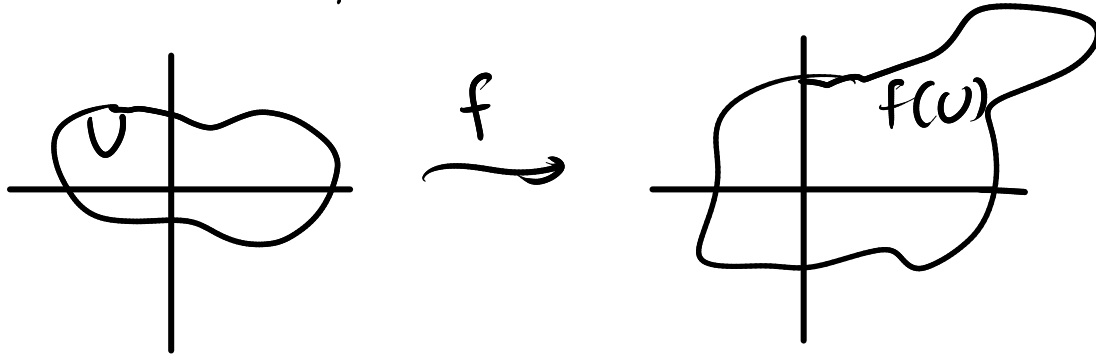


Μιγαδικές Συναρτήσεις

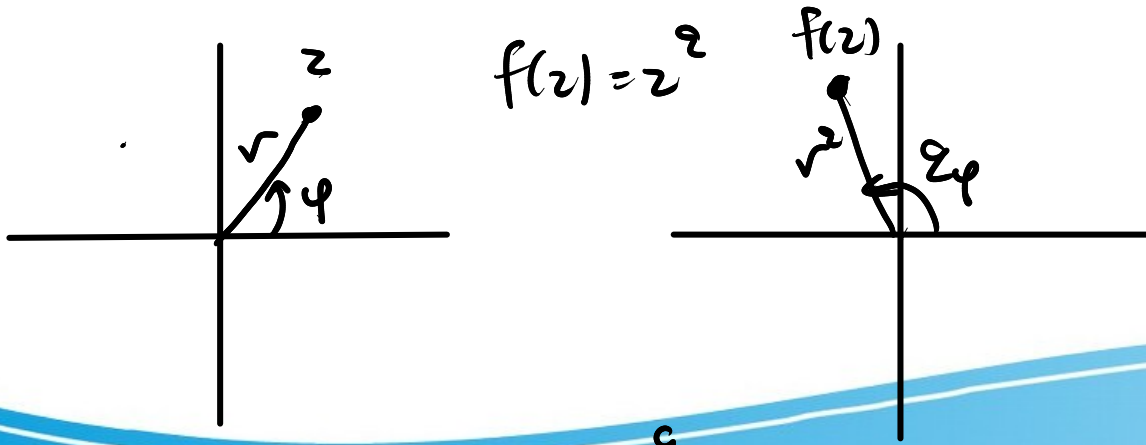
Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr



$$f: U \rightarrow \mathbb{C}$$



Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$



$$z = re^{i\varphi} \Rightarrow f(z) = r^2 e^{i2\varphi}$$

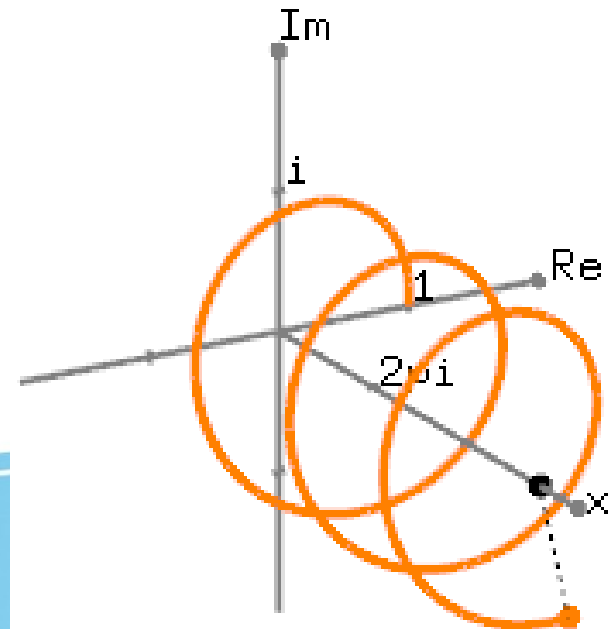
Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$

Μία μιγαδική συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $A \subseteq \mathbb{C}$, απαιτεί δύο άξονες για την αναπαράσταση του πεδίου ορισμού A και άλλους δύο άξονες για την αναπαράσταση της εικόνας $f(A)$, άρα **δεν είναι δυνατή** η γραφική αναπαράσταση μίας μιγαδικής συνάρτησης **στη γενική της μορφή**.

Ωστόσο, αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, τότε αρκούν οι τρεις διαστάσεις.

Ένα παράδειγμα: $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$

~~~~~

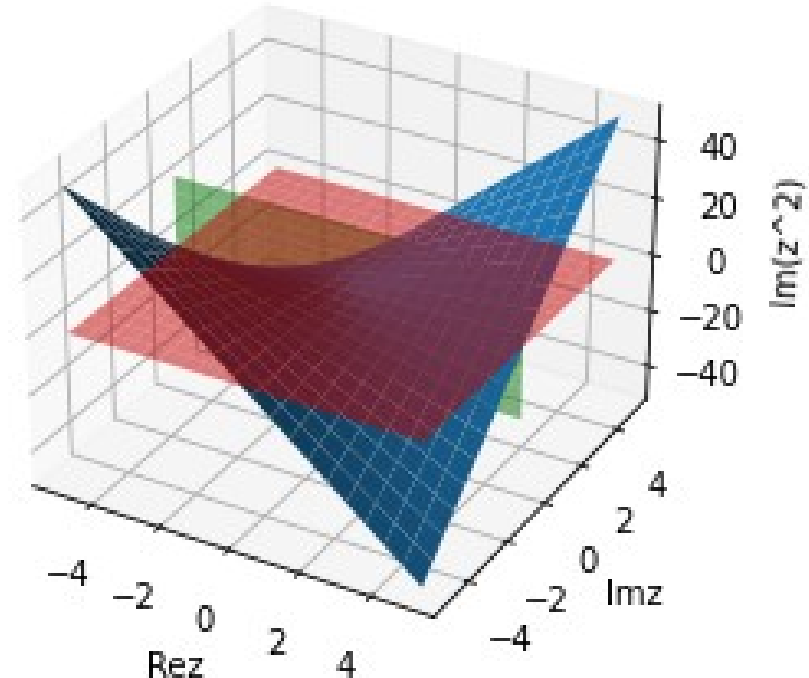
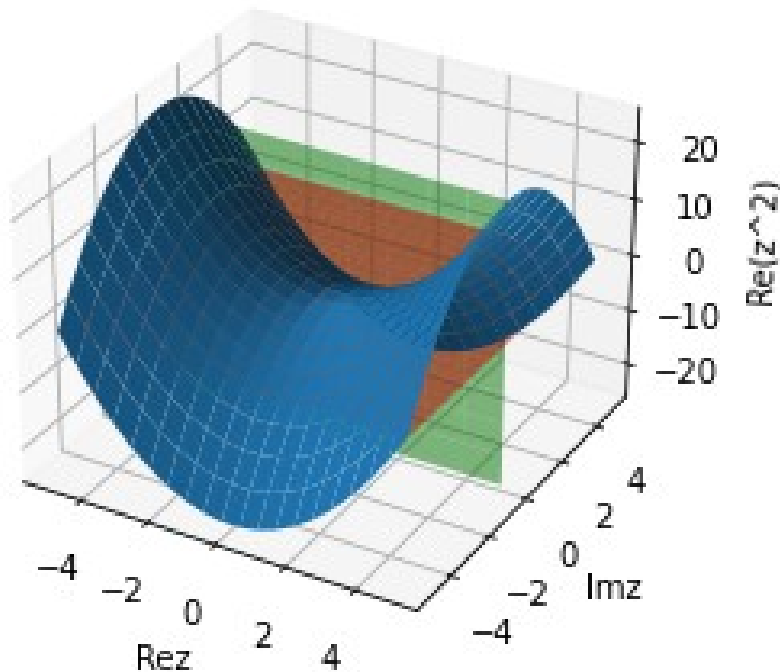


# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία άλλη επιλογή είναι η επιλεκτική αναπαράσταση μόνο του πραγματικού ή του φανταστικού μέρους μίας συνάρτησης.

π.χ. αν  $f(z) = z^2$  και  $z = x + iy$ , τότε  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$  και τα επιμέρους γραφήματα είναι:

$\text{Re}f$   $\text{Im}f$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

**Κώδικας Python που δίνει το διάγραμμα της  $f(z) = z^2$ .**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

```
A = np.linspace(-5, 5, 20)
B = np.linspace(-5, 5, 20)
A, B = np.meshgrid(A, B)
Y = A**2 - B**2    # ή Y = 2*A*B
```

```
C = np.linspace(-5, 5, 10)
D = np.linspace(-25, 25, 10)
C, D = np.meshgrid(C, D)
```

```
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(A, B, Y, zorder=2)
ax.plot_surface(A, B, np.zeros_like(A), color='red', alpha=0.5, zorder=1)
ax.plot_surface(C, np.zeros_like(C), D, color='green', alpha=0.5, zorder=1)
ax.set_xlabel('Re z')
ax.set_ylabel('Im z')
ax.set_zlabel('Re(z^2)') # ή ax.set_zlabel('Im(z^2)')
plt.show()
```

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

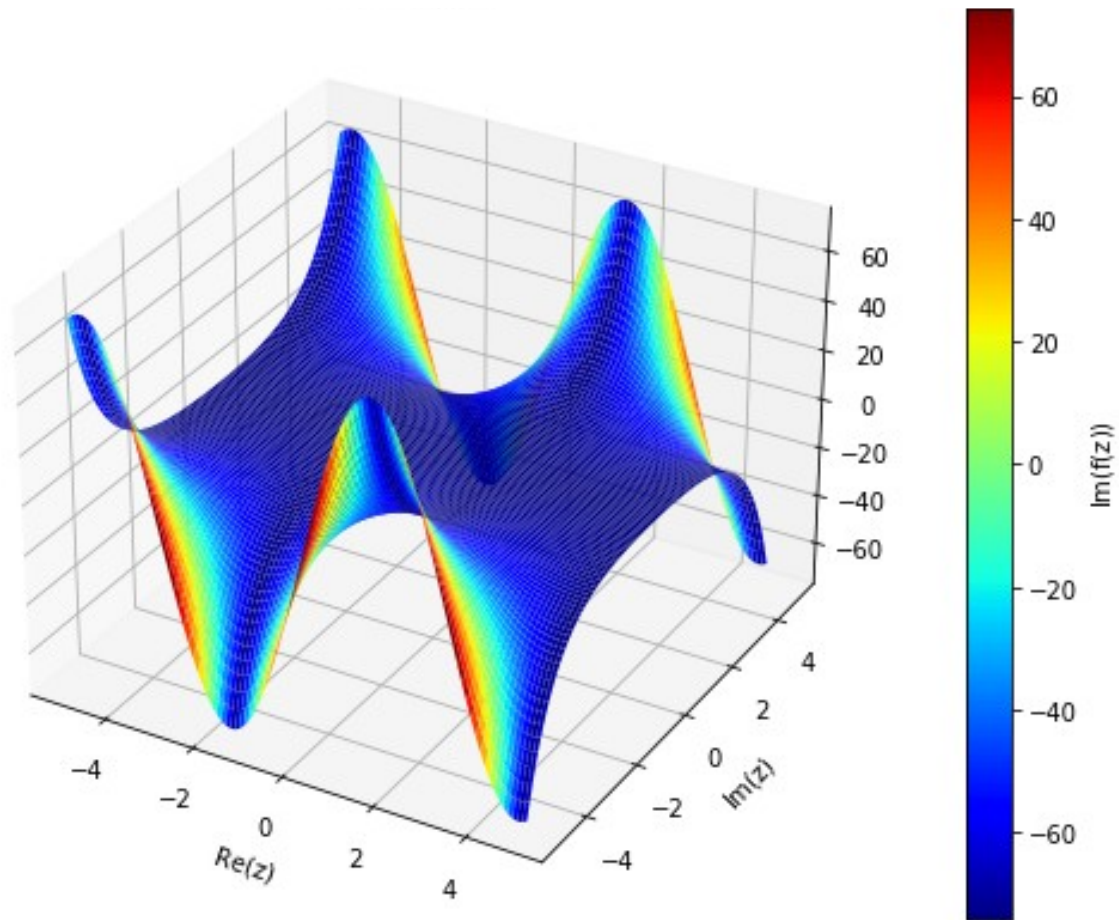
Επιπλέον, υπάρχει και η εκδοχή των τρισδιάστατων γραφημάτων με χρωματικό υπόμνημα.

**Κώδικας Python για το 3d διάγραμμα**

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
X = np.arange(-5, 5, 0.1)
Y = np.arange(-5, 5, 0.1)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
R=np.sin(X + 1j*Y)
Z=R.real
T=R.imag
N = np.abs(T/T.max()) # normalize 0..1
plt.title('  $\mathrm{f}(z)=\sin(z)$  ')
plt.xlabel('  $\mathrm{Re}(z)$  ')
plt.ylabel('  $\mathrm{Im}(z)$  ')
surf = ax.plot_surface(
    X, Y, Z, rstride=1, cstride=1,
    facecolors=cm.jet(N),
    linewidth=0, antialiased=True, shade=False)
m = cm.ScalarMappable(cmap=cm.jet, norm=surf.norm)
m.set_array(T)
p=plt.colorbar(m)
p.set_label('  $\mathrm{Im}(f(z))$  ')
fig.set_size_inches(14,7)
plt.show()
```

Πηγή: <https://ask.sagemath.org/question/9843/3d-complex-function-plot/>



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

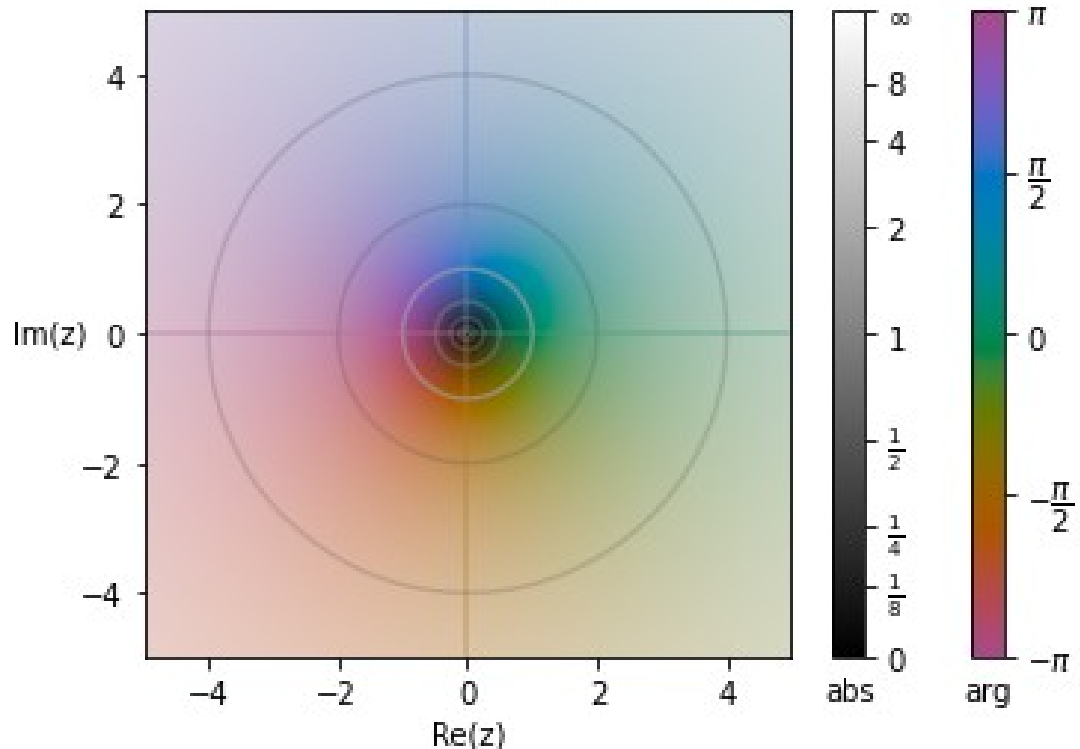
Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg } f(z)$ . Στο διάγραμμα παρουσιάζεται η αναπαράσταση της  $f(z) = z$ .

