

Άσκηση 1.5.1

[Μν-Σχ 27/1.11]

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' = \frac{3}{x}y - \frac{1}{3}x^4\sqrt[3]{y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$$

οπότε είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$,

προκύπτει $y^{\frac{1}{3}}y' - \frac{3}{x}yy^{\frac{1}{3}} = x^4.$

Θέτουμε $\boxed{u = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow u' = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' \Rightarrow \boxed{y^{\frac{1}{3}}y' = \frac{3}{2}u'}.$

Οπότε η ΔΕ γράφεται $\frac{3}{2}u' - \frac{3}{x}u = x^4 \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = \frac{2}{3}x^4.$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική. Συνεπώς

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int\left(\frac{2}{x}\right)dx} \left[c + \int \frac{2}{3}x^4 e^{\int\left(\frac{2}{x}\right)dx} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{\ln x^2} \left[c + \int \frac{2}{3}x^4 e^{-\ln x^2} dx \right] \Rightarrow \\ &= x^2 \left[c + \int \frac{2}{3}x^2 dx \right] \Rightarrow \\ &= x^2 \left[c + \frac{2}{9}x^3 \right] \Rightarrow \\ &= cx^2 + \frac{2}{9}x^5 \end{aligned}$$

Άρα $y(x) = \left[cx^2 + \frac{2}{9}x^5 \right]^{\frac{3}{2}}.$

Άσκηση 1.5.2

Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-2}$

προκύπτει $y^{-2}y' - y^{-2}y = x.$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} u(x) &= y^{1-n} \Rightarrow u(x) = y^{1-2} \Rightarrow \boxed{u(x) = y^{-1}} \\ \Rightarrow u'(x) &= -y^{-2}y' \Rightarrow \boxed{y^{-2}y' = -u'(x)} \end{aligned}$$

Οπότε η ΔΕ γράφεται $-u'(x) - u(x) = x \Rightarrow u'(x) + u(x) = -x.$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική. Συνεπώς

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int dx} \left[c + \int (-x)e^{\int dx} dx \right] \\ &= e^{-x} \left[c - \int xe^x dx \right] \\ &= e^{-x} \left[c - xe^x + e^x \right] \\ &= ce^{-x} - x + 1. \end{aligned}$$

Επομένως $y^{-1} = ce^{-x} - x + 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{ce^{-x} - x + 1}$

Όμως $y(0) = 1$. Οπότε $1 = \frac{1}{ce^{-0} - 0 + 1} \Rightarrow c = 0$

Άρα $y(x) = \frac{1}{1-x}.$

Άσκηση 1.5.3

Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$y' = xy^3 + xy, \quad y(0) = 1.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται $y' - xy = xy^3$

συνεπώς είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-3}$

προκύπτει $y^{-3}y' - y^{-3}xy = y^{-3}xy^3 \Rightarrow y^{-3}y' - xy^{-2} = x.$

Θέτουμε $u(x) = y^{1-n} \Rightarrow u(x) = y^{1-3} \Rightarrow \boxed{u(x) = y^{-2}}$
 $\Rightarrow u'(x) = -2y^{-3}y' \Rightarrow \boxed{y^{-3}y' = -2/u'(x)}$

Οπότε η ΔΕ γράφεται $-\frac{1}{2}u'(x) - xu(x) = x \Rightarrow u'(x) + 2xu(x) = -2x \Rightarrow .$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική. Συνεπώς

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int 2x dx} \left[c + \int (-2x)e^{\int 2x dx} dx \right] \\ &= e^{-x^2} \left[c - \int 2xe^{x^2} dx \right] \\ &= e^{-x^2} \left[c - e^{x^2} \right] \\ &= ce^{-x^2} - 1. \end{aligned}$$

Επομένως $y^{-2} = ce^{-x^2} - 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt{ce^{-x^2} - 1}}$

Όμως $y(0) = 1$. Οπότε $1 = ce^0 - 1 \Rightarrow c = 2$

Άρα $y(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x^2} - 1}}.$

Άσκηση 1.5.4

Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^3, \quad y(1) = 1.$$

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-3}$

προκύπτει
$$y^{-3}y' - y^{-3}\frac{1}{x}y = y^{-3}\frac{1}{x^2}y^3 \Rightarrow y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Θέτουμε
$$u(x) = y^{1-n} \Rightarrow u(x) = y^{1-3} \Rightarrow \boxed{u(x) = y^{-2}}.$$
$$\Rightarrow u'(x) = -2y^{-3}y' \Rightarrow \boxed{y^{-3}y' = -\frac{1}{2}u'(x)}$$

Οπότε η ΔΕ γράφεται
$$-\frac{1}{2}u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u'(x) + \frac{2}{x}u(x) = -\frac{2}{x^2}.$$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική. Συνεπώς

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int \left(\frac{2}{x}\right) dx} \left[c + \int \left(-\frac{2}{x^2}\right) e^{\int \left(\frac{2}{x}\right) dx} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{-2 \ln x} \left[c - 2 \int \frac{1}{x^2} e^{2 \ln x} dx \right] \Rightarrow \\ &= x^{-2} \left[c - 2 \int dx \right] \Rightarrow \\ &= x^{-2} (c - 2x) \end{aligned}$$

Επομένως
$$y^{-2} = x^{-2} (c - 2x) \Rightarrow y(x) = \frac{x}{\sqrt{(c - 2x)}}$$

Όμως $y(1) = 1$. Οπότε
$$1 = \frac{1}{\sqrt{c - 2}} \Rightarrow c - 2 = 1 \Rightarrow c = 3$$

Άρα
$$y(x) = \frac{x}{\sqrt{3 - 2x}}.$$

Άσκηση 1.5.5

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{1}{3}xy^{-1}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-(-1)} = y$,

προκύπτει $yy' - \frac{1}{3x}y^2 = \frac{1}{3}x.$

Θέτουμε

$$u = y^{1-(-1)} \Rightarrow u = y^{1+1} \Rightarrow \boxed{u = y^2}$$

$$\Rightarrow u' = 2yy' \Rightarrow \boxed{yy' = \frac{1}{2}u'}.$$

Οπότε η ΔΕ γράφεται $\frac{u'}{2} - \frac{1}{3x}u = \frac{1}{3}x \Rightarrow u' - \frac{2}{3x}u = \frac{2}{3}x.$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική. Συνεπώς

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int \left(-\frac{2}{3x}\right) dx} \left[c + \int \frac{2}{3} x e^{\int \left(-\frac{2}{3x}\right) dx} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{\frac{2}{3} \ln x} \left[c + \int \frac{2}{3} x e^{-\frac{2}{3} \ln x} dx \right] \Rightarrow \\ &= x^{\frac{2}{3}} \left[c + \int \frac{2}{3} x x^{-\frac{2}{3}} dx \right] \Rightarrow \\ &= x^{\frac{2}{3}} \left[c + \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{3}} dx \right] \Rightarrow \\ &= x^{\frac{2}{3}} \left[c + \frac{2}{3} \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right] \Rightarrow \\ &= x^{\frac{2}{3}} \left[c + \frac{1}{2} x^{\frac{4}{3}} \right]. \end{aligned}$$

Άρα

$$y(x) = x^{\frac{1}{3}} \left[c + \frac{1}{2} x^{\frac{4}{3}} \right].$$