

Ορισμός: Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[0, \infty)$. Τότε ονομάζουμε σκέλιξη των f και g την συνάρτηση

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx.$$

Πρόταση: Ισχύει $L(f * g) = L(f) \cdot L(g)$

$$\Rightarrow L^{-1}(L(f) \cdot L(g)) = f * g.$$

Άσκηση: Με το Θεώρημα της σκέλιξης να υπολογίσετε τον $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)$

Λύση Θεωρούμε $f(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ και $g(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$

Άρα $f(t) = 1$ και $g(t) = \sin t$. Άρα

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) &= f * g = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t \sin x dx = \\ &= -\cos x \Big|_0^t = 1 - \cos t. \end{aligned}$$

Άσκηση: Με το Θεώρημα της σκέδασης να υπολογίσετε τον $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}\right)$

Λύση: Έχουμε $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$ και $L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^t$

$$\text{Άρα } L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}\right) = t * e^t = \int_0^t (t-x) e^x dx$$

$$= t e^x \Big|_0^t - x e^x \Big|_0^t + e^x \Big|_0^t = \cancel{t e^t} - t - \cancel{t e^0} + e^t - 1$$

$$= e^t - t - 1.$$

Άσκηση: Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(t) = t + \int_0^t y(t-u) e^{-u} du.$$

Λύση: Παιρνουμε τον μετασχ. Laplace αμφοτέρων των μελών:

$$L(y(t)) = L(t) + L\left(\int_0^t y(t-u) e^{-u} du\right)$$

Έχουμε

$$y(t) * e^{-t} = \int_0^t y(t-u) e^{-u} du$$

$$\text{Άρα } \mathcal{L}(y(t) * e^{-t}) = \mathcal{L}(y(t)) \cdot \mathcal{L}(e^{-t}).$$

Επομένως

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}(y(t)) \cdot \mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}(y(t)) \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s+1}\right) \mathcal{L}(y(t)) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}(y(t)) = \frac{s+1}{s^3} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) \Rightarrow y(t) = t + \frac{t^2}{2},$$

Μορδιαία Επιβατική Συγκοπή

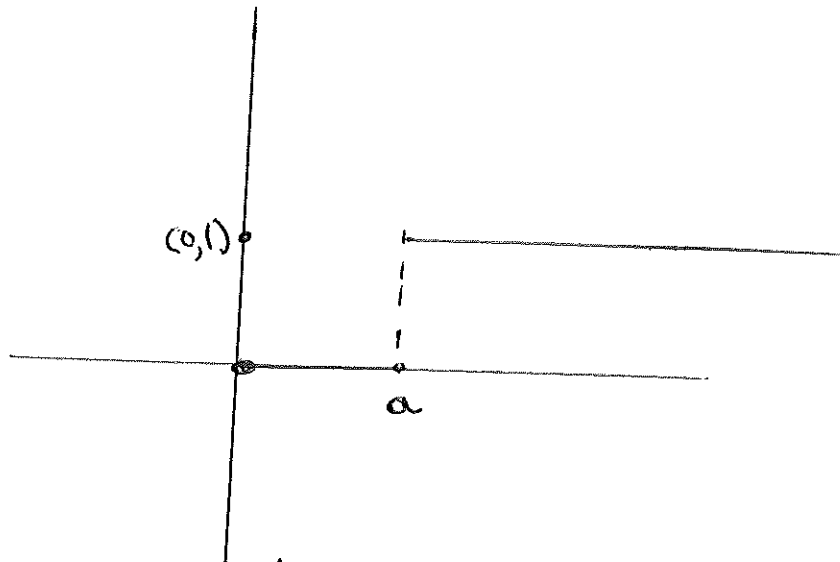
Έστω η συγκοπή

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a. \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_a(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) dt = \int_0^a e^{-st} \cdot 0 dt + \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_a^{\infty} = \frac{e^{-sa}}{s}. \end{aligned}$$