## Οδηγός ανάγνωσης του διαγράμματος

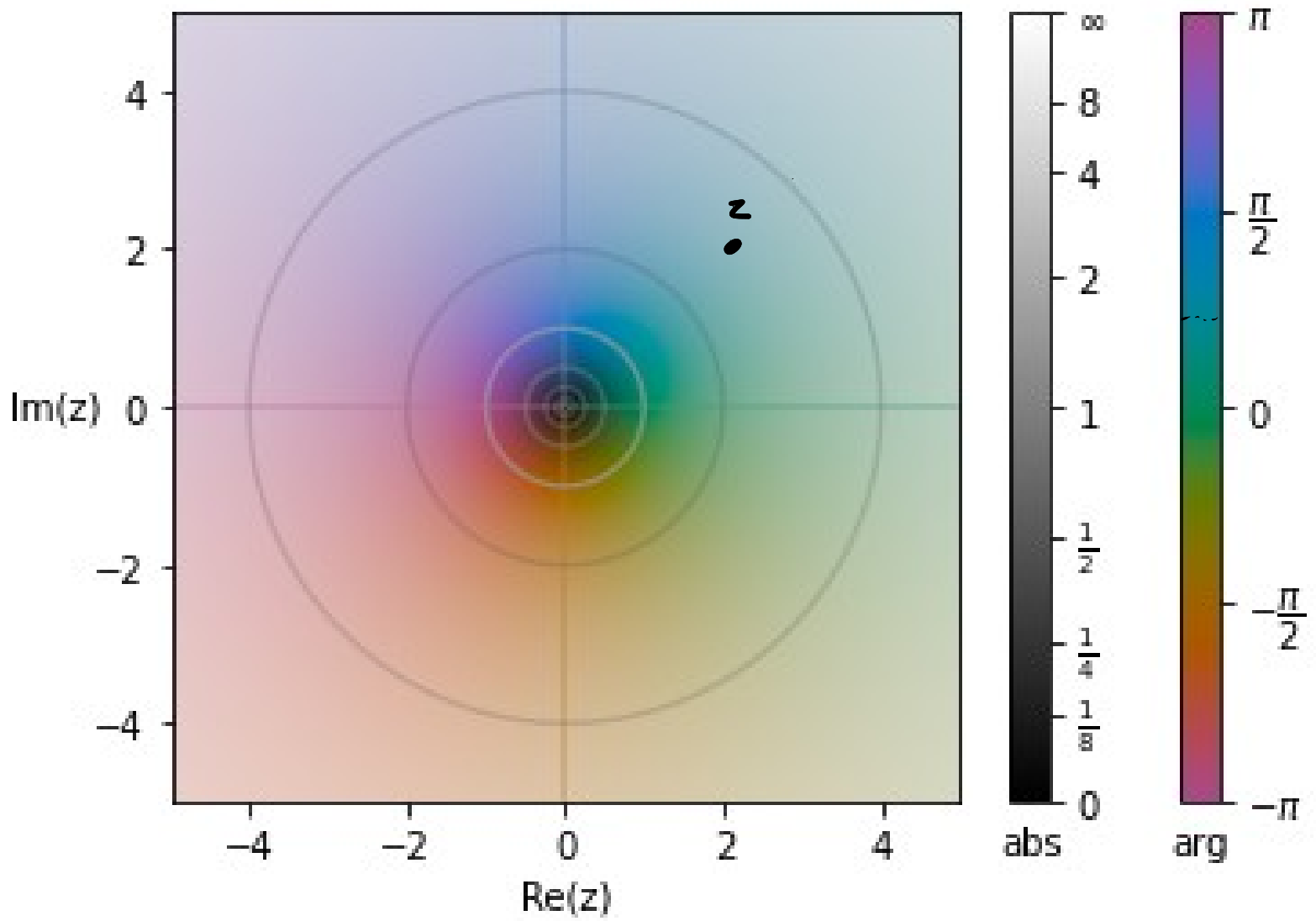
Το όρισμα της αντίστοιχης εικόνας  $f(z)$ , δηλαδή το  $\arg f(z)$ , εκφράζεται με την απόχρωση (hue) κάθε σημείου. Αν η συνάρτηση είναι πλειονότιμη τότε χρωματίζεται η πρωτεύουσα τιμή του ορίσματος  $\text{Arg } f(z)$ .

Το μέτρο της εικόνας  $f(z)$ , δηλαδή το  $|f(z)|$  εκφράζεται με την φωτεινότητα (brightness) κάθε σημείου.

Οι γραμμές που σημειώνονται (contour lines) αντιστοιχούν σε εικόνες με  $|f(z)| = \dots, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, \dots$



$f(z) = z.$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

$$\text{π.χ. } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i \text{Arg}(z)}$$

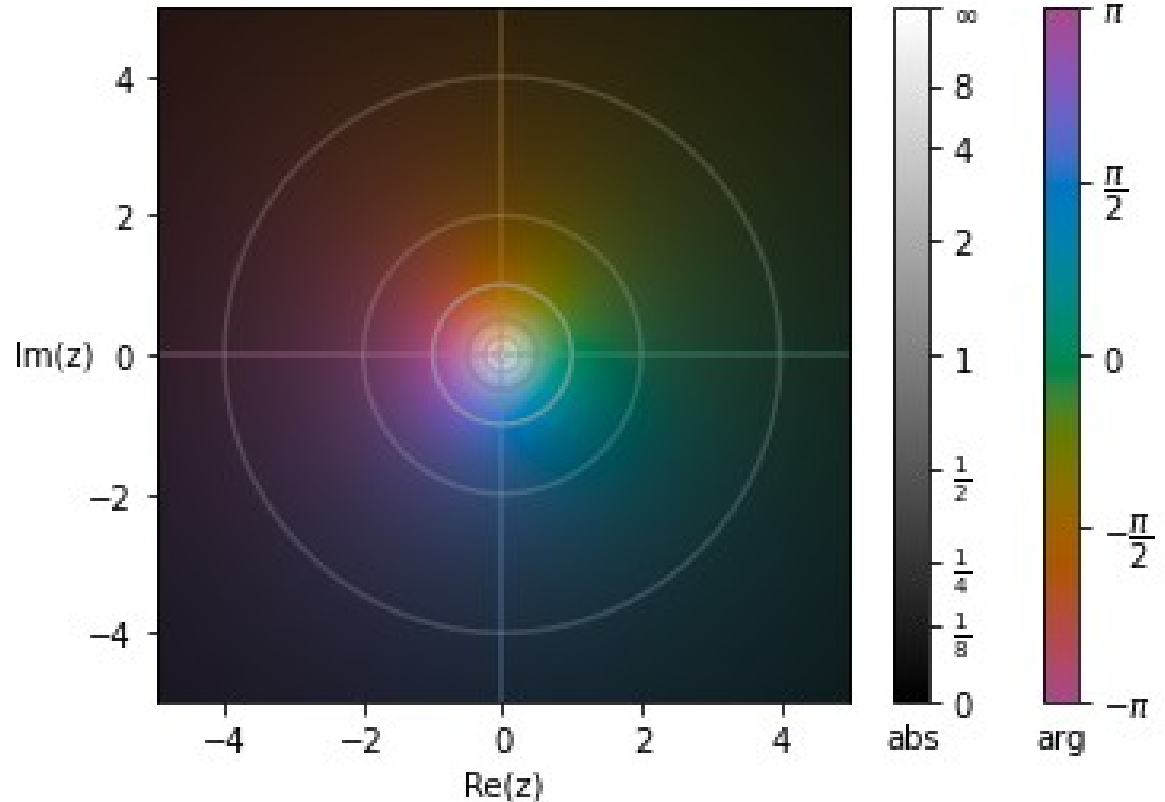
$$(|f(z)| = |z|^{-1} \text{ και } \text{Arg } f(z) = -\text{Arg } z)$$

## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np

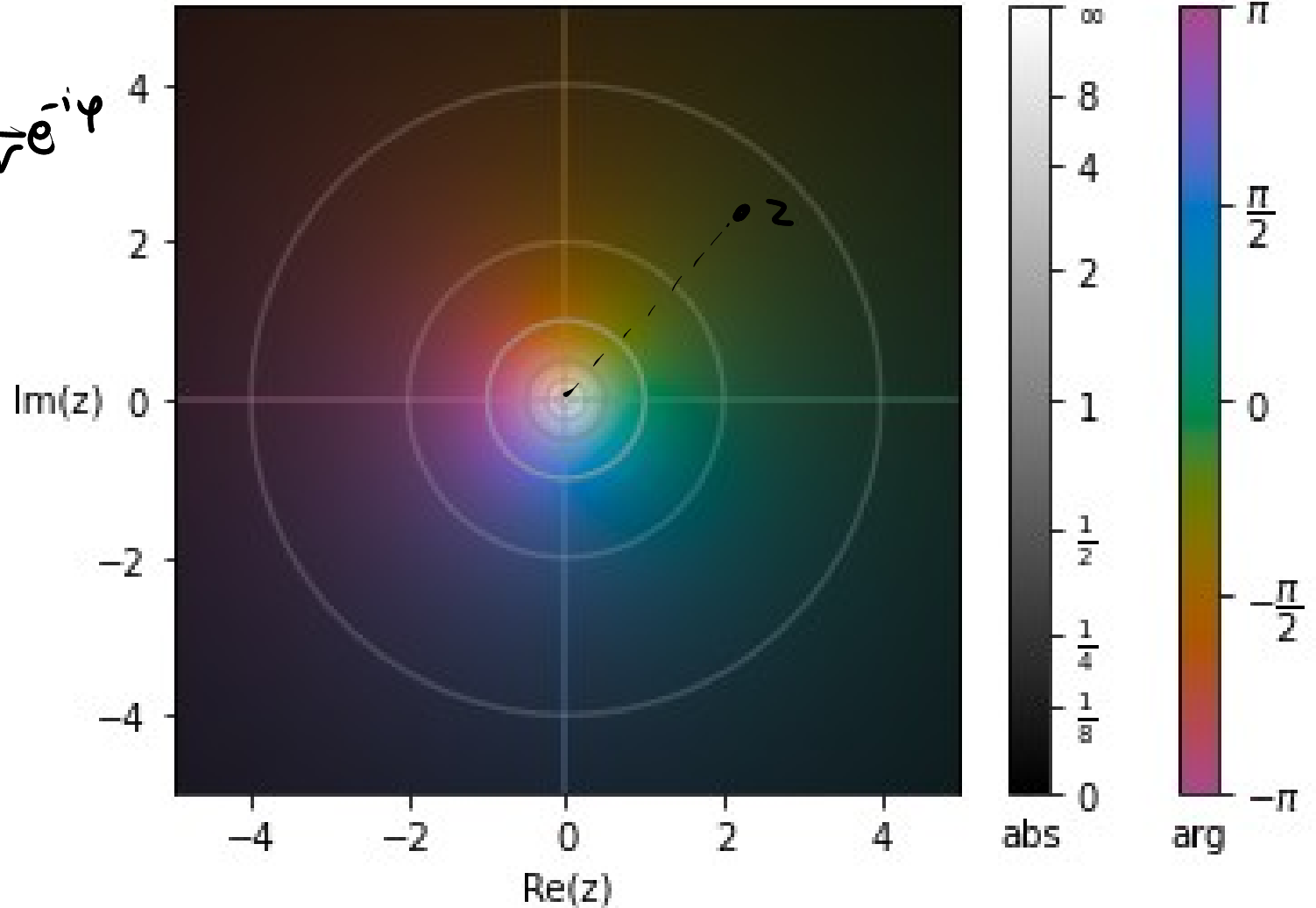
def f(z): return 1 / z

plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i \operatorname{Arg}(z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

$$\text{π.χ. } f(z) = z^2 = r^2 e^{2i \text{Arg}(z)}$$

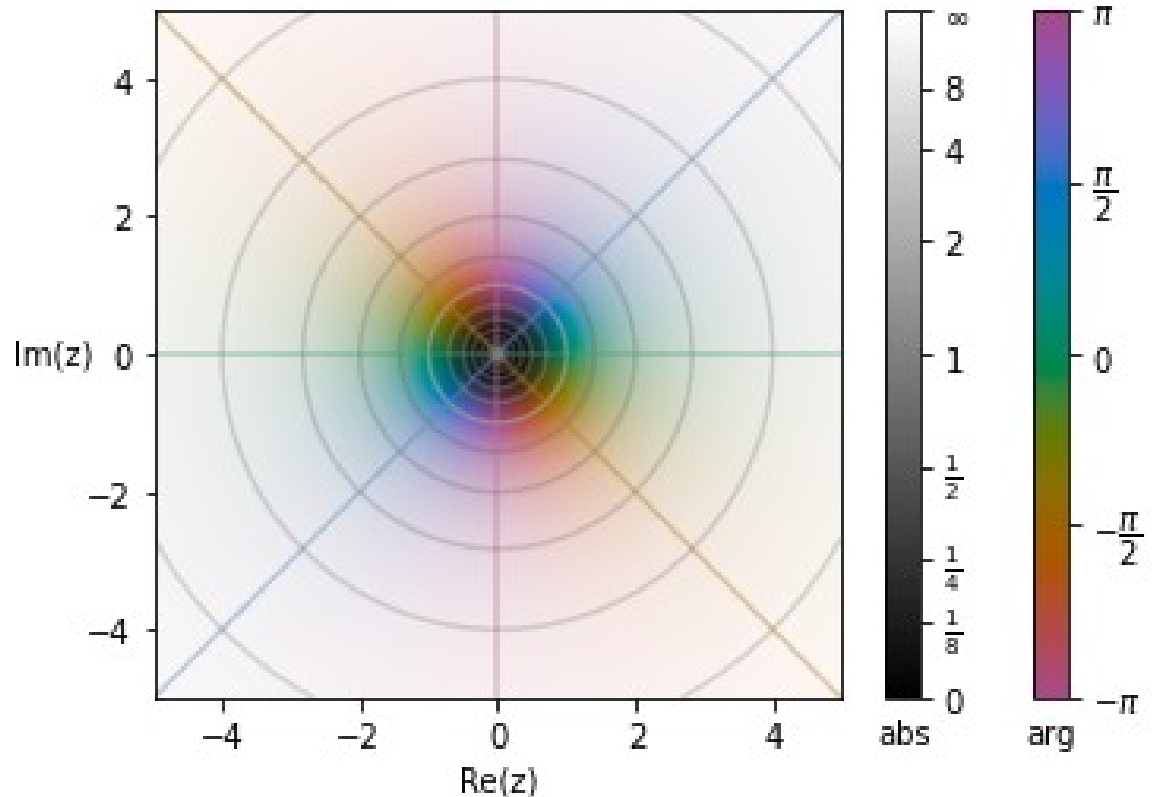
$$( |f(z)| = |z|^2 \text{ και } \text{Arg } f(z) = 2\text{Arg } z )$$

