάζεται **ουσιώδης ανωμαλία**.

Οι συναρτήσεις με ουσιώδη ανωμαλία, σε οποιαδήποτε περιοχή γύρω από την ανωμαλία, λαμβάνουν όλες τις πιθανές μιγαδικές τιμές (με το πολύ μία εξαίρεση) και άπειρες φορές την καθεμία (Great Picard's Theorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Picard_theorem).

$$\frac{\sin z}{z}$$

$$\frac{1}{z \cdot (z-1)}$$

$$e^{\frac{1}{z}}$$

Κατάταξη των ανωμαλιών

Παραδείγματα

1. Είναι $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$

άρα η $f(z) = \sin z / z$ έχει **επουσιώδης (απαλείψιμη) ανωμαλία** στο 0.

2. Είναι $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad 0 < |z| < 1,$

άρα η $f(z) = 1 / [z(z-1)]$ έχει **πόλο 1ης τάξης** στο 0 (αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι έχει πόλο 1ης τάξης και στο 1).

3. Είναι $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots,$ άρα η $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ έχει **ουσιώδης ανωμαλία στο 0.**

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Υπάρχει η δυνατότητα αναγνώρισης μίας ανωμαλίας με τον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Θεώρημα

Έστω f μία συνάρτηση αναλυτική για z τέτοια ώστε $0 < |z - z_0| < r$. Τότε

z_0 : μεμονωμένη ανωμαλία.

1. Το z_0 είναι **επουσιώδης (απαλείψιμη) ανωμαλία** για την f , αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
2. Το z_0 είναι **πόλος** για την f , αν και μόνο αν $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη του πόλου είναι το ελάχιστο m για το οποίο $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$ και πεπερασμένο.
3. Το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία** για την f , αν και μόνο αν το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Άσκηση 1

Αναγνωρίστε το είδος των ανωμαλιών για τις συναρτήσεις $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^2}$, $g(z) = \frac{\sin z}{z^3}$, $h(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^2} \quad , \quad z=0 : \text{φευκνόμενο ανωμαλία.}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z^2)}{z^2} \stackrel{z^2=w}{=} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sin(w)}{w} = L : \text{υπάρχει, άρα } z=0 \text{ αναλείψιμη.}$$

$$g(z) = \frac{\sin z}{z^3} \quad , \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin z}{z}}{z^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \infty.$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^2} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

$z=0$
πόλος

z^2 τάξη.

$$h(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad \lim_{z_k \rightarrow 0} \sin \frac{1}{z_k} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{z_\lambda \rightarrow 0} \sin \frac{1}{z_\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{z_k} = 2kn + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow z_k = \frac{1}{2kn + \frac{\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{1}{z_\lambda} = 2\lambda n + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow z_\lambda = \frac{1}{2\lambda n + \frac{\pi}{6}}, \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

$\lim_{z \rightarrow 0} \sin \frac{1}{z}$: Δεν υπάρχει $\Rightarrow z=0$ ουσιαστικά ανωμαλία.

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Άσκηση 2

Αναγνωρίστε το είδος των ανωμαλιών για τις συναρτήσεις $\omega(z) = \frac{e^z - 1}{z}$, $p(z) = \frac{e^z - 1}{(z-1)^2}$, $q(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$.

$$p(z) = \frac{e^z - 1}{(z-1)^2}, \quad z=1 : \text{μεμονωμένο}.$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} p(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z - 1}{(z-1)^2} = \infty \Rightarrow z=1 : \text{πόλος}.$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)p(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z - 1}{z-1} = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 p(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (e^z - 1) = e - 1 \neq 0, \infty \Rightarrow z=1 : \text{πόλος 2ης τάξης}$$

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Άσκηση 3

Αναγνωρίστε το είδος των ανωμαλιών για τη συνάρτηση $s(z) = \frac{e^z - 1}{(z-2)(z-1)^2 z^2}$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα



Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Έστω, ότι η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και για $0 < |z - z_0| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{\alpha_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_0) + \alpha_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0 . Γνωρίζουμε ότι $\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, όπου γ ο κύκλος $|z - z_0| = r$, διαγεγραμμένος κατά τη θετική φορά.

