

Άσκηση 1.7.1

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$(x^2 - xy^2)dx + (y^2 - x^2y)dy = 0$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Έχουμε

$$P(x, y) = x^2 - xy^2 \quad \text{και} \quad Q(x, y) = y^2 - x^2y.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - xy^2) = -2xy$

και $\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (y^2 - x^2y) = -2xy,$

δηλαδή $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = x^2 - xy^2$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = x^2 - xy^2 \Rightarrow g(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2y}{2} + \varphi(y)$$

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = y^2 - x^2y$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = y^2 - x^2y \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \varphi'(y) = y^2 - x^2y \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = y^2 - x^2y + \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2y}{2} + c.$$

Άρα

$$g(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2y}{2} + c \Rightarrow$$

$$g(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2y^2}{2} + c.$$

Άσκηση 1.7.2

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$(x - y)dx + (-x + y + 2)dy = 0$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Έχουμε

$$P(x, y) = x - y \quad \text{και} \quad Q(x, y) = -x + y + 2.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (x - y) = -1$

και $\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (-x + y + 2) = -1,$

δηλαδή $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = x - y$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = x - y \Rightarrow g(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y)$$

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = y^2 - x^2 y$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = -x + y + 2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y) \right) = -x + y + 2 \Rightarrow$$

$$-x + \varphi'(y) = -x + y + 2 \Rightarrow \varphi'(y) = y + 2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + 2y + c.$$

Άρα

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy + 2y + c.$$

Άσκηση 1.7.3

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$(y + \cos x)dx + (x + \sin y)dy = 0$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Έχουμε

$$P(x, y) = y + \cos x \quad \text{και} \quad Q(x, y) = x + \sin y .$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (y + \cos x) = 1$

και $\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (x + \sin y) = 1 ,$

δηλαδή $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = y + \cos x$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = y + \cos x \Rightarrow g(x, y) = xy + \sin x + \varphi(y)$$

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = x + \sin y$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = x + \sin y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (xy + \sin x + \varphi(y)) = x + \sin y \Rightarrow$$

$$x + \varphi'(y) = x + \sin y \Rightarrow \varphi'(y) = \sin y \Rightarrow \varphi(y) = -\cos y + c .$$

Άρα

$$g(x, y) = xy + \sin x - \cos y + c .$$

Άσκηση 1.7.4

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{2xy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \\ (x^2 + y^2) dy &= (-2xy) dx \Rightarrow \\ (2xy) dx + (x^2 + y^2) dy &= 0 \Rightarrow \\ 2xy dx + x^2 dy + y^2 dy &= 0 \Rightarrow \\ d(x^2 y) + y^2 dy &= 0 \Rightarrow \\ \int d(x^2 y) + \int y^2 dy &= 0 \Rightarrow \\ x^2 y + \frac{y^3}{3} &= c.\end{aligned}$$