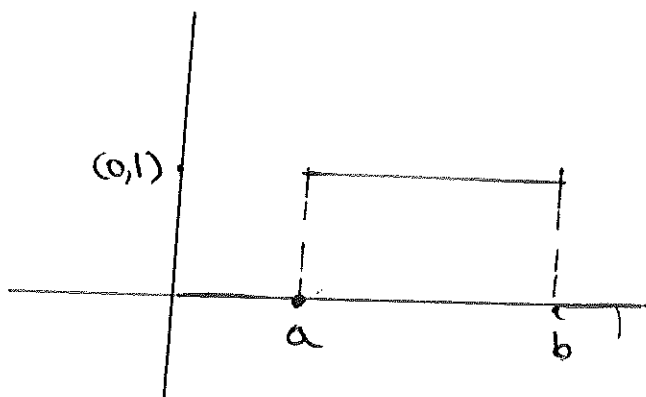
Σχήμα Συναρτήσεως Βήματος $u_a(t)$
(Συναρτήσεως Αποκοπής).



$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

Χαρακτηριστική Συναρτήσεως Διαστήματος
(Συναρτήσεως Παθίμω). $u_a(t) - u_b(t)$, $a < b$

$$u_a(t) - u_b(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t < b \\ 0, & t < a, t \geq b \end{cases}$$



Πρόταση Έστω f συνεχής συνάρτηση.

Τότε αν $a \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$L(u_a(t)f(t)) = e^{-as} L(f(t+a))$$

Παρατήρηση: Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}, \quad u_b(t) = \begin{cases} 0 & t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

$$\text{Τότε } u_a(t) - u_b(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t < b \\ 0 & t < a \text{ ή } t \geq b \end{cases}$$

Έστω μια συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & 0 \leq t < a_1 \\ f_2(t) & a_1 \leq t < a_2 \\ f_3(t) & a_2 \leq t < a_3 \\ 0 & t \geq a_3. \end{cases}$$

Τότε η $f(t)$ γράφεται:

$$f(t) = (u_0(t) - u_{a_1}(t))f_1(t) + (u_{a_1}(t) - u_{a_2}(t))f_2(t) + (u_{a_2}(t) - u_{a_3}(t))f_3(t).$$

Άσκηση: Έστω η σκαρπμένη $f(t)$ που δίνεται

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 3 \\ 4-t & 3 \leq t < 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$

Να υπολ. των $L(f(t))$.

Λύση:

Λύση: Γράφουμε $f(t) = (u_0(t) - u_1(t))t + u_1(t) - u_3(t)$

$$+ (u_3(t) - u_4(t))(4-t) = u_0(t) \cdot t - u_1(t)(t-1) - u_3(t)(t-3) +$$

$$+ u_4(t)(t-4) \Rightarrow L(f(t)) = L(u_0(t)t) - L(u_1(t)(t-1))$$

$$- L(u_3(t)(t-3)) + L(u_4(t)(t-4)) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

(Εδώ χρησιμοποιούμε την σχέση:

$$L(u_a(t)f(t)) = e^{-as} L(f(t+a)).$$

Για $a=0$ και $f(t)=t$ έχουμε $L(u_0(t)t) = e^{-0s} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$

Για $a=1$ και $f(t)=t-1$ έχουμε $L(u_1(t)(t-1)) = e^{-s} \frac{1}{s^2}$

Για $a=3$ και $f(t)=t-3$ έχουμε $L(u_3(t-3)) = e^{-3s} \frac{1}{s^2}$

Για $a=4$ και $f(t)=t-4$ έχουμε $L(u_4(t-4)) = e^{-4s} \frac{1}{s^2}$

2^{ος} τμήμα

-21-

$$\text{Εξούπε } L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^3 e^{-st} dt + \int_3^4 (4-t) e^{-st} dt = -\left[\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^1 - \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^1 - \left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_1^3$$

$$- \left[\frac{(4-t)e^{-st}}{s}\right]_3^4 + \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_3^4 = -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}$$

$$+ \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

Άσκηση Να βρεθεί ο μετασφ. Laplace της $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 1 \leq t < 4 \\ 0 & t < 1, t \geq 4 \end{cases}$$

