

-1-

Σειρές και Μετασχηματισμοί Fourier

Έστω το σύνολο των συναρτήσεων συνεχών $g_n(x)$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι το σύνολο $\{g_n(x)\}$ είναι ορθομοναδιαίο σύστημα στο $[a, b]$ εάν

$$\int_a^b g_n(x) g_m(x) dx = 0 \text{ όταν } m \neq n \text{ και } \int_a^b (g_n(x))^2 dx = 1$$

Παράδειγμα Έστω το διάστημα $[-L, L]$

Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n=1, 2, \dots \right\}$$

είναι ορθομοναδιαίο στο διάστημα $[-L, L]$.

Ορισμός Έστω $PC[a, b]$ ο χώρος των συνεχών κατ' τμήματα συναρτήσεων στο $[a, b]$. Θεωρούμε

ένα ορθομοναδιαίο σύστημα $\{g_n(x)\}$ στο $[a, b]$.

Θα λέμε ότι το σύστημα $\{g_n(x)\}$ αποτελεί

βάση εάν και μόνο εάν κάθε συνάρτηση

$f \in PC[a, b]$ γραφεται κατ' μοναδικό τρόπο

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$ καλείται σειρά Fourier της f .

Παρατήρηση Η θεωρία των σειρών Fourier είναι μια φυσική γενίκευση της μοναδικής παράστασης διανύσματος $\bar{u}$ που ανήκει στον διανυσμ. χώρο $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R} \right\}, n \in \mathbb{N}$

ω προς την ορθομοναδιαία βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$,
 $\bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Γράφουμε $\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i \bar{e}_i, c_i \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα το ορθομοναδιαίο σύστημα στο $[-L, L]$ του προηγούμενου Παραδείγματος.

Έστω επίσης μια συνάρτηση $f \in PC([-L, L])$.

και

$$f(x) = a_0' \frac{1}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n' \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

τότε

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$a_0' = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n' = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{και}$$

$$b_n' = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Οι παραπάνω εκθέσεις μπορούν να γραφούν

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Το παραπάνω Θεώρημα μας λέει τότε για συνάρτηση $f \in PC[-L, L]$ ευαλίνει στη σειρά Fourier.

Θεώρημα Έστω μια συνάρτηση f περιόδου $2L$ ($f(x+2L)=f(x)$), συνεχής κατά τμήματα με πεπερασμένο πλήθος μεγίστων και ελαχίστων στο $[-L, L]$. Τότε η

αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(x)$ στα σημεία συνέχειας της f . Εάν x_0 είναι σημείο ασυνέχειας η σειρά Fourier συγκλίνει

στον αριθμό $\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right)$.

Οι παραπάνω συνθήκες λέγονται συνθήκες Dirichlet

Άσκηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Να βρείτε την σειρά Fourier της f .

Λύση Είναι προφανές ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος. Έδω $[-L, L] = [-\pi, \pi]$

Η σειρά Fourier είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 dx + \int_{-\pi}^0 2 dx \right] = \frac{1}{\pi} \cdot 3\pi = 3.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos(nx) dx + \int_{-\pi}^0 2 \cos(nx) dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + 2 \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(nx) dx + \int_{-\pi}^0 2 \sin(nx) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \left[\cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n} \left[\cos(nx) \right]_{-\pi}^0 \right] =$$

$$\frac{1}{n\pi} \left[-\cos(n\pi) + 1 + 2\cos(n\pi) - 2 \right] =$$

$$\frac{1}{n\pi} \left[-1 + \cos(n\pi) \right] = \frac{1}{n\pi} \left((-1)^n - 1 \right).$$

Επομένως η σειρά Fourier είναι

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left((-1)^n - 1 \right) \sin(nx)$$

Σε κάθε σημείο συνέχειας η $f(x)$
συνverγει στην σειρά Fourier δηλ.

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left((-1)^n - 1 \right) \sin(nx)$$

Ενώ εάν x_0 σημείο ασυνέχειας η σειρά

Fourier συνverγει στο $\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$

π.χ. στο $x_0 = 0$ η σειρά συνverγει

στο $\frac{3}{2}$.