## Κώδικας Python

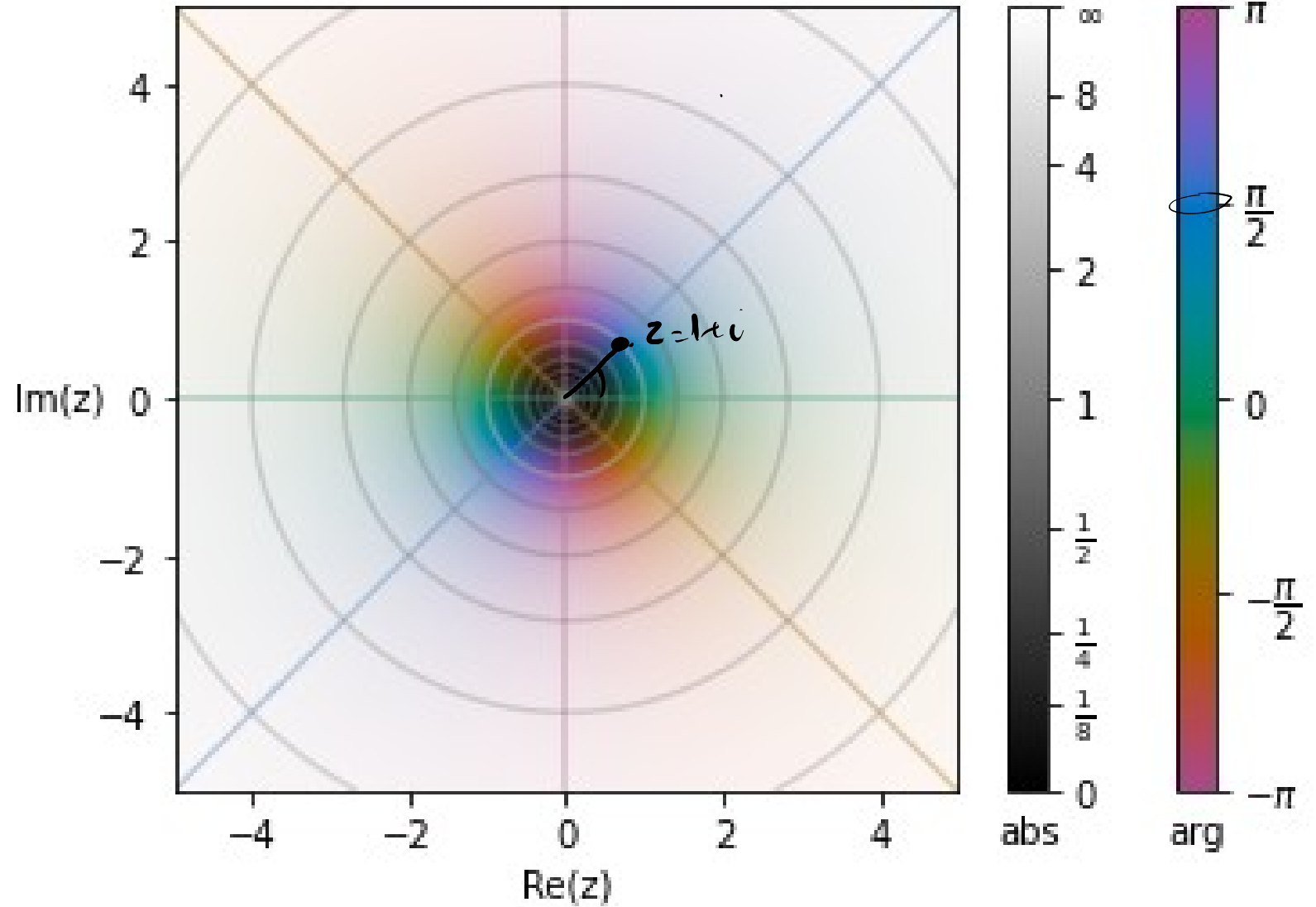
```
import cplot  
import numpy as np
```

```
def f(z): return z**2
```

```
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```



$$f(z) = z^2 = r^2 e^{2i \operatorname{Arg}(z)}$$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

$$\text{π.χ. } f(z) = z^3 = r^3 e^{3i \text{Arg}(z)}$$

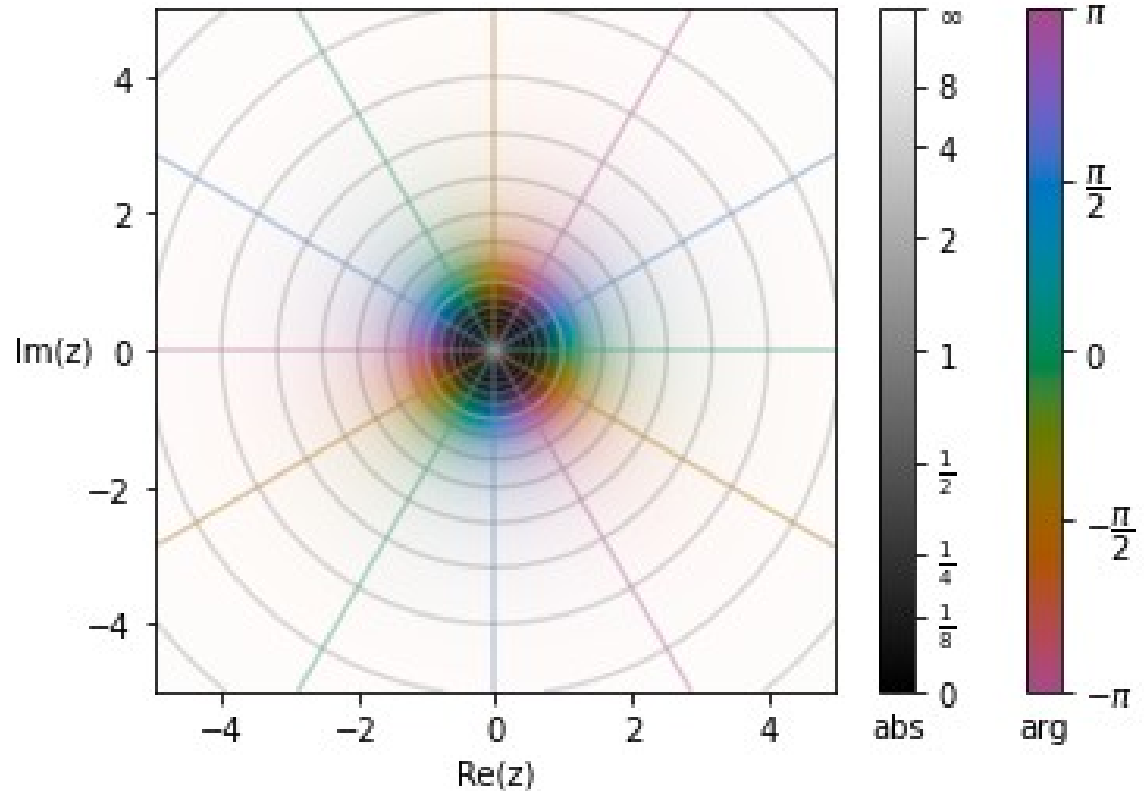
$$( |f(z)| = |z|^3 \text{ και } \text{Arg } f(z) = 3\text{Arg } z )$$

## Κώδικας Python

```
import cplot  
import numpy as np
```

```
def f(z): return z**3
```

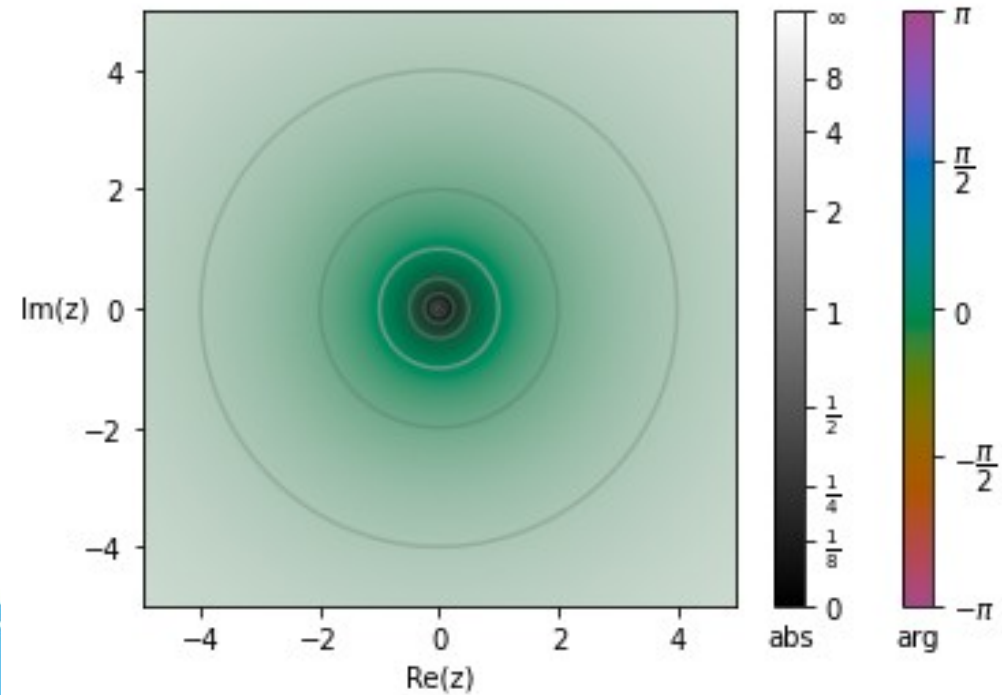
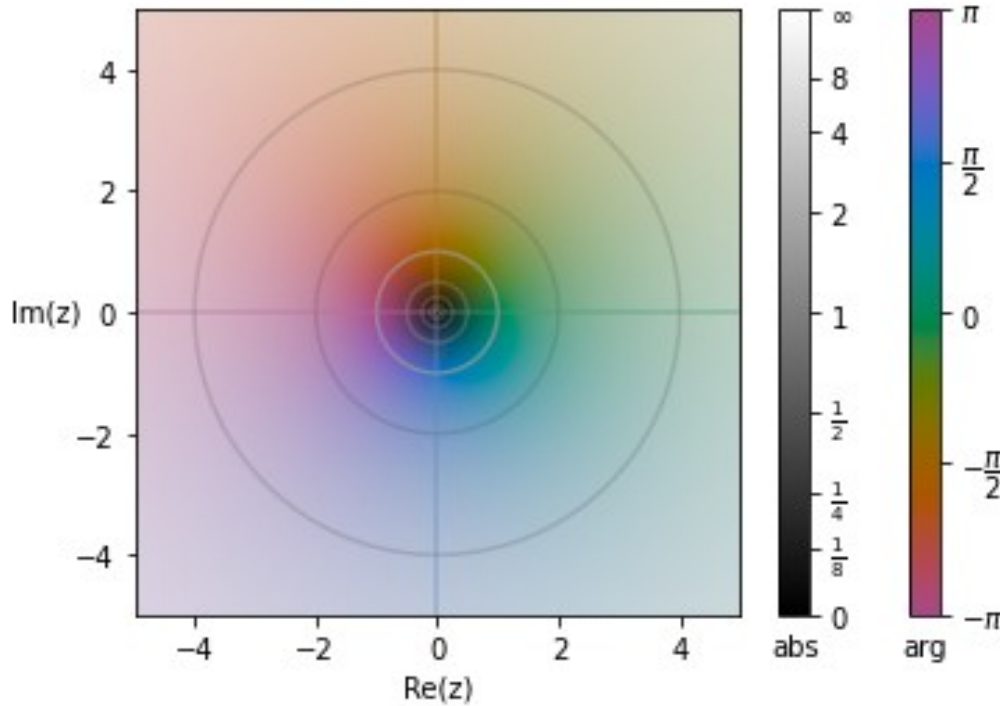
```
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

## Δραστηριότητα

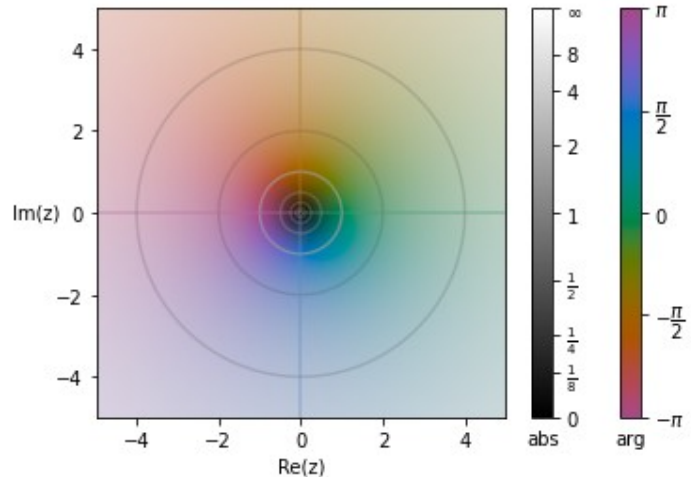
Ποιες (μπορεί να) είναι οι συναρτήσεις που αναπαριστώνται στα διαγράμματα;



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

## Απάντηση

$$f(z) = \bar{z}$$



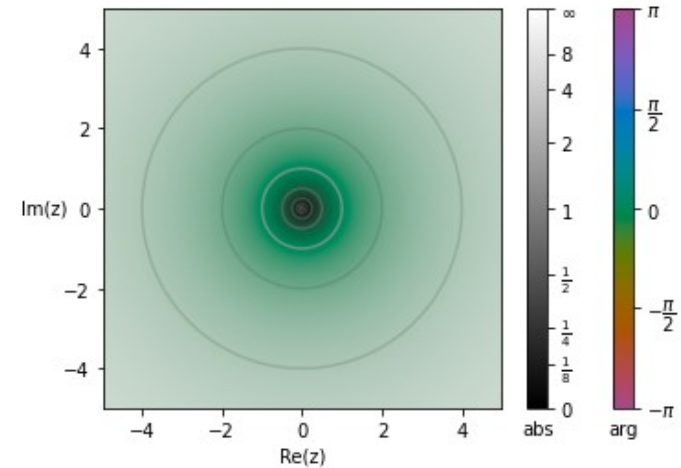
### Κώδικας Python

```
import cplot  
import numpy as np
```

```
def f(z): return np.conjugate(z)
```

```
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```

$$f(z) = |z|$$



### Κώδικας Python