Λύση Γράφουμε $f(t) = (u_1(t) - u_4(t))t^2 \Rightarrow$

$$L(f(t)) = L((u_1(t) - u_4(t))t^2) = L(u_1(t)t^2) - L(u_4(t)t^2)$$

$$= e^{-s} L((t+1)^2) - e^{-4s} L((t+4)^2) = e^{-s} (L(t^2) + 2L(t) + L(1))$$

$$- e^{-4s} (L(t^2) + 8L(t) + L(16)) =$$

$$= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) - e^{-4s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s} \right).$$

Μεταβλ. Laplace Περιοδικής Συνάρτησης.

Έστω μια συνάρτηση $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Η f

λέγεται περιοδική περιόδου T εάν για κάθε t

ισχύει $f(t+T) = f(t)$. Για παράδειγμα έστω

$f(t) = \cos t$. Η συνάρτηση $\cos t$ είναι περιοδική περιόδου 2π . Πράγματι ισχύει $\cos(t+2\pi) = \cos t$.

Έστω f μια συνάρτηση περιόδου T . Τότε

ισχύει

$$L(f) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 3n \leq t < 3n+1 \\ 0 & 3n+1 \leq t < 3n+2 \\ -2 & 3n+2 \leq t < 3n+3 \end{cases}, \quad n=0,1,\dots$$

Να βρείτε τον $L(f(t))$.

Λύση: Είναι προφανές ότι ισχύει $f(t+3)=f(t)$ για κάθε t , δηλ. είναι περιοδική με περίοδο 3.

$$\text{Άρα } L(f) = \frac{\int_0^3 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-3s}}.$$

$$\text{Έχουμε } \int_0^3 e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 2e^{-st} dt + \int_2^3 (-2)e^{-st} dt =$$

$$= -2 \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_2^3 = 2 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \right) + 2 \left(\frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \right)$$

Άρα

$$L(f) = \frac{2}{(1 - e^{-3s})} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \right)$$

Εφαρμογές των Μεταβλ. Laplace στην
επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές
Παραγώγους.

Έστω $u(x, t)$ μια συνάρτηση 2 μεταβλητών.

Συμβολίζουμε με $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$,

$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Υποθέτουμε βέβαια ότι υπάρχουν οι

$u_t, u_x, u_{xx}, \dots$. Ισχύουν:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = s \mathcal{L}(u(x, t)) - u(x, 0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = s^2 \mathcal{L}(u(x, t)) - s u(x, 0) - u_t(x, 0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}(u(x, t))}{\partial x}, \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u(x, t))}{\partial x^2}$$

Άσκηση Να λύσετε το πρόβλημα

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(5,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 10 \sin(4\pi x).$$

Λύση. Παίρνουμε $\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 2 \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \Rightarrow$

$$s \mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}(u(x,t)) \Rightarrow$$

$$2U'' - sU = -u(x,0), \quad \text{όπου} \quad U(x) = \mathcal{L}(u(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t) dt$$

Άρα έχουμε τη γνήσια διαφ. εξίσωση:

$$U'' - \frac{s}{2} U = -10 \sin(4\pi x).$$

Θα βρούμε πρώτα τη γενική λύση της ομογενούς:

$$U'' - \frac{s}{2} U = 0.$$

Παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - \frac{s}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{s}{2}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{s}{2}}.$$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_g(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x}.$$

δίνου C_1, C_2 σταθερές. Θα βρούμε τώρα
και μια μερική λύση $y_\mu(x)$ της μη ομογενούς.
Αυτή θα έχει την μορφή

$$y_\mu(x) = A \sin(4\pi x) + B \cos(4\pi x)$$

Θα υπολογίσουμε τις σταθερές A και B .

