

Μετασχηματισμοί Laplace 1-

Έστω μια συνάρτηση $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[0, \infty)$, και s μια παράμετρος.

Τότε το ολοκλήρωμα

$$F(s) = L(f) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

καλείται μετασχηματισμός Laplace της f .

Μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων συναρτήσεων:

$$1) L(1) = \frac{1}{s}, \quad 2) L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad 3) L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$4) L(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad 5) L(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Πρόταση: Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης f . Τότε ισχύει:

$$L(e^{bt} f(t)) = F(s-b), \quad b \in \mathbb{R}.$$

Πόρισμα: Εάν $b, a \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

$$1) L(e^{bt} t^n) = \frac{n!}{(s-b)^{n+1}}, \quad 2) L(e^{bt} \sin(at)) = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$3) L(e^{bt} \cos(at)) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$$

Πρόταση: Έστω ότι υπάρχουν οι παράγωγοι $f', f'', \dots, f^{(n)}$ μιας συνάρτησης f . Υποθέτουμε ότι η $f^{(n)}$ είναι συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Για $n=1$ ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$L(f') = s L(f) - f(0), \quad L(f'').$$

Για $n=2$ έχουμε:

$$L(f'') = s^2 L(f) - s f(0) - f'(0).$$

Για $n=3$ έχουμε:

$$L(f^{(3)}) = s^3 L(f) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) \quad \text{u.o.u.}$$

Πρόταση: Ισχύει:

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}.$$

Πρόταση: Έστω f_1, f_2 δύο συναρτήσεις συνεχείς και c, d πραγματικοί αριθμοί. Τότε

$$L(cf_1(t) + df_2(t)) = c L(f_1(t)) + d L(f_2(t))$$

Άσκηση: Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f_1(t) = t^3 e^{-3t}$,
 $f_2(t) = e^{-t} \cos(2t)$, $f_3(t) = (t+2)^2 e^t$.

Λύση: Ισχύει: $L(e^{bt} f(t)) = F(s-b)$, $F(s)$ ο μετασχ.
Laplace της f .

Παίρνουμε πρώτα τον $L(t^3 e^{-3t})$.

Ισχύει $L(t^3) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$. Άρα εφόσον $a = -3$

$$\text{έχουμε } L(t^3 e^{-3t}) = \frac{6}{(s - (-3))^4} = \frac{6}{(s+3)^4}.$$

Θα υπολ. τώρα τον $L(e^{-t} \cos(2t))$.

Έχουμε $\overset{a=2}{b=-1}$ και $f(t) = \cos(2t)$. Ισχύει

$$\begin{aligned} L(\cos(2t)) &= \frac{s}{s^2+4}. \quad \text{Άρα } L(e^{-t} \cos(2t)) = \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+4} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

-4-

Θα υπολογίσουμε την $L((t+2)^2 e^t)$

$$\text{Έχουμε } L((t+2)^2 e^t) = L((t^2 + 4t + 4)e^t) =$$

$$L(t^2 e^t) + 4L(te^t) + 4L(e^t) = \frac{2!}{(s-1)^3} + 4 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + 4 \cdot \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{4}{s-1}$$

$$\left(L(t^2) = \frac{2!}{s^3} \Rightarrow L(t^2 e^t) = \frac{2}{(s-1)^3}, \quad L(t) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \right.$$

$$\left. L(te^t) = \frac{1}{(s-1)^2}, \quad L(e^t) = \frac{1}{s-1} \right).$$

Παρατήρηση! Έστω $L(f(t)) = F(s) \Rightarrow L'(F(s)) = f(t)$.
Ισχύει $L'(cF_1(s) + dF_2(s)) = cL'(F_1(s)) + dL'(F_2(s))$, $c, d \in \mathbb{R}$.

Άσκηση: Να υπολογίσετε τους

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\right), \quad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+6}\right), \quad L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+2)^3}\right)$$

Λύση: Θα υπολ. πρώτα τον $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\right)$.

$$\text{Αναλύουμε το } \frac{1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \text{ σε}$$

απλά κλάσματα.

Γράφουμε:

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{\Gamma}{s+2} \Rightarrow$$

$$1 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + \Gamma s(s+1). \quad \text{Τότε}$$

για $s=-1$ παίρνουμε $B=-1$, για $s=0$ έχουμε

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \text{για } s=-2 \text{ παίρνουμε } \Gamma = \frac{1}{2}$$

$$\text{Τότε} \quad \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2}$$

$$\text{Επομένως} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\right) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}.$$

$$\text{Θα υπολογίσουμε τώρα τον } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+6}\right).$$

Γράφουμε

$$\frac{s}{s^2+4s+6} = \frac{s}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{2}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$\text{Έχουμε } \mathcal{L}(\cos(\sqrt{2}t)) = \frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t)) = \frac{s+2}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2}\right) = e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t)$$

-6-

$$L(\sin(\sqrt{2}t)) = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + (\sqrt{2})^2} \Rightarrow L(e^{-2t} \sin(\sqrt{2}t)) = \frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2 + (\sqrt{2})^2}\right) = e^{-2t} \sin(\sqrt{2}t).$$

$$\text{Αρα } L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 4s + 6}\right) = L^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2 + (\sqrt{2})^2}\right) - \sqrt{2} L^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2 + (\sqrt{2})^2}\right) =$$

$$= e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} e^{-2t} \sin(\sqrt{2}t).$$

$$\text{Θα υπολ. τώρα το } L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+2)^3}\right)$$

$$\text{Γνωρί } L(f^{(2)}(t)) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0). \text{ Έστω } F(s) = \frac{1}{(s+2)^3}$$

$$\text{Θα υπολ. το } L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^3}\right) = \frac{t^2 e^{-2t}}{2}$$

$$\text{Αρα } L^{-1}(s^2 F(s)) = f^{(2)}(t), \quad f(t) = \frac{t^2 e^{-2t}}{2}, \quad f(0)=0, f'(0)=0$$

$$\text{Αρα } L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+2)^3}\right) = f^{(2)}(t), \quad f'(t) = t e^{-2t} - t^2 e^{-2t}$$

$$\Rightarrow f^{(2)}(t) = e^{-2t} - 2t e^{-2t} - 2t e^{-2t} + 2t^2 e^{-2t} \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+2)^3}\right) = e^{-2t} (2t^2 - 4t + 1).$$