

Άσκηση.: Να υπολογίσετε τον $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+2}\right)$

και τον $L^{-1}\left(\frac{3s^2+4}{s^4+s^2}\right)$.

Λύση. Θα υπολογίσουμε πρώτα τον $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+2}\right)$

Αναλύουμε το $\frac{s}{s^2+4s+2}$ σε απλά κλάσματα.

$$\frac{s}{s^2+4s+2} = \frac{A}{s+2+\sqrt{2}} + \frac{B}{s+2-\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$A(s+2-\sqrt{2}) + B(s+2+\sqrt{2}) = s. \quad \text{Για } s = -2-\sqrt{2}$$

$$\text{έχουμε } -2\sqrt{2}A = -2-\sqrt{2} \Rightarrow A = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\text{Για } s = -2+\sqrt{2} \text{ παίρνουμε } 2B\sqrt{2} = -2+\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$B = \frac{-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Άρα } L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+2}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s-(-2-\sqrt{2})}\right) +$$

$$+ \frac{1-\sqrt{2}}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s-(-2+\sqrt{2})}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} e^{(-2-\sqrt{2})t} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} e^{(-2+\sqrt{2})t}$$

-8-

Θα υπολογίσουμε τώρα τον $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s^2+4}{s^4+s^2}\right)$

$$\Gammaαίφουμε \quad \frac{3s^2+4}{s^4+s^2} = \frac{3}{s^2+1} + \frac{4}{s^4+s^2} =$$

$$= \frac{3}{s^2+1} + \frac{4}{s^2(s^2+1)}$$

$$\Gammaράφουμε \quad \frac{4}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma s + \Delta}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow 4 = As(s^2+1) + B(s^2+1) + (\Gamma s + \Delta)s^2 \Rightarrow$$

$$(\Gamma+A)s^3 + (B+\Delta)s^2 + As + B = 4 \Rightarrow B=4, A=0$$

$$A+\Gamma=0, B+\Delta=0. \text{ Άρα } \Gamma=0, \Delta=-4.$$

Επομένως

$$\frac{4}{s^2(s^2+1)} = \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^2+1}$$

$$\text{Άρα } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s^2+1)}\right) = 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = 4t - 4\sin t$$

Τέλος παίρνουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s^2+4}{s^4+s^2}\right) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s^2+1)}\right) =$$

$$= 3\sin t + 4t - 4\sin t = 4t - \sin t$$

Εφαρμογές των Μεταβχ. Laplace στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

Άσκηση Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'' - 3y' + 2y = 4t + 12e^{-t}, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -1$$

Λύση. Παίρνουμε τον μεταβχ. Laplace αμφοτέρων των μελών:

$$L(y'') - 3L(y') + 2L(y) = 4L(t) + 12L(e^{-t}) \Rightarrow$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) - 3sL(y) + 3y(0) + 2L(y) = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}$$

$$\Rightarrow L(y)[s^2 - 3s + 2] - 6s + 1 + 18 = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} \Rightarrow$$

$$L(y) = \frac{6s-19}{s^2-3s+2} + \frac{4}{s^2(s^2-3s+2)} + \frac{12}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

Έχουμε

$$\frac{6s-19}{s^2-3s+2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow A=13, \quad B=-7$$

$$\text{Άρα } \frac{6s-19}{s^2-3s+2} = \frac{13}{s-1} - \frac{7}{s-2}$$

$$\frac{4}{s^2(s^2-3s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s-1} + \frac{\Delta}{s-2}$$

$$\Rightarrow A=3, B=2, \Gamma=-4, \Delta=1$$

$$\frac{12}{(s+1)(s^2-3s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{\Gamma}{s-2} \Rightarrow A=2, B=-6, \Gamma=4$$

Apru

$$L(y) = \frac{13}{s-1} - \frac{7}{s-2} + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s+1} - \frac{6}{s-1} + \frac{4}{s-2}$$

$$= \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = 3L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - 2L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + 3L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = 3e^t - 2e^{2t} + 2e^{-t} + 3 + 2t.$$

Άσκηση Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + y = \sin(2x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

Λύση. Παίρνουμε $L(y'') + L(y) = L(\sin(2x)) \Rightarrow$

$$s^2 L(y) - sy'(0) - y(0) + L(y) = \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow$$

$$s^2 L(y) - s - 1 + L(y) = \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow L(y)(s^2 + 1) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Γράφουμε $\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right) =$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \cos x + \sin x.$$

Γράφουμε $\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{\Gamma+\Delta}{s^2+4}$

$$\Rightarrow B = \frac{2}{3}, \quad \Delta = -\frac{2}{3}, \quad A = \Gamma = 0. \quad \text{Άρα}$$

$$\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2}{3} \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \frac{2}{3} L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{1}{3} L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{2}{3} \sin x - \frac{1}{3} \sin(2x)$$

Επομένως $y(x) = \cos x + \frac{5}{3} \sin x - \frac{1}{3} \sin(2x)$

-12-

Άσκηση: Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2$$

Λύση. Παίρνουμε τον μετασχ. Laplace αμφοτέρων των μελών:

$$L(ty'') + L(y') - 2L(ty') - 2L(y) = 0.$$

Γνωρίζουμε $L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$, $F(s) = L(f(t))$.