Παίρνουμε:

$$y_\mu' = 4\pi A \cos(4\pi x) - 4\pi B \sin(4\pi x),$$

$$y_\mu'' = -16\pi^2 A \sin(4\pi x) - 16\pi^2 B \cos(4\pi x).$$

Αρα εφόσον $y_\mu'' - \frac{5}{2} y_\mu = 10 \sin(4\pi x)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} -16\pi^2 A \sin(4\pi x) - 16\pi^2 B \cos(4\pi x) - \frac{5A}{2} \sin(4\pi x) - \frac{5B}{2} \cos(4\pi x) \\ = 10 \sin(4\pi x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(-16\pi^2 A - \frac{5A}{2} \right) \sin(4\pi x) + \left(-16\pi^2 B - \frac{5B}{2} \right) \cos(4\pi x) \\ = 10 \sin(4\pi x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = 0 \text{ και } -16\pi^2 A - \frac{5A}{2} = 10 \Rightarrow$$

$$A = + \frac{20}{32\pi^2 + 5}$$

Αρα

$$y_H(x) = + \frac{20}{32\pi^2 + 5} \sin(4\pi x)$$

Επομένως η γενική λύση της $U'' - \frac{5}{2}U = 10\sin(4\pi x)$

είναι

$$U(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{5}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}x} + \frac{20}{32\pi^2 + 5} \sin(4\pi x).$$

Θέλουμε $u(0,t) = 0$, $u(5,t) = 0 \Rightarrow$

$L(u(0,t)) = 0$ και $L(u(5,t)) = 0 \Rightarrow U(0) = 0$ και

$U(5) = 0$. Επομένως $c_1 + c_2 = 0$ και

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{5}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}x} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \text{ Άρα}$$

$$U(x) = L(u(x,t)) = + \frac{20}{32\pi^2 + 5} \cdot \sin(4\pi x) \Rightarrow$$

$$u(x,t) = + 20 \cdot \sin(4\pi x) \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{32\pi^2 + 5}\right) =$$

$$+ 20 e^{-32\pi^2 t} \sin(4\pi x).$$

Άσκηση Να λύσετε το πρόβλημα

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 6\sin x - 4\sin(2x).$$

Λύση. Παιρνουμε μετασχ. Laplace αμφοτέρων των μελών της εξίσωσης:

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - 4L(u).$$

$$\text{Έχουμε: } sL(u(x,t)) - u(x,0) = \frac{d^2 L(u(x,t))}{dx^2} - 4L(u(x,t))$$

Θέτουμε $U(x) = L(u(x,t))$, Τότε παίρνουμε:

$$U'' + (s+4)U = 4\sin(2x) - 6\sin x.$$

Χαρ. Εξίσωση Ομογενούς: $\lambda^2 - (s+4) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{s+4}$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_g(x) = C_1 e^{\sqrt{s+4}x} + C_2 e^{-\sqrt{s+4}x}.$$

Θα βρούμε και μια μερική λύση της μη ομογενούς:

Αυτή θα έχει την μορφή

$$y_{\mu}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) + \Gamma\sin x + \Delta\cos x$$

$$\Rightarrow y'_{\mu}(x) = +2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) + \Gamma\cos x - \Delta\sin x$$

$$\Rightarrow y'' = -4A \sin(2x) - 4B \cos(2x) - \Gamma \sin x - \Delta \cos x.$$

Αρα

$$\begin{aligned} & -4A \sin(2x) - 4B \cos(2x) - \Gamma \sin x - \Delta \cos x - (s+4)A \sin(2x) \\ & - (s+4)B \cos(2x) - (s+4)\Gamma \sin x - (s+4)\Delta \cos x = 4 \sin(2x) - 6 \sin x \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} & (-4A - A(s+4)) \sin(2x) + (-4B - B(s+4)) \cos(2x) + (-\Gamma - \Gamma(s+4)) \sin x \\ & + (-\Delta - (s+4)\Delta) \cos x = 4 \sin(2x) - 6 \sin x. \end{aligned}$$

$$\text{Αρα } B = \Delta = 0, \quad A = -\frac{4}{s+8}, \quad \Gamma = \frac{6}{s+5}$$