Άσκηση Να βρεθεί η σειρά Fourier της
 συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$$

Έπειτα να δείξετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Λύση: Η f είναι κατά τηλέωρα συνεχής, έχει πεπερασμένο πλήθος μεγίστων, ελαχίστων και περιόδου περιόδου 4. Άρα το ανώτακτο Fourier συγκλίνει στην $f(x)$ στα σημεία συνέχειας. Έχουμε

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx =$$

-8-

$$\frac{1}{2} \frac{2}{n\pi} \left[x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^2 = \frac{2}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{1}{2} \frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right)' dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \left[x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^2 + \frac{1}{n\pi} \frac{2}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^2$$

$$= -\frac{2}{n\pi} (-1)^n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

Αρα η $f(x)$ στα ενήλικα σημεία της ταυνοειδούς
την εκδοχή

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Εάν x_0 είναι σημείο αωδότητας η σειρά Fourier συρλίνει στην τιμή $\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right)$

Παίρνουμε $x_0 = 0$. Η $f(x)$ ωωχής στο $x_0 = 0$.

$$\text{Άρα έχουμε } 0 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 \pi^2} (-2) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Παρατήρηση: Η f στο σημείο $x_0 = 2$ έχει αωδότητα. Άρα η σειρά Fourier συρλίνει στο $\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right) = \frac{1}{2} (0 + 2) = 1$.

Άρα έχουμε

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos(n\pi) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \left((-1)^n - 1 \right) (-1)^n \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Σειρά Fourier άρτιων και περιττών
 συναρτήσεων.

Πρόταση Έστω η $f(x)$ είναι άρτια
 συνάρτηση δηλ. $f(x) = f(-x)$. Θεωρούμε ότι
 η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του προηγούμενου
 θεωρήματος. Τότε στα σημεία συνέχειας
 της $f(x)$ έχουμε

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ είναι περιττή δηλ.
 $f(x) = -f(-x)$. Τότε στα σημεία συνέχειας της
 $f(x)$ έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Άσκηση: Έστω

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Λύση: Προφανώς ισχύει $f(x) = -f(-x)$

Άρα είναι περιττή. Επομένως στα σημεία συνέχειας της $f(x)$ έχουμε

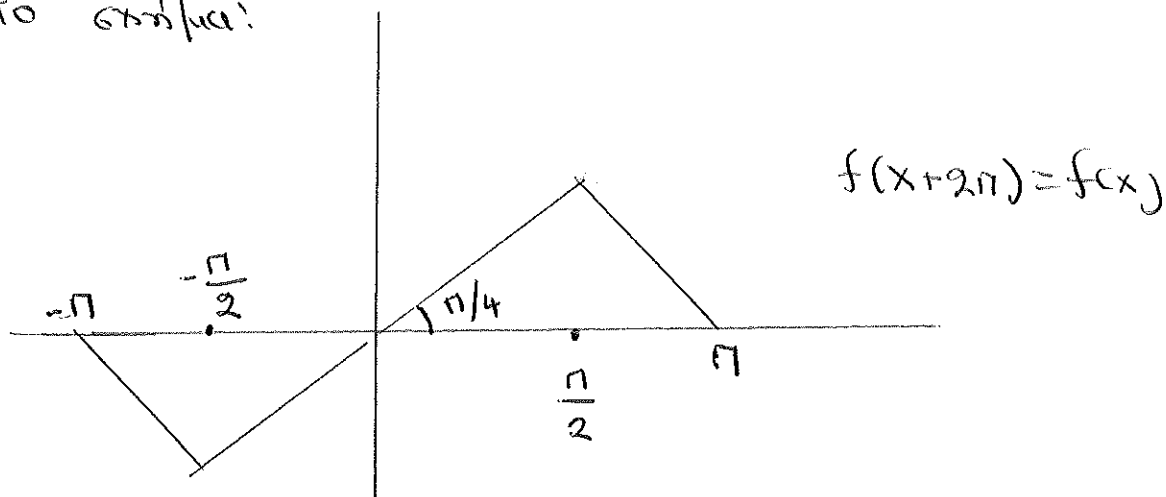
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

$$\text{Άρα } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin(nx)$$

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση $f(x)$ που δίνεται από το σχήμα:



Να βρεθεί το αντίστοιχο Fourier.

Λύση: Προφανώς η $f(x)$ είναι περιττή συνλ.