Θέτουμε $n=1$ και $f(t)=y'$. Τότε έχουμε:

$$L(ty'') = - \frac{dL(y')}{ds} = - \frac{d(s^2 F(s) - sy(0) - y'(0))}{ds} =$$

$$-2sF(s) - s^2 \frac{dF(s)}{ds} + y(0), \quad \text{όπου } F(s) = L(y(t)).$$

Επίσης

$$L(y') = sF(s) - y(0),$$

$$L(ty') = - \frac{d(sF(s) - y(0))}{ds} = -F(s) - sF'(s).$$

Άρα παίρνουμε

$$-2sF(s) - s^2 F'(s) + y(0) + sF(s) - y(0) + 2F(s) + 2sF'(s) - 2F(s) = 0$$

$$\Rightarrow -sF(s) + (-s^2 + 2s)F'(s) = 0 \Rightarrow (-s+2)F'(s) = F(s)$$

$$\frac{dF}{ds} = \frac{F}{2-s} \Rightarrow \frac{dF}{F} = \frac{ds}{2-s} \Rightarrow \ln F = -\ln(s-2) + K$$

Αρα

$$F(s) = C \frac{1}{s-2}, \quad C \text{ σταθερά}$$

Τότε $y(t) = C \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = C e^{2t}$; εφόσον $y(0)=1$ έχουμε $C=1$

Αρα $y(t) = e^{2t}$

Άσκηση 4: Να λύσετε το πρόβλημα

$$\dot{y} + \dot{z} = t \quad y(0)=3, \quad y'(0)=-2, \quad z(0)=0$$

$$\ddot{y} - z = e^{-t}$$

Λύση: Παίρνουμε τον μετασχ. Laplace:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{y}) + \mathcal{L}(\dot{z}) &= \mathcal{L}(t) \\ \mathcal{L}(\ddot{y}) - \mathcal{L}(z) &= \mathcal{L}(e^{-t}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} s\mathcal{L}(y) - y(0) + s\mathcal{L}(z) - z(0) &= \frac{1}{s^2} \\ s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - \mathcal{L}(z) &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} s\mathcal{L}(y) + s\mathcal{L}(z) &= \frac{1}{s^2} + 3 \\ s^2\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(z) &= \frac{1}{s+1} + 3s - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^3(s^2+1)} + \frac{3}{s(s^2+1)} + \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{3s-2}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{3}{2} \frac{1}{s^2+1}$$

$\Rightarrow$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2 + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}\sin t$$

Επίσης

$$L(z) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow z(t) = 1 - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\sin t$$

Άσκηση 5: Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} y' &= 2y + z, & y(0) &= 1 \\ z' &= -y + 2z, & z(0) &= -1 \end{aligned}$$

Λύση: Παίρνουμε $L(y') = 2L(y) + L(z)$

και $L(z') = -L(y) + 2L(z)$. Άρα έχουμε:

$$sL(y) - y(0) = 2L(y) + L(z) \Rightarrow (s-2)L(y) = 1 + L(z)$$

$$sL(z) - z(0) = -L(y) + 2L(z) \Rightarrow (s-2)L(z) = -1 - L(y)$$

$$\text{Άρα έχουμε } (s-2)L(y) = 1 + \frac{-1 - L(y)}{s-2} \Rightarrow$$

-15-

$$L(y) \left[s-2 + \frac{1}{s-2} \right] = 1 - \frac{1}{s-2} \Rightarrow$$

$$L(y) \left[(s-2)^2 + 1 \right] = s-2 - 1 \Rightarrow L(y) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} - \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= L^{-1} \left(\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} \right) - L^{-1} \left(\frac{1}{(s-2)^2 + 1} \right) \\ &= e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t. \end{aligned}$$

Enlons

$$\left(s-2 + \frac{1}{s-2} \right) L(z) = -1 - \frac{1}{s-2} \Rightarrow$$

$$L(z) = - \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} - \frac{1}{(s-2)^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z(t) &= - L^{-1} \left(\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} \right) - L^{-1} \left(\frac{1}{(s-2)^2 + 1} \right) \\ &= -e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t \end{aligned}$$