$$\text{Αρα } y_{\mu}(x) = -\frac{4}{s+8} \sin(2x) + \frac{6}{s+5} \sin x.$$

$$\text{Επομένως } U(x) = c_1 e^{\sqrt{s+4}x} + c_2 e^{-\sqrt{s+4}x} - \frac{4}{s+8} \sin(2x) + \frac{6}{s+5} \sin x$$

$$\text{Εξούτε } U(x) = L(u(x,t)) \Rightarrow L(u(0,t)) = L(0) = 0 \Rightarrow U(0) = 0$$

$$\text{Ομοίως } U(\pi) = L(u(\pi,t)) = L(0) = 0. \quad \text{Αρα}$$

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 e^{\sqrt{s+4}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{s+4}\pi} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Επομένως $U(x) = L(u(x,t)) = -\frac{4}{s+8} \sin(2x) + \frac{6}{s+5} \sin x$

Αρα $u(x,t) = -L^{-1}\left(\frac{4}{s+8}\right) \sin(2x) + 6 L^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right) \sin x$
 $= -4e^{-8t} \sin(2x) + 6e^{-5t} \sin x.$

Άσκηση: Να λύσετε το πρόβλημα

$$y'' + y = u_0(t) - u_1(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Λύση: Παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace αμφοτέρων των μελών:

$$L(y'' + y) = L(u_0(t) - u_1(t)) \Rightarrow L(y'') + L(y) = L(u_0(t)) - L(u_1(t))$$

$$\Rightarrow s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)s} - \frac{e^{-s}}{(s^2+1)s}$$

Γράφουμε: $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+\Gamma}{s^2+1} \Rightarrow A(s^2+1) + s(Bs+\Gamma) =$

$$1 \Rightarrow s^2(A+B) + \Gamma s + A = 1 \Rightarrow A=1, \Gamma=0, B=-1$$

Άρα $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$ Γνωρίζουμε

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}(F(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right)$$

Εφόσον $L(u_a(t)) = \frac{e^{-as}}{s} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = u_1(t).$

Επίσης έχουμε

$$L(u_a(t)f(t)) = e^{-as} L(f(t)) \Rightarrow$$

$$L(u_a(t)f(t)) = e^{-as} L(f(t)). \quad \text{Για } a=1 \text{ ναί}$$

$$f(t) = \sin t \quad \text{έχουμε} \quad L^{-1}\left(e^{-s} \frac{1}{s^2+1}\right) = u_1(t) \sin(t-1).$$

Άρα

$$y(t) = 1 - \cos t - u_1(t) + u_1(t) \sin(t-1).$$

Άσκηση Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y'' + y = u_{\pi/2}(t) \cos t, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{Λύση} \quad \text{Έχουμε} \quad L(y'' + y) = L(u_{\pi/2} \cos t) \Rightarrow$$

$$L(y'') + L(y) = L(u_{\pi/2} \cos t) \Rightarrow s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + L(y)$$

$$= e^{-\pi/2 s} L(\cos(t + \frac{\pi}{2})) \Rightarrow s^2 F(s) + F(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} L(\sin t)$$

$$\Rightarrow F(s)(1+s^2) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1} \Rightarrow F(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2+1)^2}\right)$$

Πρώτα θα υπολογίσουμε το $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)$

Έχουμε $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$. Γνωρίζουμε ότι

$$f * g = \int_0^t f(t-x)g(x)dx \quad \text{και} \quad L(f * g) = L(f) \cdot L(g)$$

$$\begin{aligned} \text{Αρα} \quad L(\sin t * \sin t) &= \frac{1}{(s^2+1)^2} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \sin t * \sin t \\ &= \int_0^t \sin(t-x)\sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι: } \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\text{Αρα} \quad \int_0^t \sin(t-x)\sin x \, dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^t \cos(t-2x) \, dx - \int_0^t \cos t \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(t-2x)}{2} \Big|_0^t - t \cos t \right] = \frac{1}{2} [\sin t - t \cos t]$$

$$\text{Επομένως} \quad L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$$

$$\text{Αρα} \quad L^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \left(t-\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \right) u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

$$\text{Επομένως} \quad y(t) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \left(t-\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \right] u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$