Θέτοντας στον τελευταίο τύπο $n = -1$, παίρνουμε ότι ο συντελεστής που αντιστοιχεί στον όρο $1/(z - z_0)$ είναι ίσος με

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Ο συντελεστής α_{-1} , ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0** και συμβολίζεται

$\text{Res}(f, z_0)$, δηλαδή $\text{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Ετυμολογία

Ο συντελεστής α_{-1} , ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** γιατί είναι κυριολεκτικά, αυτό που απομένει αν ολοκληρωθεί η σειρά Laurent όρο προς όρο γύρω από το σημείο ανωμαλίας z_0 . Πιο συγκεκριμένα, αν το ανάπτυγμα της f γύρω από το z_0 είναι

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

και γ είναι κυκλικό μονοπάτι με κέντρο z_0 και εντός του δακτυλίου, $0 < |z - z_0| < r$, τότε:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \alpha_{-1},$$

καθώς, $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0, \quad n \neq -1.$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Η αναζήτηση ενός ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

ή από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που το ορίζει $\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$

μπορεί να είναι δύσκολη ή/και ασύμφορη. Στις περιπτώσεις των πόλων υπάρχει το εξής θεώρημα που αντικαθιστά τον εντοπισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου με τον υπολογισμό ενός ορίου.

Θεώρημα

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m , τότε $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$

Απόδειξη: Από το ανάπτυγμα Taylor της αναλυτικής $(z - z_0)^m f(z)$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θεώρημα

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m , τότε $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$

Ειδικές Περιπτώσεις

$$m = 1: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$m = 2: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

$$m = 3: \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^2}{dz^2} [(z - z_0)^3 f(z)]$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παρατήρηση

Για $m = 1$, είναι $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο όριο είναι το ίδιο με αυτό που υπολογίζουμε για να αναγνωρίσουμε το σημείο z_0 ως απλό πόλο.

Δηλαδή, στην περίπτωση όπου, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ και $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lambda \neq 0$, τότε μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι το z_0 είναι απλός πόλος και ότι $\text{Res}(f, z_0) = \lambda$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 1

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, στο $z_0 = 0$.

Λύση

$z_0 = 0$: μεμονωμένη. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^2} = \infty \Rightarrow z=0$ πόλος

$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \Rightarrow z=0$: πόλος 1ης τάξης

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = 1 = a_{-1}$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 1

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, στο $z_0 = 0$.

Λύση

Εκπαίδευση

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots \Rightarrow a_{-1} = \operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 2

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = e^{1/z}$, στο $z_0 = 0$.

Λύση

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \dots + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{z} + 1.$$

$\nearrow a_{-1} = 1$

$$\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 3

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, στο $z_0 = 1$.

Λύση

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty \Rightarrow z_0 = 1: \text{πόλος}, \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^3 \cdot f(z) = e^2 \neq 0, \infty$$

$\Rightarrow z_0 = 1: \text{πόλος 3}^{\text{ος}} \text{ τάξης.}$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^3 \cdot f(z) \right]'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (e^{2z})'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (4e^{2z}) = \\ &= 2e^2. \end{aligned}$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 4

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ στα σημεία ανωμαλίας.

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} \neq 0, \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z-i} = -\frac{1}{2i} \neq 0, \infty$$

$z = \pm i$: πόλοι 1^{ης} τάξης, άρα $\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \frac{1}{2i}$, $\text{Res}(f, -i) = -\frac{1}{2i}$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 5

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \frac{z^{10}}{(z-1)^2(z+2)}$, στα σημεία ανωμαλίας.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Τρεις χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση Ι

Έστω f, g δύο μιγαδικές συναρτήσεις. Τότε $\text{Res}(f + g, z_0) = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0)$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < r$,

$$\text{τότε } f(z) + g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + b_n) (z - z_0)^n.$$

Συμπεραίνουμε ότι: $\text{Res}(f + g, z_0) = \alpha_{-1} + b_{-1} = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0)$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Τρεις χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση II

Έστω f συνάρτηση με πόλο 1ης τάξης στο z_0 και g αναλυτική στο $D(z_0, r)$, για κάποιο $r > 0$.
τότε $\text{Res}(f \cdot g, z_0) = g(z_0) \text{Res}(f, z_0)$.