```
import cplot  
import numpy as np
```

```
def f(z): return np.abs(z)
```

```
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

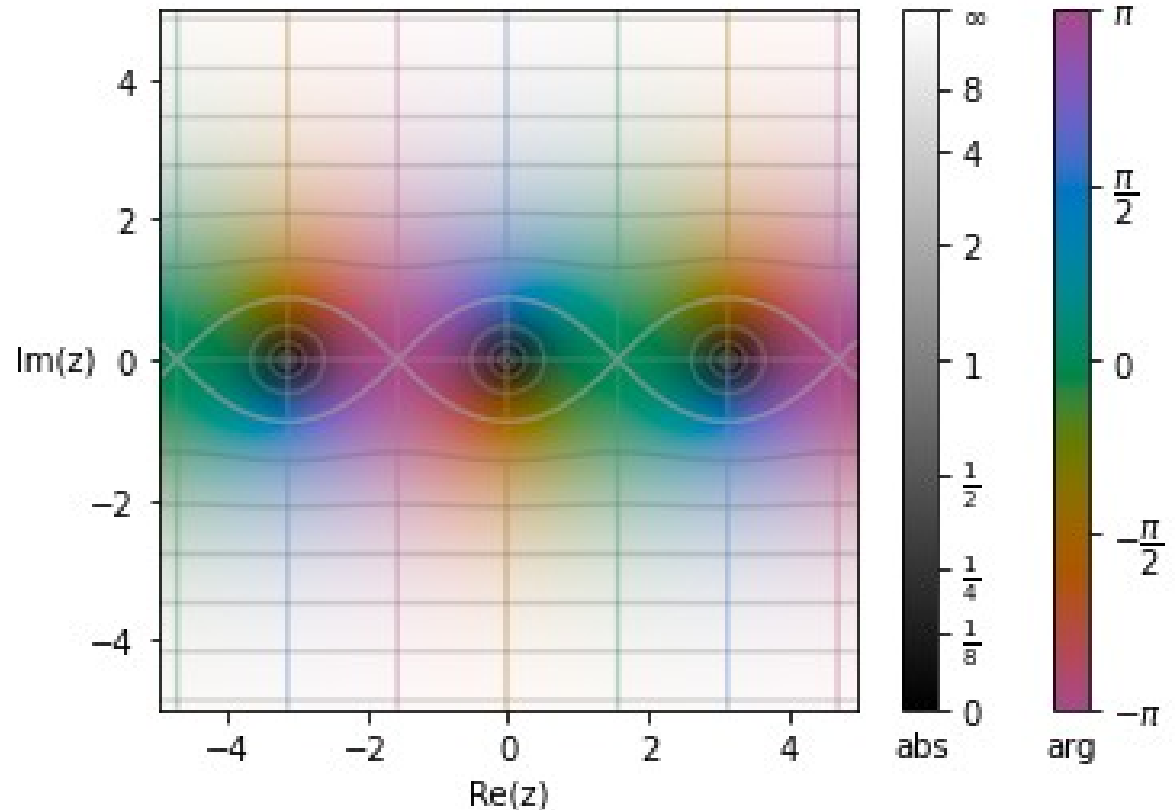
$$\text{π.χ. } f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- $\sin(z + 2\pi) = \sin z$
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} |\sin z| = +\infty$ .
- $\sin z = 0 \leftrightarrow z = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ .
- $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$  (συμμετρία ως προς  $x'$ )

## Κώδικας Python

```
import cplot  
import numpy as np
```

```
plt = cplot.plot(np.sin, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```



## Σημείωση

Προσέξτε πως η περιοδικότητα της  $y = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , αντανακλάται στις χρωματικές εναλλαγές της  $\text{Im} z = 0$ .

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

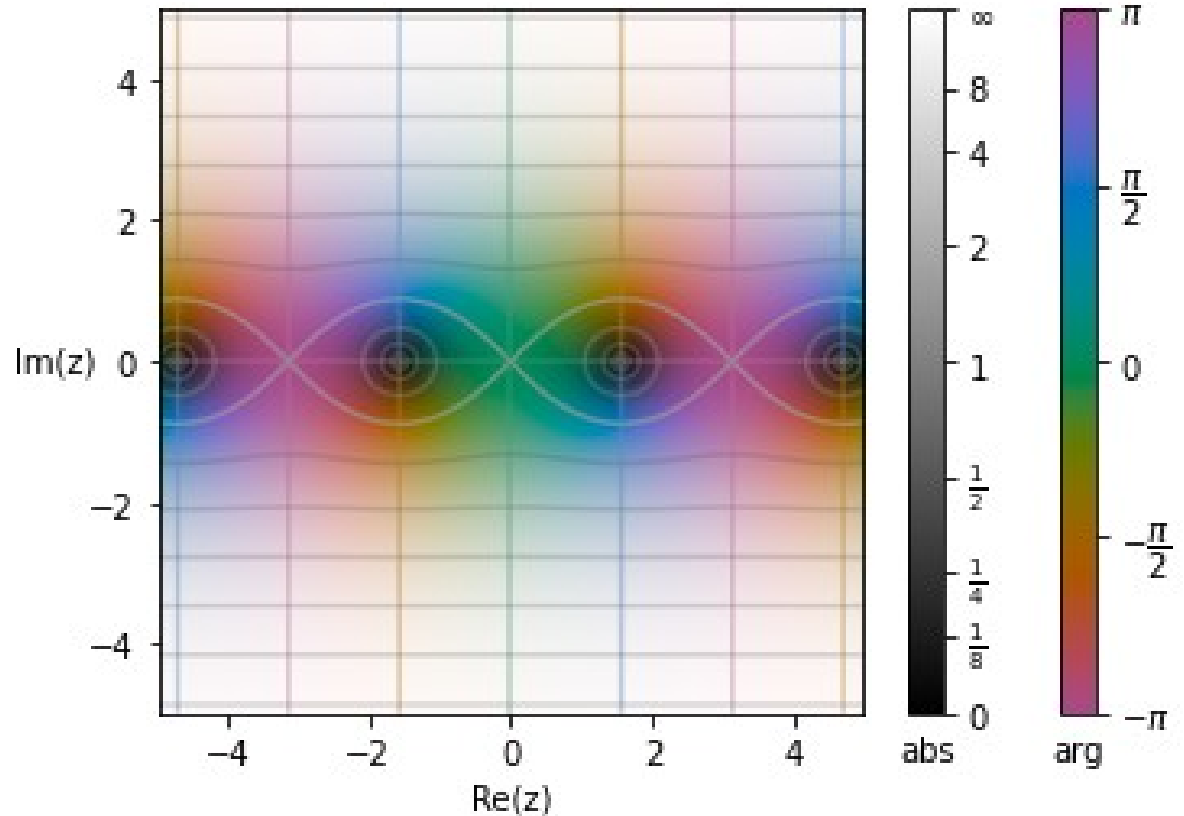
$$\text{π.χ. } f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} |\cos z| = +\infty$ .
- $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z}$ .
- $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$  (συμμετρία ως προς  $x'$ )

## Κώδικας Python

```
import cplot  
import numpy as np
```

```
plt = cplot.plot(np.cos, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```



## Σημείωση

Προσέξτε πως η περιοδικότητα της  $y = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , αντανακλάται στις χρωματικές εναλλαγές της  $\text{Im}z = 0$ .

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

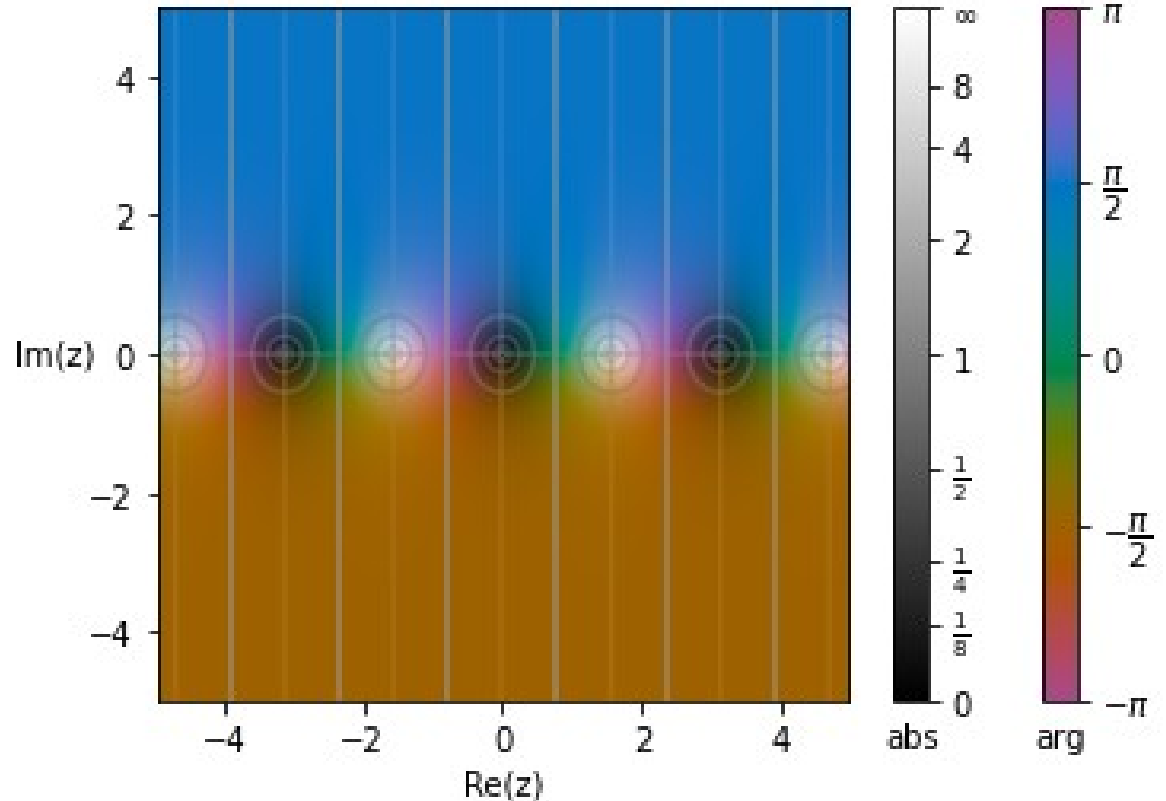
π.χ.  $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

- $\tan(z + \pi) = \tan z$
- $\tan z = 0 \leftrightarrow z = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ .
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} \tan z = i$ .
- $\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan z = -i$ .
- $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$

## Κώδικας Python

```
import cplot  
import numpy as np
```

```
plt = cplot.plot(np.tan, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

π.χ.  $f(z) = e^z = e^x e^{iy}$

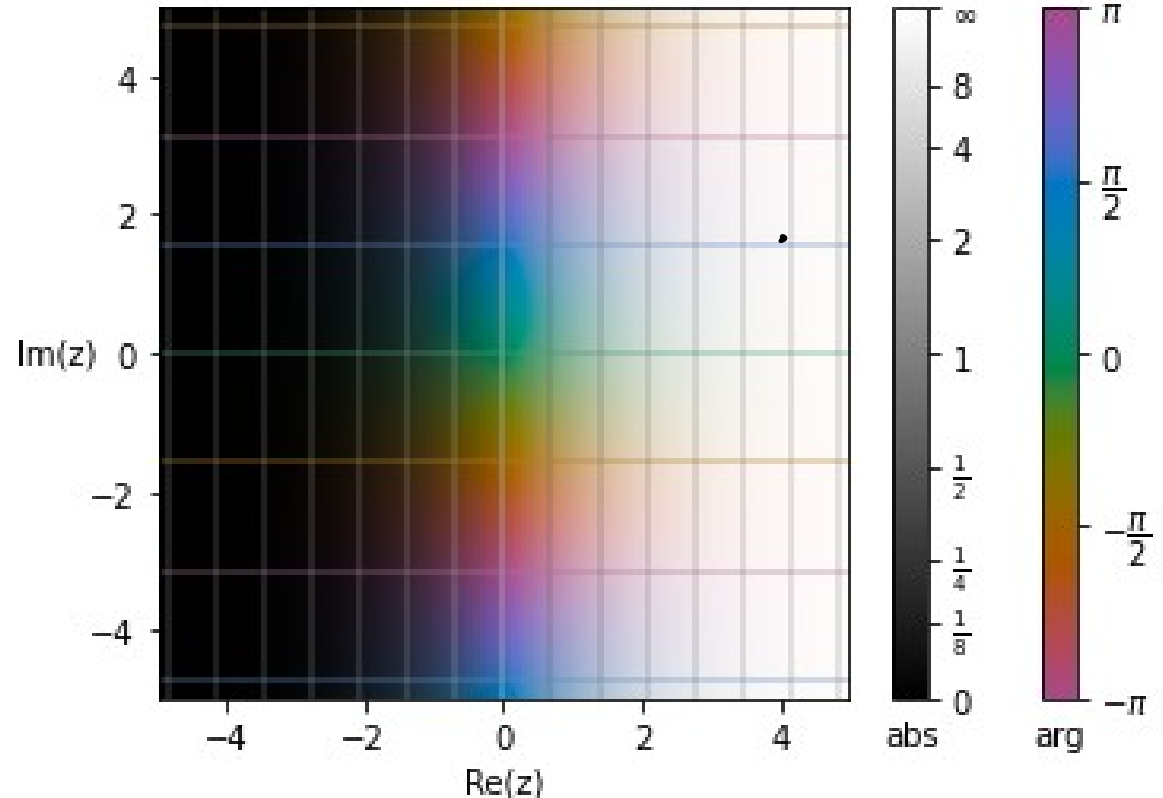
(  $|f(z)| = e^{\text{Re}z}$  και  $\text{Arg } f(z) = \text{Im } z$  )

$e^{i2\pi} = 1$

**Κώδικας Python**

```
import cplot  
import numpy as np
```

```
plt = cplot.plot(np.tan, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))  
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

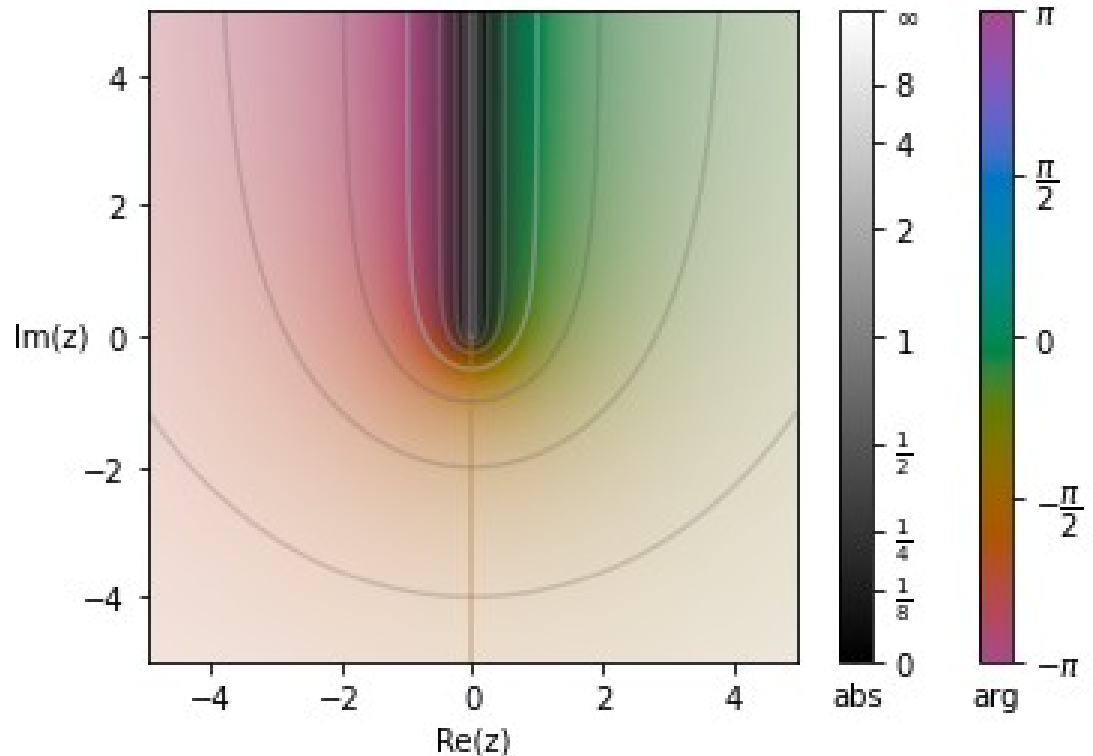
Οι συναρτήσεις  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^z$ ,  $\tan z$ ,  $z^2$ ,  $z^3$ ,  $1/z$ , μοιράζονται όλες την ιδιότητα  
➔  $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$  η οποία εξασφαλίζει συμμετρία της γραφικής παράστασης ως προς τον πραγματικό άξονα.