$f(x) = -f(-x)$ Θα βρούμε την $f(x)$ στο $[0, \pi]$

Γράφουμε $y = ax + b$. Για $x = \pi$ έχουμε $a\pi + b = 0$

Επίσης $a\frac{\pi}{2} + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pi, a = -1$. Άρα

στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ η $f(x) = -x + \pi$ και στο

$[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = x$. Άρα στα σημεία συνέχειας της f έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right]$$

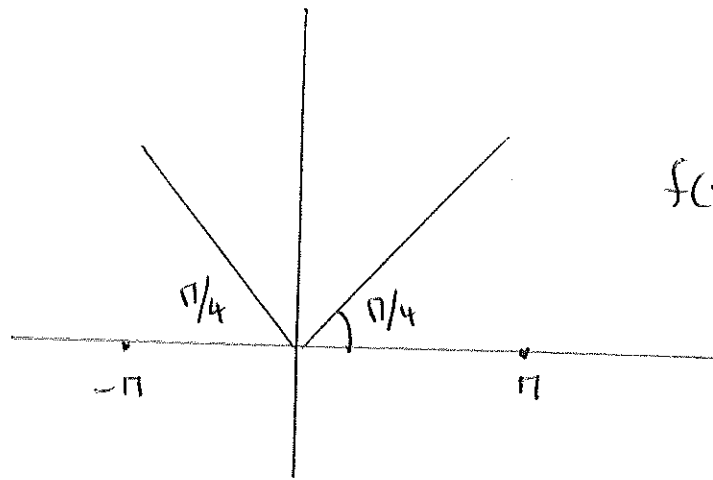
$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \left[x \cos(nx) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n^2} \left[\sin(nx) \right]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{n} \left[\cos(nx) \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{n} \left[x \cos(nx) \right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \left[\sin(nx) \right]_{\pi/2}^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{\pi}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n} \pi \cos(n\pi) - \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{4\pi}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Apa $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx)$

Άσκηση Να βρείτε το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης που ορίζεται από το σχήμα:



$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Λύση. Προφανώς ισχύει $f(x) = f(-x)$ δηλ $f(x)$ άρτια συνάρτηση. Άρα

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n} \left[x \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left[\cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right). \quad \text{Άρα}$$

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos(n\pi)$$

Μετασχηματισμός Fourier.

Θεώρημα Έστω για συνάρτηση f πληρεί τις συνθήκες Dirichlet σε κάθε πεπερασμένο διάστημα. Υποθέτουμε ότι το $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ υπάρχει.

Τότε σε κάθε σημείο όπου η f είναι συνεχώς γράφεται

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Η παραπάνω παράσταση της f καλείται ολοκληρωτική παράσταση Fourier της f ή ολοκλήρωμα Fourier της f .

Εάν x_0 είναι σημείο ασυνέχειας της f τότε η ολoul. παράσταση της f στο x_0 ισούται με το $\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \right)$.

Πόρισμα Έστω η f είναι άρτια συνάρτηση
δηλ. $f(x) = f(-x)$. Τότε έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega, \quad A(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

Εάν f είναι περιττή δηλ. $f(x) = -f(-x)$, τότε

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega, \quad B(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < -1, x > 1 \end{cases}$$

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier της f .

Να βρεθούν τα σημεία όπου η f ισούται με

το ολοκλήρωμα Fourier. Με τη βοήθεια

του ολοκληρώματος Fourier να υπολογίσετε

το $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Λύση. Προφανώς η f είναι άρτια συνάρτηση

δηλ. $f(x) = f(-x)$

Αρα το ολοκλήρωμα Fourier της f δίνεται:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega, \quad A(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \cos(\omega t) dt = \frac{\sqrt{2}}{\omega \sqrt{\pi}} \left[\sin(\omega t) \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega \sqrt{\pi}} \sin \omega$$

Αρα το ολοκλήρωμα της f είναι το

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cdot \cos(\omega x)}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cdot \cos(\omega x)}{\omega} d\omega$$

για $x \in (-1, 1)$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos(\omega x)}{\omega} d\omega$$