Απόδειξη

Φανερά, το z_0 είναι πόλος 1ης τάξης και για την fg . Άρα,

$$\begin{aligned}\text{Res}(f \cdot g, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) g(z) \\ &= g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\ &= g(z_0) \text{Res}(f, z_0).\end{aligned}$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πριν την 3η πρόταση:

Ορισμός

Ένας αριθμός z_0 ονομάζεται ρίζα πολλαπλότητας m για τη συνάρτηση $h(z)$ αν

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0, \infty.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τη συνάρτηση $h(z) = 1 - \cos(z)$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1 - \cos z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z}{2z} = -\frac{1}{2} \neq 0, \infty$$

$\Rightarrow 0$: ρίζα πολλαπλότητας 2 για την h .

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πριν την 3η πρόταση:

Αποδεικνύεται ότι:

Ένας αριθμός z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας m για τη συνάρτηση $h(z)$ αν

$$\underline{h(z_0) = 0}, \underline{h'(z_0) = 0}, \dots, \underline{h^{(m-1)}(z_0) = 0}, \underline{\text{αλλά } h^{(m)}(z_0) \neq 0}.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τη συνάρτηση $h(z) = z \sin(z)$.

$$h(z) = z \cdot \sin z, \quad h(0) = 0$$

$$h'(z) = \sin z + z \cos z, \quad h'(0) = 0$$

$$h''(z) = \cos z + \cos z - z \sin z, \quad h''(0) = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow z_0 = 0$: ρίζα πολλαπλότητας 2

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πρόταση III

Αν $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $g(z_0) \neq 0$, και το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας m για την $h(z)$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης m για την f .

Δηλαδή:

- Αν $\underbrace{g(z_0)} \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ $\rightarrow z_0$ πόλος 1^{ης} τάξης για την f .
- Αν $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$, $h^{(2)}(z_0) \neq 0$ $\rightarrow z_0$ πόλος 2^{ης} τάξης για την f .

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \tan z$, στο $\pi/2$.

Λύση

Είναι $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$. Παρατηρούμε ότι

Αριθμητής: $\sin \pi/2 = 1 \neq 0$.

Παρονομαστής: $\cos \pi/2 = 0$, $(\cos z)'|_{\pi/2} = (-\sin \pi/2) = -1 \neq 0$.

Το $\pi/2$ είναι ρίζα 1^{ης} τάξης για τον παρονομαστή, χωρίς να μηδενίζει τον αριθμητή, άρα είναι πόλος 1^{ης} τάξης για την $\tan z$. Υπολογίζουμε:

$$\text{Res}(f, \pi/2) = \lim_{z \rightarrow \pi/2} (z - \pi/2) \tan z = \lim_{z \rightarrow \pi/2} (z - \pi/2) \sin z / \cos z = -1.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 7

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος. Αξιοποιείτε την Πρόταση III.

Λύση

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z} = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad g(z) = 1 \neq 0, \quad h(z) = z \sin z.$$

$$h(0) = 0, \quad h'(z) = \sin z + z \cos z \Rightarrow h'(0) = 0$$
$$h''(z) = \cos z + \cos z - z \sin z \Rightarrow h''(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow z_0 = 0: \text{ πόλος } 2^{\circ} \text{ τάξης}$$

είδατε πόλος 2ης τάξης

Άρα, $z_0 = 0$: πόλος 2° τάξης της f .

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 8

Να βρεθεί το είδος της ανωμαλίας της $f(z) = \frac{1 - z^5}{1 - \cos z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος. Αξιοποιείτε την Πρόταση III.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 9

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$, στο σημείο ανωμαλίας.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 10

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 11

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 12

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \frac{1+z}{z(2-z)}$, στα σημεία ανωμαλίας.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων από τα αναπτύγματα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι ασύμφορος.

Λύση