Μία συνάρτηση χωρίς αυτό το χαρακτηριστικό είναι η  $f(z) = z - i|z|$

## Κώδικας Python

```
import cplot
def f(z): return z - 1j * abs(z)

plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Η περίπτωση των πλειονότιμων συναρτήσεων είναι πιο ενδιαφέρουσα καθώς δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν με αυτόν τον τρόπο όλοι οι κλάδοι τους.

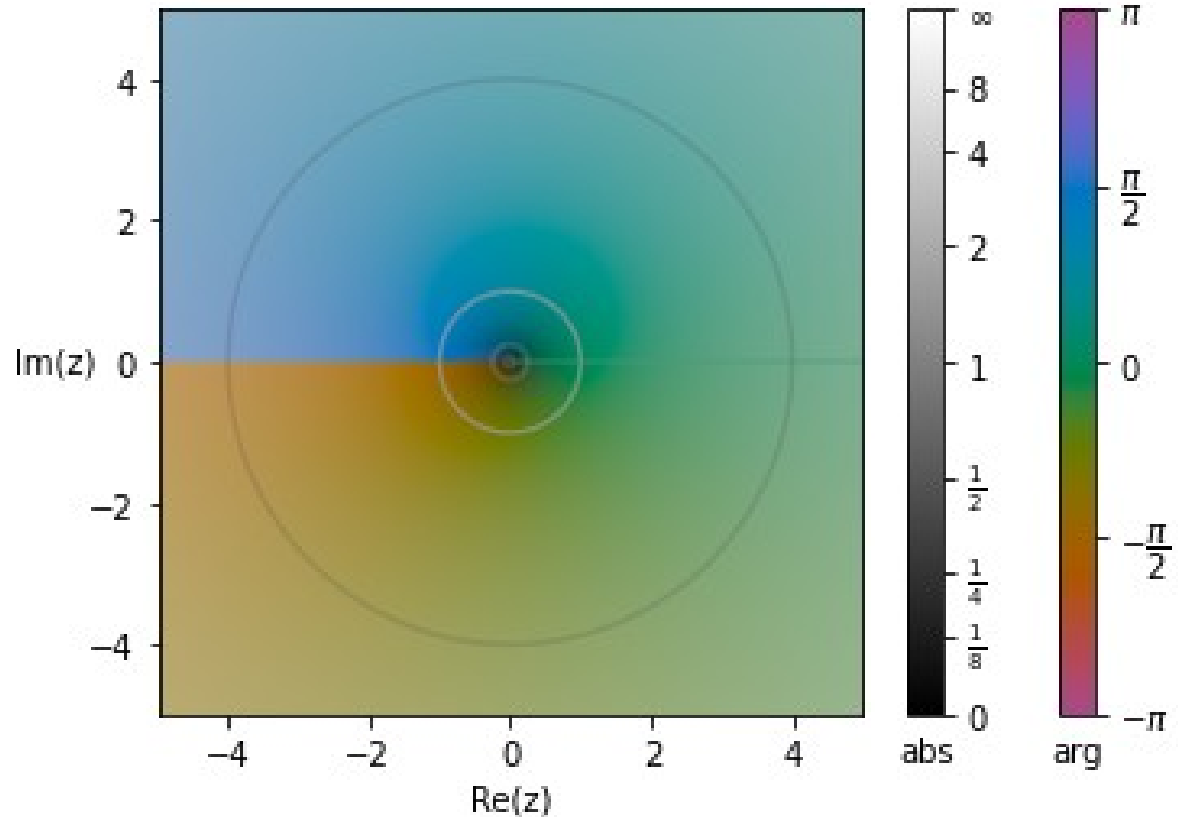
π.χ.  $f(z) = \sqrt{z}$

Η  $f$  έχει δύο εικόνες για κάθε  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ .

Η μία είναι η  $f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$  και η άλλη είναι η  $f(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2} = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2 + \pi)}$

Από αυτές, στο σχήμα παρουσιάζεται μόνο η πρωτεύουσα τιμή,  $f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$  η οποία ορίζεται για  $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ .

Όπως περιμέναμε είναι  $-\pi/2 < \text{Arg } f(z) \leq \pi/2$  ( $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$ , άρα  $-\pi/2 < \text{Arg } z / 2 \leq \pi/2$ ). Επίσης, παρουσιάζεται εμφανώς η ασυνέχεια κατά μήκος της ημιευθείας  $x \leq 0$ .



## Κώδικας Python

```
import cplot
def f(z): return z**0.5
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Η περίπτωση των πλειονότιμων συναρτήσεων είναι πιο ενδιαφέρουσα καθώς δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν με αυτόν τον τρόπο όλοι οι κλάδοι τους.

π.χ.  $f(z) = \log z$ .

Η  $f$  έχει άπειρες εικόνες για κάθε

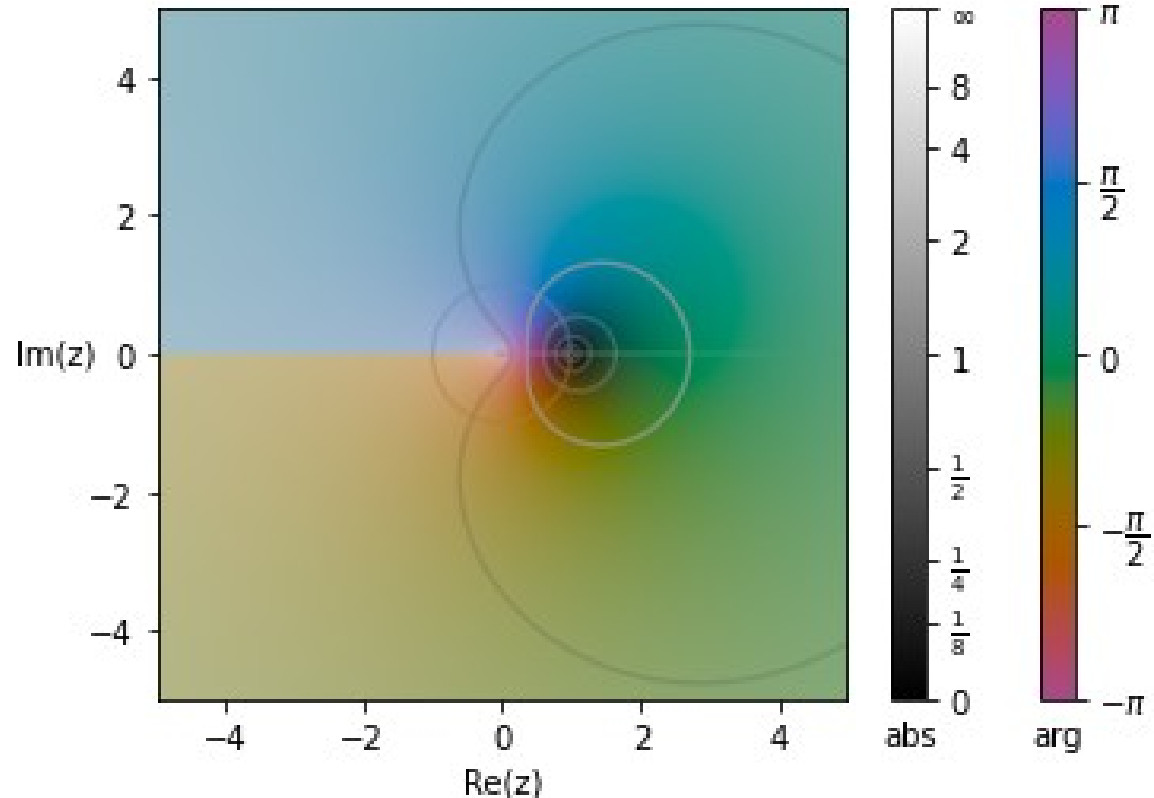
$z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ :

$$\log z = \ln|z| + i(\varphi + 2\kappa\pi), \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και κάθε μία από αυτές έχει όρισμα

$$\arg(\log z) = \tan^{-1}[(\varphi + 2\kappa\pi) / \ln|z|].$$

Από τις εικόνες, στο σχήμα παρουσιάζεται μόνο η πρωτεύουσα τιμή, δηλαδή αυτή που (εξ' ορισμού) έχει όρισμα  $\text{Arg } f(z)$  στο  $(-\pi, \pi]$ .

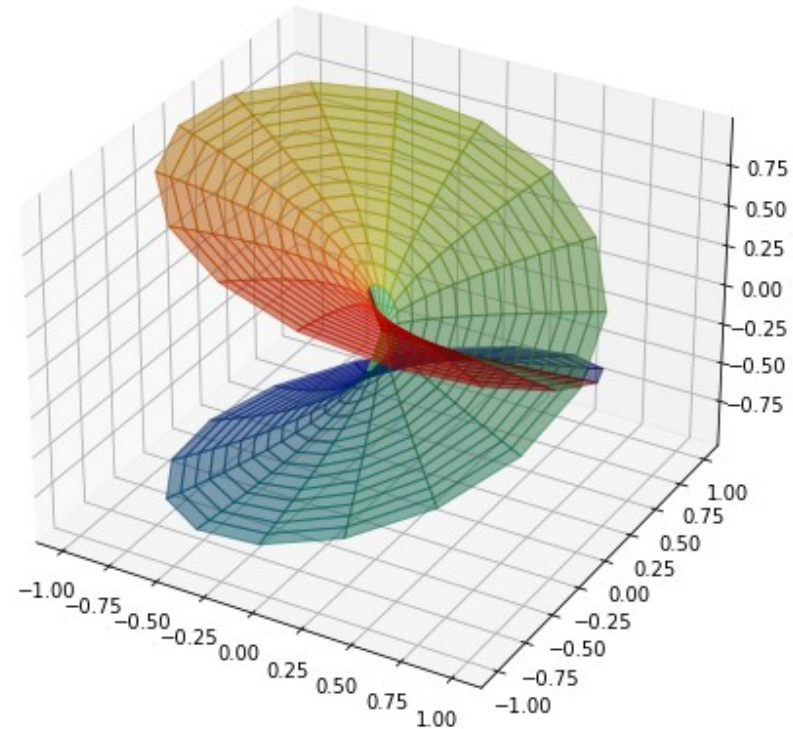
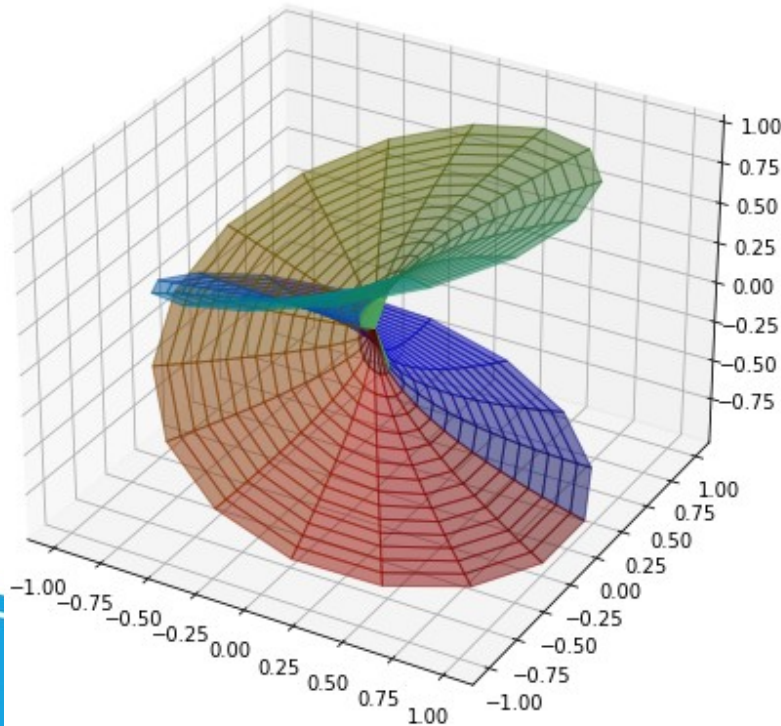


## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np
plt = cplot.plot(np.log, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Στο σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα του  $\operatorname{Re} f$  και  $\operatorname{Im} f$  της δίτιμης συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z}$ .



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

## Κώδικας Python

```
import numpy
from matplotlib import cm, colors
from matplotlib import pyplot as plt

branching_number = 2

Nr = 16
Ntheta = 32

# compute the theta,R domain
theta = numpy.linspace(0,2*numpy.pi*branching_number, Ntheta)
r = numpy.linspace(0,1,Nr)
Theta, R = numpy.meshgrid(theta,r)

z = R*numpy.exp(1j*Theta)

# compute  $w^2 = z$ . THE KEY IDEA is to pass the exponentiation by 1/2 into
exp().
w = numpy.sqrt(R)*numpy.exp(1j*Theta/2)
```

## Κώδικας Python (συνέχεια)

```
# color by argument
arguments = numpy.angle(w)
norm = colors.Normalize(arguments.min(), arguments.max())
color = cm.jet(norm(arguments))

fig = plt.figure(figsize=(16,8))

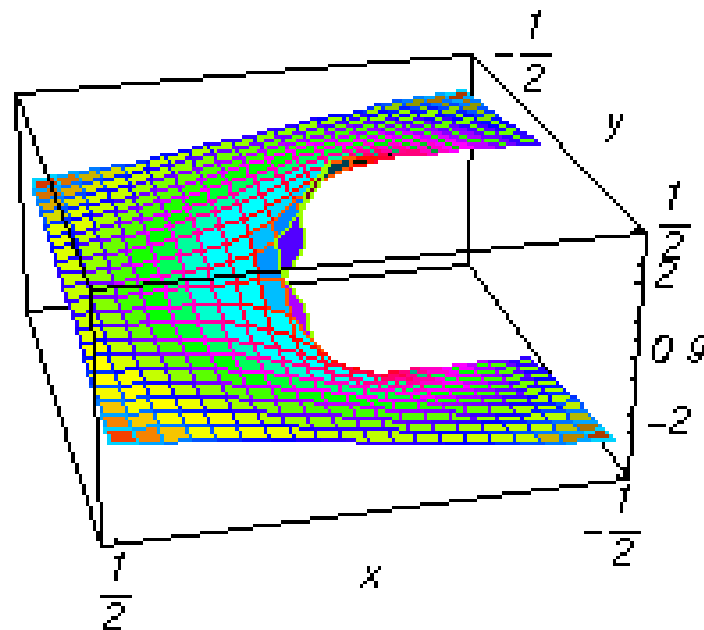
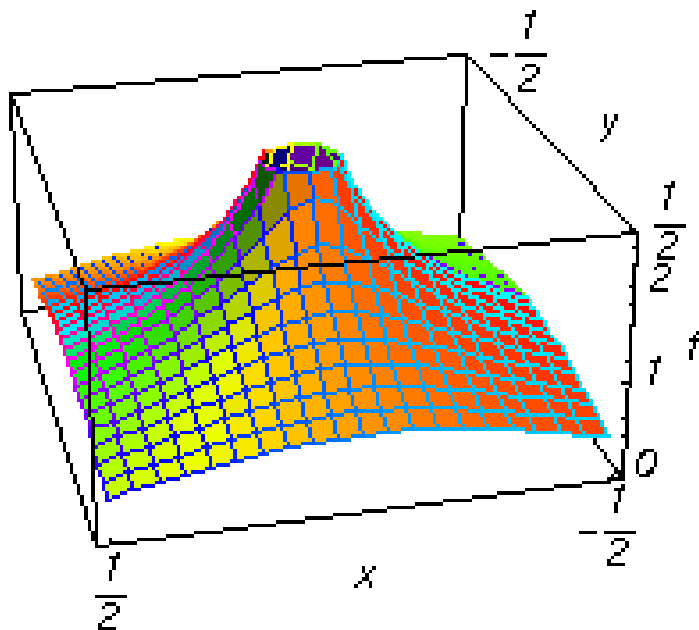
# plot the real part
ax_real = fig.add_subplot(1,2,1,projection='3d')
ax_real.plot_surface(z.real, z.imag, w.real,
                    rstride=1, cstride=1, alpha=0.5, facecolors=color)

# plot the imaginary part
ax_imag = fig.add_subplot(1,2,2,projection='3d')
ax_imag.plot_surface(z.real, z.imag, w.imag,
                    rstride=1, cstride=1, alpha=0.5, facecolors=color)
```

Πηγή: <https://gist.github.com/cswiercz/1fde0a82f8e9e1b0660a>

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$

Στο σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα του  $\operatorname{Re}(f)$  και  $\operatorname{Im}(f)$  της συνάρτησης  $f(z) = \operatorname{Log} z$ ,  $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ .



Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

# Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

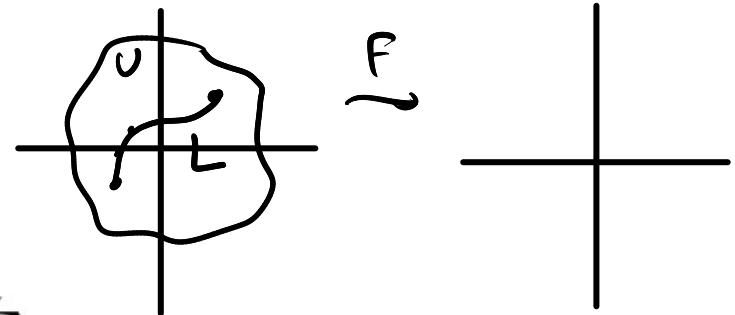
Έστω  $U \subseteq \mathbb{C}$  και  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Έστω επίσης  $L \subset U$  μία καμπύλη πεπερασμένου μήκους, παραμετροποιημένη από τη συνάρτηση  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow L$ , με  $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ . Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_L f(z) dz$$

ορίζεται να είναι το όριο καθώς  $n \rightarrow \infty$ , του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\gamma_k) \frac{\Delta \gamma_k}{\Delta t_k} \Delta t_k$$

όπου  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  είναι μία διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$ .



# Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Ο υπολογισμός επικαμπυλίου ολοκληρώματος με χρήση του ορισμού είναι επίπονος. Στην περίπτωση όπου η παραμετροποίηση  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow L$ , με  $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή να υπάρχουν οι  $x'$ ,  $y'$  και να είναι συνεχείς συναρτήσεις), (ισοδύναμα η καμπύλη να είναι λεία) τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί ως ένα ολοκλήρωμα μιας συναρτήσεως πραγματικής μεταβλητής ως εξής:

$$\int_L f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Στην περίπτωση που το αρχικό και το τελικό σημείο της  $L$  συμπίπτουν, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συμβολίζεται συχνά με το σύμβολο

$$\oint_L f(z) dz,$$

## Σημειώσεις

1. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα το συμβολίζουμε είτε  $\int_L f(z) dz$  είτε  $\int_\gamma f(z) dz$

2. Φανερά:  $\int_\gamma (af(z) + bg(z)) dz = a \int_\gamma f(z) dz + b \int_\gamma g(z) dz$

# Ανεξαρτησία επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την παραμετροποίηση του μονοπατιού

## Θεώρημα (ανεξαρτησία από παραμετροποίηση)

Έστω  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ , ένα μονοπάτι και  $\omega: [\kappa, \lambda] \rightarrow [\alpha, \beta]$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$\omega(\kappa) = \alpha$  και  $\omega(\lambda) = \beta$ . Τότε  $\int_{\gamma \circ \omega} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$ , για κάθε συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\gamma([\alpha, \beta])$ .

## Απόδειξη

Είναι  $\gamma \circ \psi: [\kappa, \lambda] \rightarrow \mathbb{C}$  και  $\int_{\gamma \circ \omega} f(z) dz = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma \circ \omega(t)) (\gamma \circ \omega)'(t) dt = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t))) \gamma'(\omega(t)) \omega'(t) dt$   
 $= \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t))) \gamma'(\omega(t)) d\omega(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$

## Παρατηρήσεις

1. Η συνθήκη  $\omega(\gamma) = \alpha$  και  $\omega(\delta) = \beta$  διασφαλίζει ότι οι  $\gamma$  και  $\gamma \circ \psi$  αποτελούν δύο παραμετροποιήσεις που διατρέχουν την ίδια καμπύλη **με την ίδια φορά**.

2. Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε μονοπάτι περιγράφεται πλήρως από τις εξής τρεις πληροφορίες:

(α) Το ίχνος του ως ένα γεωμετρικό σχήμα,

(β) Τη φορά με την οποία διαγράφεται.

(γ) Το πλήθος των περιστροφών που κάνει (αν είναι κλειστό μονοπάτι).

# Πράξεις με μονοπάτια 1/2

## Ελεύθερη επιλογή πεδίου ορισμού

Το θεώρημα ανεξαρτησίας παραμετροποίησης επιτρέπει να θεωρούμε ως διάστημα ορισμού της παραμετροποίησης ενός μονοπατιού όποιο διάστημα  $[κ, λ]$  επιθυμούμε. Πράγματι, αν  $γ: [α, β] \rightarrow C$ , ένα μονοπάτι, ορίζοντας τη συνάρτηση  $ω: [κ, λ] \rightarrow [α, β]$ , με

$$ω(t) = α + \frac{β - α}{λ - κ}(t - κ),$$

Τότε  $ω(κ) = α$ ,  $ω(λ) = β$ , και η  $γ \circ ω: [κ, λ] \rightarrow C$ , είναι μία παραμετροποίηση του ίδιου μονοπατιού (που αποδίδει το ίδιο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για κάθε συνεχή συνάρτηση που ολοκληρώνεται).

## Πρόσθεση μονοπατιών

Αν  $γ_1, γ_2$  είναι δύο διαδοχικά μονοπάτια, τότε μπορεί να οριστεί το άθροισμα  $γ_1 + γ_2$  ως ένα νέο μονοπάτι με κοινή παραμετροποίηση ως εξής: Αν  $γ_1: [α, β] \rightarrow C$ , επιλέγουμε για το  $γ_2$ , μία παραμετροποίηση της μορφής  $γ_2: [β, λ] \rightarrow C$ , για κάποιο κατάλληλο  $λ \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε  $γ: [α, λ] \rightarrow C$ , ως

εξής:

$$γ(t) = \begin{cases} γ_1(t), & t \in [α, β] \\ γ_2(t), & t \in [β, λ] \end{cases}$$

Φανερά, η  $γ$  περιγράφει την ένωση των δύο ιχνών στο επίπεδο. Γράφουμε  $γ = γ_1 + γ_2$ .

# Πράξεις με μονοπάτια 2/2

## Αντίθετο μονοπάτι

Αν  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ , τότε το μονοπάτι  $-\gamma: [\beta, \alpha] \rightarrow \mathbb{C}$ , με

$$-\gamma(t) = \gamma(\alpha + \beta - t),$$

διατρέχει τα ίδια σημεία του μιγαδικού επιπέδου, αλλά με την αντίθετη φορά.

Αναφορικά με τις πράξεις των μονοπατιών, εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

# Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

## Άσκηση

(α) Να βρεθεί μονοπάτι  $\gamma$  που να συνδέει το 0 με το  $i$  και το  $i$  με το  $1 + i$  (με αυτήν την σειρά).

(β) Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f(z) = z^2$  πάνω στο μονοπάτι  $\gamma$  του (α) ερωτήματος.

## Λύση

# Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

## Άσκηση

(α) Να βρεθεί μονοπάτι  $\gamma$  που να διατρέχει το τρίγωνο με κορυφές  $0, 1, i$  με τη θετική φορά.

(β) Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f(z) = z^*$  πάνω στο μονοπάτι  $\gamma$  του (α) ερωτήματος.

## Λύση

# Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

## Άσκηση

(α) Να βρεθεί μονοπάτι  $\gamma$  που να διατρέχει το τετράγωνο με κορυφές  $0, 1, 1 + i, i$  με τη θετική φορά.

(β) Να βρεθεί το  $\int_{\gamma} z dz$  όπου  $\gamma$  το μονοπάτι του ερωτήματος (α).

## Λύση

# Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

## Άσκηση

Να βρεθεί το  $\int_0^{2\pi} e^{int} dt$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Λύση

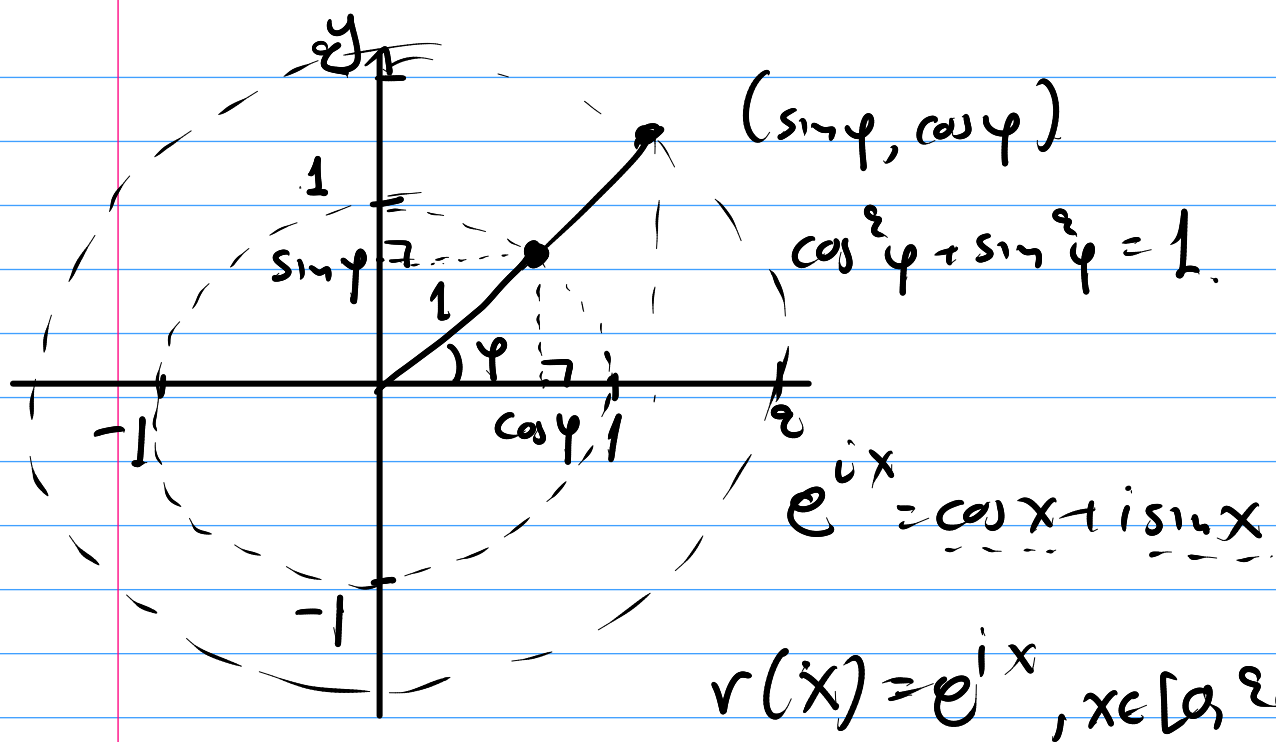
# Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

## Άσκηση

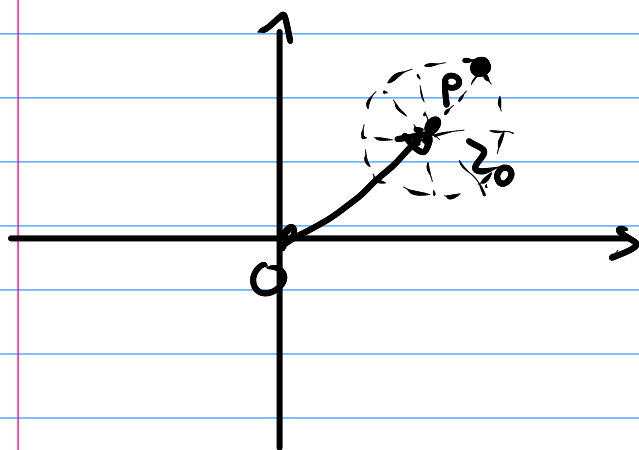
Δείξτε ότι  $\int_{\gamma} P(z) dz = 0$ , για κάθε πολυώνυμο  $P(z)$ , όπου  $\gamma$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

## Λύση

Μήκος μονοπατιού



$$K(0, p) : r(x) = p \cdot e^{ix}, x \in [a, b]$$



$$r(x) = z_0 + p e^{ix}, x \in [a, b].$$

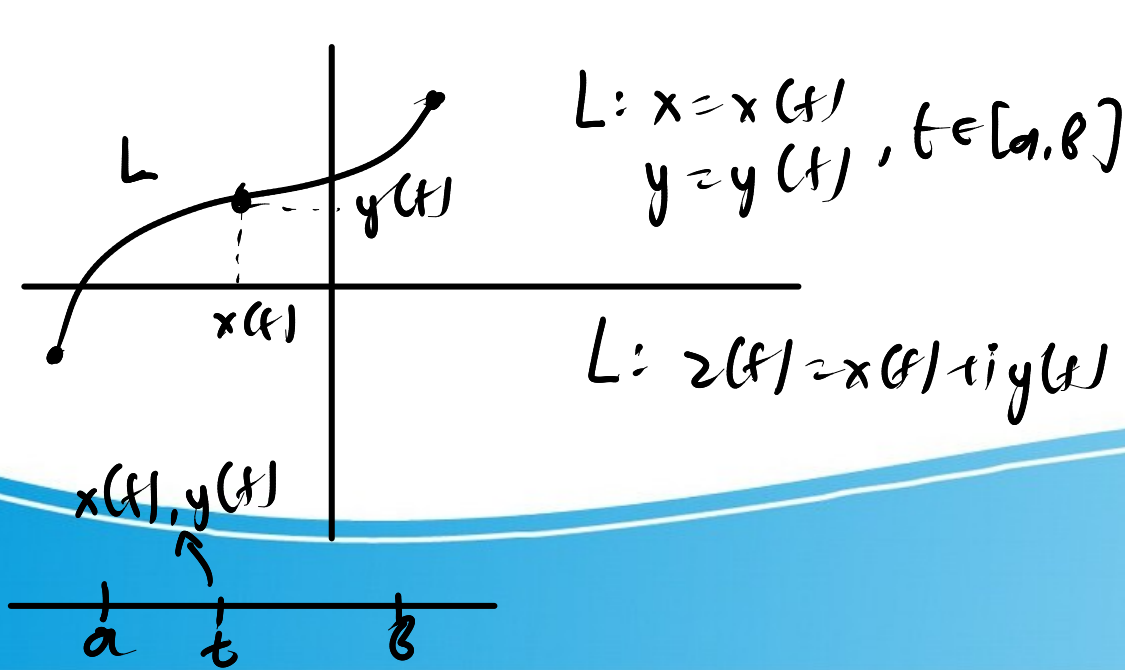
# Μήκος μονοπατιού

Αν  $\gamma(t): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , είναι ένα μονοπάτι στο  $\mathbb{C}$ , τότε το μήκος της καμπύλης που περιγράφεται από αυτό είναι

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

## Παράδειγμα

Επαληθεύστε ότι ο παραπάνω τύπος αποδίδει το σωστό μήκος περιφέρειας για τον κύκλο  $|z - z_0| = r$ .



$$|z - z_0| = r$$

$$z(t) = z_0 + r e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$= \underbrace{x_0 + r \cos \varphi}_{x(t)} + i \underbrace{(y_0 + r \sin \varphi)}_{y(t)}$$

Ακολουθούν ανάλυση ηράζει.

# Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

## Θεώρημα

Έστω  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ , ένα μονοπάτι και  $f$  συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο που περιέχει το  $\gamma([\alpha, \beta])$ . Αν  $|f(z)| \leq M$ , για κάθε  $z \in \mathbb{C} = \gamma([\alpha, \beta])$ , τότε:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

## Απόδειξη

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \ell(\gamma). \end{aligned}$$

# Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

## Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι

Λύση

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{6z^5} dz \right| \leq \frac{\pi e^2}{3}, \text{ όπου } \gamma \text{ ο μοναδιαίος κύκλος. } \gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{6z^5} dz \right| \leq M \cdot l(\gamma), \quad f(z) = \frac{e^{2z}}{6z^5}, \quad M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|.$$
$$\text{Για } z = e^{it}, |f(e^{it})| = \left| \frac{e^{2e^{it}}}{6e^{5it}} \right| = \frac{|e^{2\cos t + i2\sin t}|}{|6e^{5it}|} = \frac{1}{6} |e^{2\cos t}| |e^{i2\sin t}| = \frac{1}{6} e^{2\cos t} \leq \frac{e^2}{6} = M$$

$$\text{Είναι } l(\gamma) = 2\pi, \text{ άρα } \left| \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{6z^5} dz \right| \leq \frac{e^2}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi e^2}{3}.$$

$$|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq M \cdot \ell(\gamma) \quad , \quad M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$$

## Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

### Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι  $\left| \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \right| \leq 2\pi e$  , όπου  $\gamma$  ο μοναδιαίος κύκλος:  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

### Λύση

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \quad , \quad f(z) = \frac{\cos z}{z} \quad \text{Είναι} \quad \left| \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \right| \leq M \cdot \ell(\gamma) = e \cdot 2\pi = 2\pi e$$

$$|f(e^{it})| = \left| \frac{\cos(e^{it})}{e^{it}} \right| = \frac{|\cos(e^{it})|}{|e^{it}| \rightarrow 1} = \frac{1}{2} \left| e^{i \cos t} \cdot e^{-\sin t} + e^{-i \cos t} \cdot e^{\sin t} \right|$$

$$\begin{matrix} \cos t & \nearrow & x+iy & \searrow & \sin t \\ & & \uparrow & & \\ & & iz & & -iz \end{matrix}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^y}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[ |e^{i \cos t}| \cdot e^{-\sin t} + |e^{-i \cos t}| \cdot e^{\sin t} \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} (e + e) = e = \max_{z \in \gamma} |f(z)| \quad \text{άλυτη}$$

$$|e^{i\cos t} \cdot e^{-\sin t} + e^{-i\cos t} \cdot e^{\sin t}| \leq$$

$$\leq \cancel{|e^{i\cos t}|}^1 \cdot |e^{-\sin t}| + \cancel{|e^{-i\cos t}|}^1 \cdot |e^{\sin t}|$$

$$\leq e^{-\sin t} + e^{\sin t} \leq e + e = 2e.$$

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \xrightarrow{\text{exp}} e^{-1} \leq e^{\sin t} \leq e$$

$$-1 \leq -\sin t \leq 1 \xrightarrow{\text{exp}} e^{-1} \leq e^{-\sin t} \leq e$$

# Εκτίμηση μέτρου ολοκληρώματος (ανισότητα ML)

## Πόρισμα

Έστω  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , συνεχής και ότι υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε  $|f(z)| \leq M$ , για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ .  
Αν  $\gamma_R(z) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , τότε, για κάθε  $w \in \mathbb{C}$  είναι:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz = 0.$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right| \leq M' \cdot \ell(\gamma), \quad \ell(\gamma) = 2\pi R.$$

$$\left| \frac{f(z)}{(z-w)^2} \right| \leq \frac{|f(z)|}{(|z|-|w|)^2} \stackrel{z=Re^{it}}{\leq} \frac{M}{(R-|w|)^2} \Rightarrow \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right| \leq \frac{M \cdot 2\pi R}{(R-|w|)^2} \rightarrow 0$$

Συναφή και Απλά συναφή χωρία



# Συναφή και Απλά συναφή χωρία

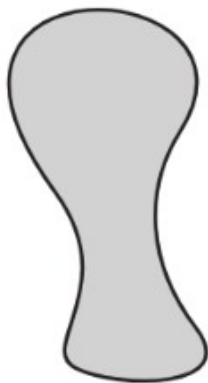
## Ορισμός

Ένα υποσύνολο  $U$  του  $C$ , ονομάζεται **συναφές** αν δεν μπορεί να διαχωριστεί σε δύο (ή παραπάνω) μη κενά σύνολα τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους.

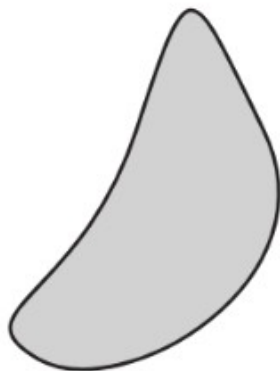
Σημείωση

Δύο σύνολα ονομάζονται ξένα, όταν το κάθε ένα, δεν περιέχει εσωτερικό ή σημείο συσσώρευσης του άλλου.

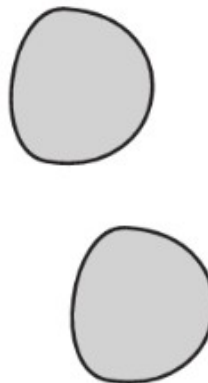
## Παράδειγμα



συναφές



συναφές



όχι συναφές



συναφές

# Συναφή και Απλά συναφή χωρία

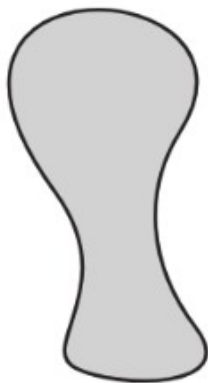
## Ορισμός

Ένα υποσύνολο  $U$  του  $C$ , ονομάζεται **απλά συναφές** αν

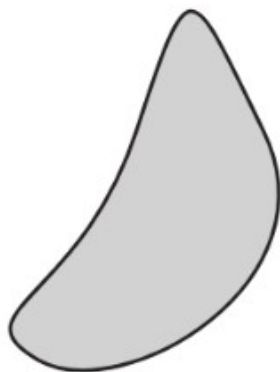
α) Κάθε δύο σημεία μπορούν να συνδεθούν με μία κλειστή καμπύλη.

β) Κάθε κλειστή καμπύλη, μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα σημείο με συνεχή τρόπο.

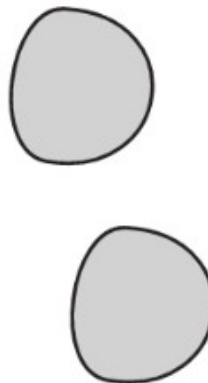
## Παράδειγμα



απλά συναφές



απλά συναφές



όχι απλά συναφές



όχι απλά συναφές

# Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy



# Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

## Θεώρημα

Έστω  $U \subseteq \mathbb{C}$  ένα απλά συναφές ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Αν η  $f$  είναι αναλυτική στο  $U$ , τότε για οποιοδήποτε **απλό κλειστό** μονοπάτι  $\gamma$  σε αυτό, είναι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Σημείωση: Κλειστό μονοπάτι σημαίνει ότι για οποιαδήποτε παραμετροποίηση του της μορφής  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ , είναι  $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$ .

## Παράδειγμα

1. Κάθε πολυώνυμο  $P(z)$  είναι αναλυτική συνάρτηση σε όλο το  $\mathbb{C}$ . Άρα,  $\int_{\gamma} P(z) dz = 0$ , για κάθε απλό κλειστό μονοπάτι  $\gamma$  στο  $\mathbb{C}$ .

2. Αν  $\gamma$  το μονοπάτι που διατρέχει την περίμετρο του κύκλου  $|z - 2| = 1$ , τότε

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0, \int_{\gamma} \ln z dz = 0, \int_{\gamma} \sin z dz = 0.$$

$$\int e^{\cos z - \frac{1}{z}} dz = 0 \quad \text{θ.ε.}$$

$$|z - 5| = 1$$

# Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

## Απόδειξη ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} (u + iv)(dx + i dy) = \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy)$$

$$\oint_{\gamma} (u dx - v dy) = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Θεώρημα Green})$$

$$\oint_{\gamma} (v dx + u dy) = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Θεώρημα Green})$$

$$\iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (\text{Εξισώσεις Cauchy - Riemann})$$

$$\iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{Εξισώσεις Cauchy - Riemann})$$

# Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

## Πόρισμα

Έστω  $U$  απλά συναφές χωρίο και  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , αναλυτική συνάρτηση. Τότε, για κάθε  $z_1, z_2 \in U$ , το ολοκλήρωμα

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz,$$

είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης, δηλαδή έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το μονοπάτι που θα επιλεγθεί για να διατρέξει τη διαδρομή από το σημείο  $z_1$  στο σημείο  $z_2$ .

## Απόδειξη

# Ερμηνεία του ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy 1/2

Το συμπέρασμα του ολοκληρωτικού θεωρήματος φαίνεται κάπως παράδοξο σε σχέση με την έννοια της ολοκλήρωσης στις πραγματικές συναρτήσεις, όπου η βασική ερμηνεία ενός ολοκληρώματος ήταν αυτή του εμβαδού ενός χωρίου, που στη γενική του περίπτωση είναι διάφορο του μηδενός. Η κατάσταση διαφωτίζεται αν κάποιος αναγνωρίσει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως τη “μετατόπιση” στο πεδίο της εικόνας  $F(U)$ , ( $F$  η αντιπαράγωγος της  $f$ ) που προκύπτει από τη μετατόπιση κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma$  στο πεδίο ορισμού  $U$ . Δηλαδή, αν  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ , ένα μονοπάτι, τότε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} [F(\gamma(t))]' dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$$

Έτσι, αν κάνει “κύκλο” η καμπύλη στο πεδίο ορισμού ( $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ ), τότε η μετατόπιση στο πεδίο της αντιπαράγωγου θα είναι 0:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0.$$

# Ερμηνεία του ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy 2/2

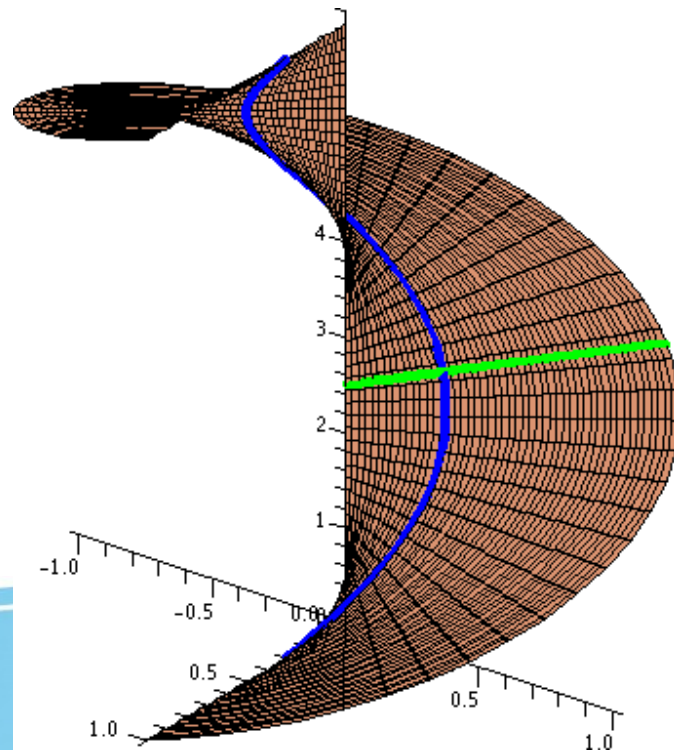
Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι αναλυτική, τότε δεν υπάρχει αντιπαράγωγος που να είναι με βεβαιότητα συνεχής συνάρτηση και το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

έχει συμπεριφορά που προσδιορίζεται από την “τοπική” μορφή της αντιπαράγωγου, όπου αυτή υπάρχει. Ενδεικτικά, αν θεωρήσουμε την  $f(z) = 1/z$ , τον κύκλο  $C: |z| = 1$ , και τις καμπύλες  $\gamma_{\varepsilon}: [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \rightarrow C$  με  $\gamma_{\varepsilon}(t) = e^{i(t-\pi)}$ , τότε ο κύκλος  $|z| = 1$ , είναι το όριο των  $\gamma_{\varepsilon}$  καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Υπολογίζουμε

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{z} dz = \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \frac{\gamma'_{\varepsilon}(t)}{\gamma_{\varepsilon}(t)} dt = 2\pi i - 2\varepsilon.$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε αυτήν τη διαφορά ως τη “μετατόπιση” που προκύπτει στις τιμές της αντιπαράγωγου της  $1/z$  στο  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ , η οποία δεν είναι άλλη παρά ο λογάριθμος  $\ln z$  στο  $C - (-\infty, 0]$ .



# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

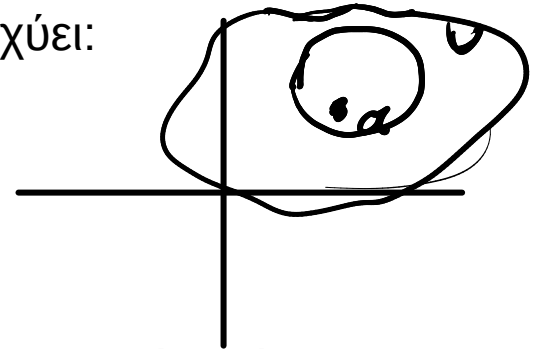


# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

## Θεώρημα

Έστω  $U$  ένα ανοιχτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου  $C$  και έστω ότι  $D \subseteq U$ , όπου  $D = \{z: |z - z_0| \leq r\}$ . Έστω  $f: U \rightarrow C$  μια αναλυτική συνάρτηση και έστω  $\gamma$  το μονοπάτι  $\partial D$ , θετικά προσανατολισμένο. Τότε, για κάθε  $a \in D^\circ = \{z: |z - z_0| < r\}$  ισχύει:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$



## Πόρισμα

Με τις ίδιες προϋποθέσεις του ολοκληρωτικού τύπου, αποδεικνύεται επιπλέον, ότι υπάρχουν οι παράγωγοι  $n$  – τάξης και ισχύει:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

## Απόδειξη ολοκληρωτικού τύπου Cauchy

Σημείωση:

Από το Θεώρημα Cauchy, μπορούμε να δεχθούμε πως ο δίσκος  $D$  έχει κέντρο το  $a$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left( \frac{f(z(t)) - f(a)}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon e^{it} i \right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z(t)) - f(a)|}{\varepsilon} \varepsilon dt \\ &\leq \max_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - f(a)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z-a} dz = 1$$

# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το  $\int_C \frac{z+1}{z-1} dz$ , όπου  $C$  ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 2 και ακτίνα 3.