Για $x=0$ έχουμε η f είναι γνωστός έχουμε

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

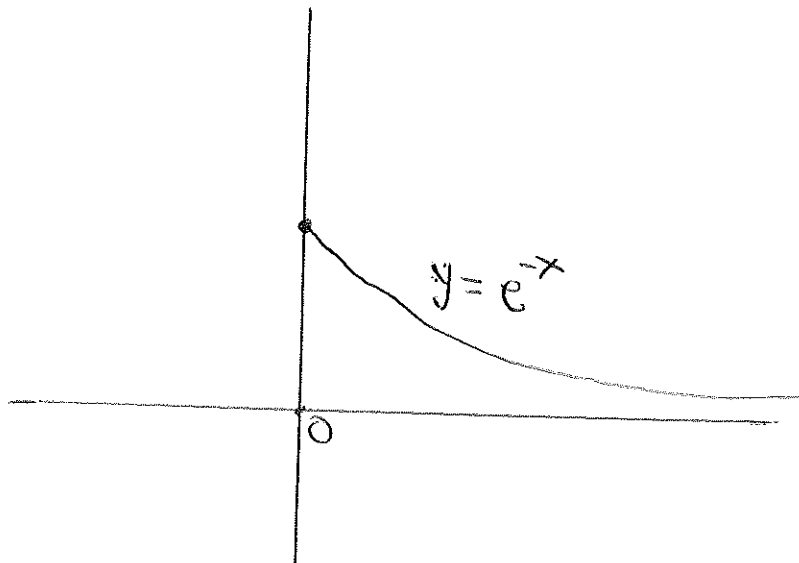
Άσκηση Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad x < 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier της f και τα σημεία όπου η f ισούται με το ολοκλήρωμα Fourier. Τέλος να υπολογίσετε το

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin(aw) + \cos(aw)}{w^2 + 1} dw, \quad a \geq 0 \text{ ή } a < 0.$$

Λύση



Στα σημεία συνέχειας της f ισχύει

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(w) \cos(wx) dw + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(w) \sin(wx) dw,$$

$$A(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 0 \cos(wt) dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(wt) dt$$

-19-

$$= \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \cos(\omega t) \right]_0^{\infty} - \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \left[\cancel{e^{-t} \sin(\omega t)} \right]_0^{\infty} - \frac{\omega^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\omega t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1+\omega^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{(1+\omega^2)\sqrt{\pi}}$$

Ergebnis

$$B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt =$$

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cancel{e^{-t} \sin(\omega t)} \right]_0^{\infty} + \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\omega t) dt =$$

$$= \left[-\frac{\omega}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \cos(\omega t) \right]_0^{\infty} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt \Rightarrow$$

$$\frac{1+\omega^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt \Rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt = \frac{\omega}{(1+\omega^2)\sqrt{\pi}}$$

Αρα στα σημεία συνεχούς συν. για $x \neq 0$
έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+w^2)\sqrt{\pi}} \cos(wx) dw + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{w}{(1+w^2)\sqrt{\pi}} \sin(wx) dw$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(wx) + w \sin(wx)}{1+w^2} dw,$$

Έστω $a > 0$. Τότε

$$e^{-a} = f(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(wa) + w \sin(wa)}{1+w^2} dw \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wa) + w \sin(wa)}{1+w^2} dw = \pi e^{-a}.$$

Για $a < 0$ έχουμε

$$0 = f(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(wa) + w \sin(wa)}{1+w^2} dw \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wa) + w \sin(wa)}{1+w^2} dw = 0.$$

Παρατήρηση Έστω ότι μας δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$, $x \geq 0$, και μας ζητούν να βρούμε το ημιτονικό ολοκλήρωμα Fourier. Τότε την ορίζουμε για $x < 0$ έτσι ώστε η $f(x)$ να γίνει περιττή.

Όμοιος εάν μας ζητούν να βρούμε το σινημιτονικό ολοκλήρωμα Fourier την ορίζουμε για $x < 0$ έτσι ώστε να γίνει άρτια.

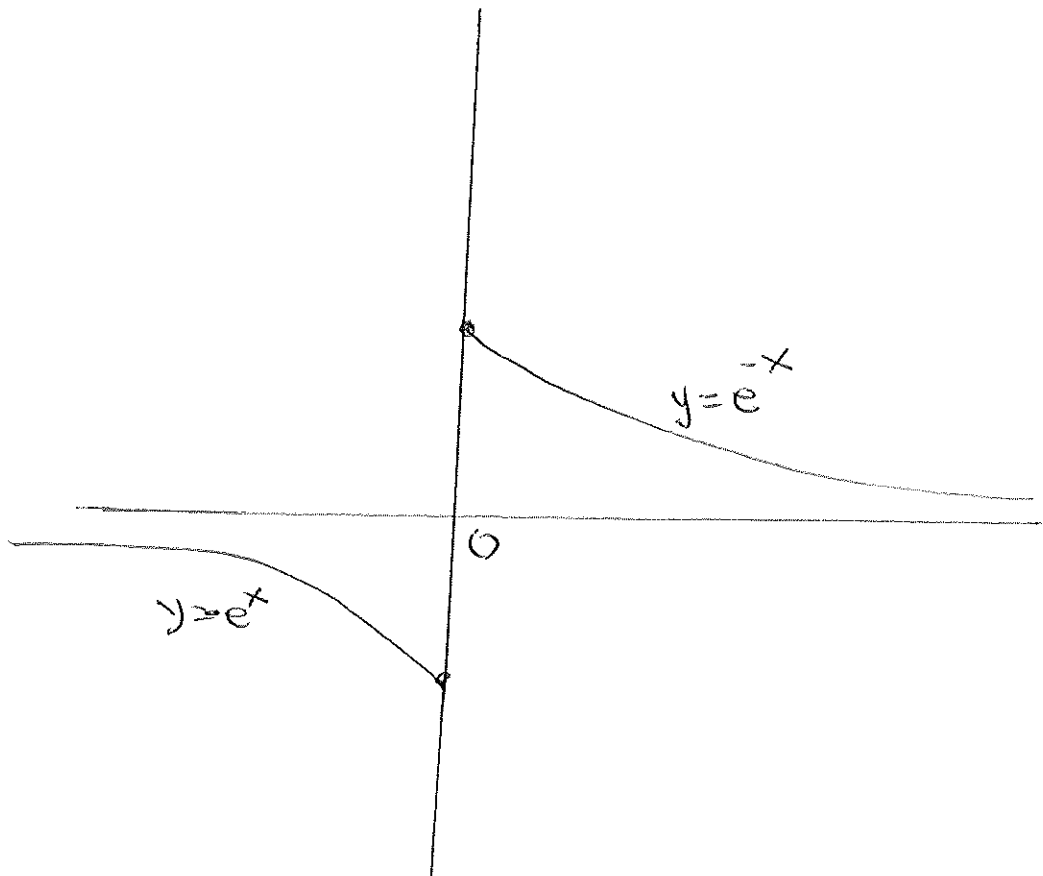
Άσκηση: Έστω $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Να βρεθεί το ημιτονικό ολοκλήρωμα Fourier της f και να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin a\omega}{\omega^2 + 1} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

Λύση. Ορίζουμε την $f(x) = -e^{-x}$, $x < 0$.

$$\text{Τότε } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ -e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$



Apa esta entidade complexa tem f. sn. para $x \neq 0$
 Exemplo

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega, \quad B(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt$$

$$= \left[\cancel{\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \sin(\omega t)} \right]_0^{\infty} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \omega \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\omega t) dt$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \omega \left[e^{-t} \cos \omega t \right]_0^{\infty} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \omega^2 \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (1+w^2) \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(wt) dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} w \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(wt) dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{w}{1+w^2}$$

Επομένως $f(x) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin(wx)}{1+w^2} dw, \quad x \neq 0$

Άρα εάν $a > 0$ τότε

$$e^{-a} = f(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin(wa)}{1+w^2} dw \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{w \sin(wa)}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

Άσκηση Να λύσετε την ολοκληρωτική
εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = \begin{cases} 1-\omega, & 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & \omega > 1 \end{cases}$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε ημίτονους ολοκληρωμα Fourier, δηλ. θεωρούμε την f περιττή.

$$\text{Τότε } f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-\omega) \sin(\omega x) d\omega = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \left[(1-\omega) \cos(\omega x) \right]_0^1$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \int_0^1 \cos(\omega x) d\omega = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x^2} \left[\sin(\omega x) \right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{x - \sin x}{x^2} \right], \quad x > 0$$

Για $x < 0$, ορίζεται έτσι ώστε η f περιττή.

Άσκηση: Να λύσετε την εξίσωση:

$$\int_0^{\infty} y(x) \sin(\omega x) dx = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega < 1 \\ 2 & 1 \leq \omega < 2 \\ 0 & \omega \geq 2 \end{cases}$$

Λύση: Άρα $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y(x) \sin(\omega x) dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & 0 \leq \omega < 1 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} & 1 \leq \omega < 2 \\ 0 & \omega \geq 2 \end{cases}$

Επομένως $y(x) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 \sin(\omega x) d\omega + \int_1^2 2 \sin(\omega x) d\omega + \int_2^{\infty} 0 \sin(\omega x) d\omega \right) = \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos \omega x}{x} \right]_0^1 - \frac{2}{x} \left[\cos \omega x \right]_1^2 \right)$

$$= \frac{2}{\pi x} \left(-\cos x + 1 - 2 \cos(2x) + 2 \cos x \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi x} \left(\cos x + 1 - 2 \cos(2x) \right), \quad x > 0$$

Για $x < 0$, ορίζεται η f έτσι ώστε να είναι
περιττή