## Λύση

# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το  $\int_C \frac{z+1}{z-1} dz$ , όπου  $C$  ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο  $0$  και ακτίνα  $\frac{1}{2}$ .

## Λύση

# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το  $\int_C \frac{e^z + z}{z^2} dz$ , όπου  $C$  ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο  $0$  και ακτίνα  $1$ .

## Λύση

# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το  $\int_C \left( \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz$ , όπου  $C$  ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 2 και ακτίνα 3.

## Λύση

Είναι 
$$\int_C \left( \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = \int_C \frac{1}{z-2} dz + \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = I_1 + I_2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = 1$ , και παρατηρούμε ότι αυτή είναι αναλυτική σε όλο το  $C$ , άρα και στο εσωτερικό του δίσκου  $C$ . Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$I_1 = \int_C \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i.$$

και

$$I_2 = \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(2) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι 
$$\int_C \left( \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = 2\pi i.$$

# Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

## Παράδειγμα

Αν  $C$  ο μοναδιαίος κύκλος θετικά προσανατολισμένος, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz$

**Λύση**  
Είναι  $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz = \int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} dz$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = z^4/8$ , και παρατηρούμε ότι αυτή

είναι αναλυτική σε όλο το  $C$ , άρα και στο εσωτερικό του δίσκου  $C$ . Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$\int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} dz = \int_C \frac{f(z)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} = \pi i f^{(2)}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Είναι  $f'(z) = z^3/2$ ,  $f^{(2)}(z) = 3z^2/2$ , άρα  $f^{(2)}(-1/2) = 3(-1/2)^2/2 = 3/8$ , και  $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz = \frac{3\pi i}{8}$ .

# Ανάλυση σε απλά κλάσματα 1/2

|                     |                                                                                                                                              |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ax + b$            | $\frac{A}{ax + b}$                                                                                                                           |
| $(ax + b)^k$        | $\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}, k = 1, 2, 3, \dots$                                           |
| $ax^2 + bx + c$     | $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$                                                                                                               |
| $(ax^2 + bx + c)^k$ | $\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}, k = 1, 2, 3, \dots$ |

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$$

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

$$3x + 11 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

## Ανάλυση σε απλά κλάσματα 2/2

$$\frac{x^2 + 4}{x(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-2}$$

$$\frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

1. Αν  $\gamma$  η περίμετρος του κύκλου  $|z| = 1/2$ , που διαγράφεται μία φορά, με θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz.$$

**Λύση**

# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

2. Αν  $\gamma$  ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 2 που διαγράφεται μία φορά κατά τη θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{\gamma} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz$ .

**Λύση**

# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

3. Αν  $\gamma$  ο κύκλος  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ , που διαγράφεται μία φορά με θετική φορά, να υπολογιστεί το  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ .

**Λύση**

$$\int f(z) dz$$

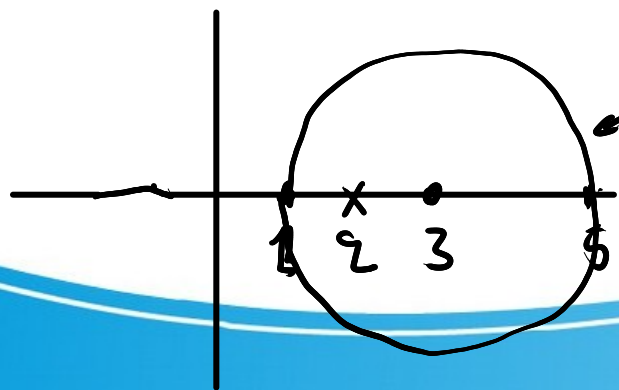
# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

4. Αν  $\gamma(\theta) = 3 + 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{\gamma} \frac{2z^2 + 1 + z^3}{(z-2)^2} dz$ .

Λύση

$$\int_{\gamma} \frac{2z^2 + 1 + z^3}{(z-2)^2} dz = \int \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(2) = 40\pi i.$$

$$f(z) = 2z^2 + 1 + z^3 \Rightarrow f'(z) = 4z + 3z^2 \Rightarrow f'(2) = 20$$



$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a) \Leftrightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}$$

T. Cauchy

$$\gamma(\theta) = 3 + 2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1 + z^3}{(z-1)^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{2\gamma(\theta)^2 + 1 + \gamma(\theta)^3}{(1+2e^{i\theta})^2} \cdot 2ie^{i\theta} d\theta$$

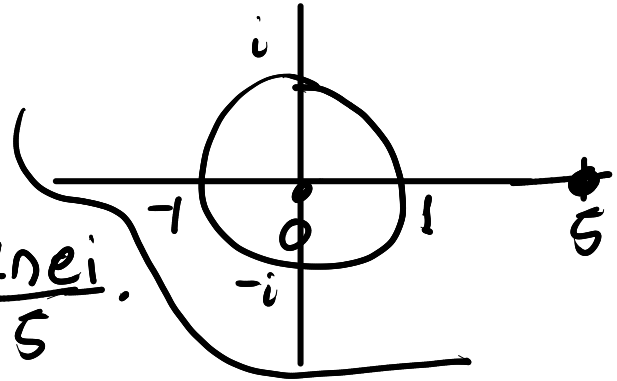
# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

5. Αν  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{\gamma} \frac{e^{\cos z^2}}{z^2 - 5z} dz$ .

Λύση

$$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\cos z^2}}{z^2 - 5z} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i \cdot f(0) = -\frac{2\pi e i}{5}.$$



$$f(z) = \frac{e^{\cos z^2}}{z(z-5)} = \frac{\frac{e^{\cos z^2}}{z-5}}{z} = \frac{f(z)}{z}, f(0) = \frac{e^{\cos 0^2}}{0-5} = -\frac{e}{5}$$

$$\left[ \frac{e^{\cos z^2}}{z \cdot (z-5)}, \quad \frac{1}{z \cdot (z-5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-5} \right]$$

$$\int \frac{e^{\cos z^2}}{z \cdot (z-5)} dz = A \int \frac{e^{\cos z^2}}{z} dz + B \int \frac{e^{\cos z^2}}{z-5} dz \rightarrow 0$$


---

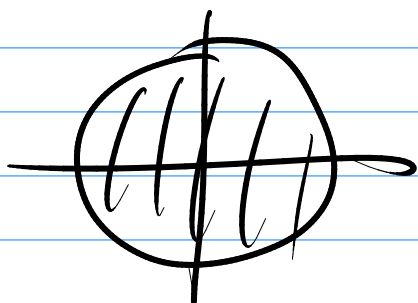
$$|e^{ia}| = |\cos a + i \sin a| = \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a} = 1$$

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

$$e^{i\pi k} = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} \iint_R f(x,y) dx dy \\ \text{①} \\ x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{array} \right.$$

$$dx dy = J(v,t) dv dt$$



# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

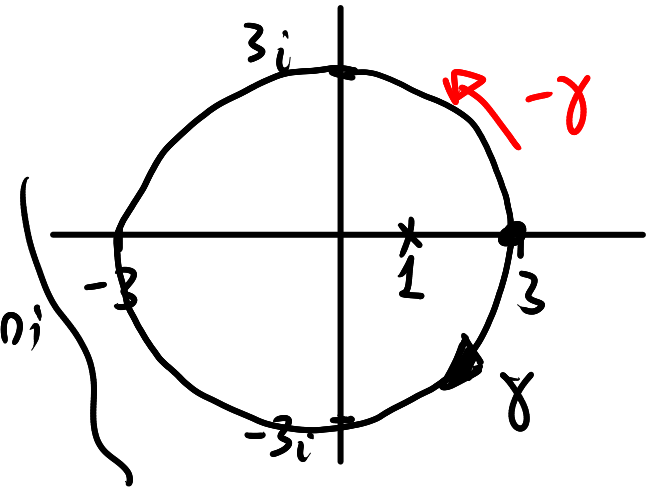
6. Αν  $\gamma(t) = 3e^{-it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{\gamma} \frac{z^3 + 1}{z - 1} dz$ .

Λύση

$$\gamma(t) = 3e^{-it}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \frac{z^3 + 1}{z - 1} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - 1} dz = -2\pi i \cdot f(1) = -4\pi i$$

$$f(z) = z^3 + 1 \Rightarrow f(1) = 2$$



# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

7. Αν  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , να υπολογιστεί το  $\int_{\gamma} \frac{1}{1-3z} dz$ .

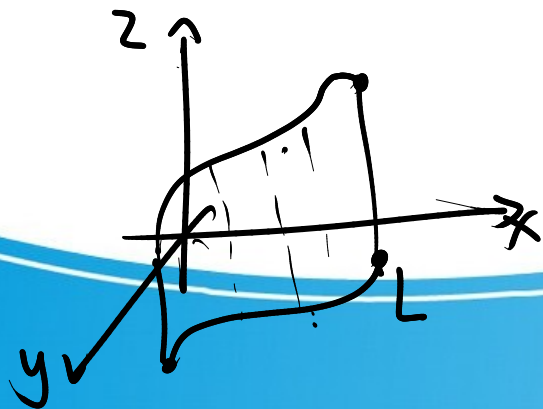
Λύση

$$\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1-3z} dz = -\frac{1}{3} \int_{\gamma} \frac{1}{z-\frac{1}{3}} dz = -\frac{1}{3} \cdot 2\pi i = -\frac{2\pi i}{3}$$

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



# Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

8. Αν  $\gamma$  η περιφέρεια του κύκλου  $|z - 1| = 3/2$  (θετική φορά), να υπολογιστεί το  $\int_{\gamma} \frac{(z - 3)^3}{z^4 + 4z^3 + z^2} dz$ .

**Λύση**

# Ανάπτυγμα αναλυτικής συνάρτησης σε δυναμοσειρά



# Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Κάθε αναλυτική συνάρτηση αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμοσειρά και αντίστροφα, κάθε δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση.

## Θεώρημα

Έστω  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Αν η  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D(z_0, r)$ , τότε υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης στο  $z_0$  και η  $f$  έχει αναπαράσταση της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r,$$

Όπου

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η αναπαράσταση αυτή της  $f$  καλείται **σειρά Taylor της  $f$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $r$ .**

# Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Ισχύει και το αντίστροφο.

## Θεώρημα

Αν  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ ,  $|z - z_0| < r$ , για κάθε  $z \in D(z_0, r)$ , τότε η  $f$  είναι αναλυτική και

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < r,$$

Δηλαδή: Μπορούμε να παραγωγίσουμε μια δυναμοσειρά σαν να ήταν πολυώνυμο.

Επιπλέον, οι συντελεστές μίας συντελεστές ενός αναπτύγματος Taylor είναι μοναδικοί.

## Θεώρημα

Αν υπάρχει  $r > 0$ , τέτοιο ώστε  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ ,  $|z - z_0| < r$ , για κάθε  $z \in D(z_0, r)$ , τότε

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

# Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 της  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+i}$ .

Λύση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z-i) \cdot (z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{(A+B)z + i(A-B)}{z^2 + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B=-A \\ 2A=1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i} \frac{1}{1-\frac{z}{i}} = -\frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{i}\right)^n \\ \frac{1}{z+i} = \frac{1}{i} \frac{1}{1+\frac{z}{i}} = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n \end{array} \right.$$

# Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

## Παράδειγμα

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 της  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ .

## Λύση

Η  $f$  ορίζεται και είναι αναλυτική στο  $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ . Επιλέγουμε τον ανοικτό δίσκο  $D(0, 1)$  ως το μεγαλύτερο δίσκο με κέντρο 0 που βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της. Για  $z \in D(0, 1)$  είναι

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = -\frac{i}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{i}{2} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{i}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{i}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n, \quad |\lambda| < 1.$$

Καθώς, οι συντελεστές Taylor είναι μοναδικοί, η παραπάνω σειρά είναι υποχρεωτικά η σειρά Taylor της  $f$ .

## Σημείωση

Φανερά, η παραπάνω επιλογή είναι προτιμότερη από τη χρήση του ορισμού της δυναμοσειράς και τον άμεσο υπολογισμό των  $f^{(n)}(0)$ .

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad | -z^2 | < 1 \Leftrightarrow |z| < 1.$$

# Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

## Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{1-3z}$ . (α) Να αποδείξετε ότι  $f^{(n)}(z) = \frac{3^n n!}{(1-3z)^{n+1}}$ .

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της  $f$  γύρω από το 0. (ανάπτυγμα MacLaurin)

(γ) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor.

## Λύση (α)

$$f(z) = \frac{1}{1-3z} \Rightarrow f'(z) = -1 \cdot (1-3z)^{-2} \cdot (-3) = -(-3) \cdot (1-3z)^{-2}$$

$$f''(z) = (-1)(-2) \cdot (1-3z)^{-3} \cdot (-3)^2$$

$$f'''(z) = (-1)(-2)(-3) \cdot (1-3z)^{-4} \cdot (-3)^3$$

$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = (-1)(-2) \dots (-n) \cdot (1-3z)^{-(n+1)} \cdot (-3)^n$$
$$= (-1)^n \cdot n! \cdot (1-3z)^{-(n+1)} \cdot (-1)^n \cdot 3^n = \frac{3^n \cdot n!}{(1-3z)^{n+1}}$$

# Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$$

## Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{1-3z}$ . (α) Να αποδείξετε ότι  $f^{(n)}(z) = \frac{3^n n!}{(1-3z)^{n+1}}$ .

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της  $f$  γύρω από το 0.

(γ) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor.

Λύση (β)

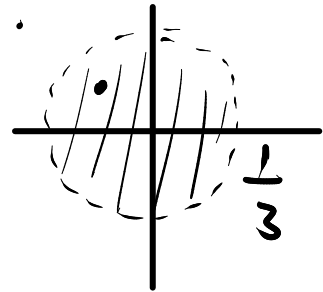
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{3^n \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 3^n$$

Αρα,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$  : ανάπτυγμα Maclaurin.

Αρα, χωρίς σύγκλιση

$$|z| < \frac{1}{3}.$$

Κριτήριο ρίθας:  $\rho = \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{3^n} \rightarrow 3 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}$  ακτίνα σύγκλισης.



# Μεμονωμένες Ανωμαλίες

## Ορισμός

Λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει **μεμονωμένη ανωμαλία** στο σημείο  $z_0$ , αν

- (i) Η  $f$  δεν ορίζεται στο  $z_0$ , και
- (ii) Υπάρχει  $r > 0$ , τέτοιο ώστε η  $f$  να είναι αναλυτική στο  $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$ .

## Παραδείγματα

- Το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της  $1/z$ .
- Το  $i$  και το  $-i$  είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της  $1/(z^2 + 1)$ .
- Τα σημεία  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της  $1/\sin z$ .
- Το 0 δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία της  $\text{Log } z$  γιατί η συνάρτηση αυτή δεν είναι αναλυτική σε καμία περιοχή της μορφής  $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$ , για κάποιο  $r > 0$ .