

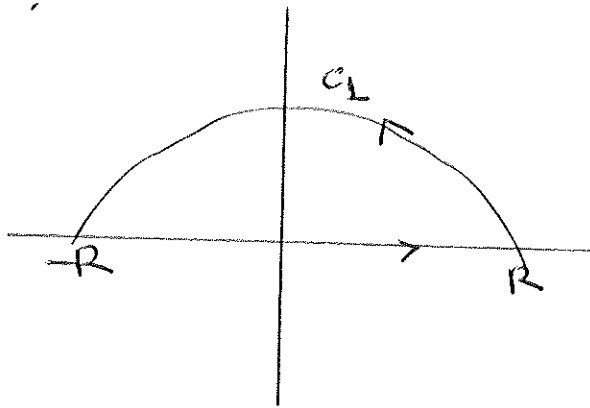
Επίλυση Πραγματικών Ολοκληρωμάτων $\rightarrow 1-$
 με τη χρήση των Ολοκληρωτικών υπολοίπων

1^η περίπτωση: Έστω το $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx$

όπου $f(x), g(x)$ πολυώνυμα, $\deg f(x) \leq \deg g(x) - 2$
 Θεωρούμε ότι $g(x)$ δεν έχει πραγματικές
 Τότε θεωρούμε το εναρμόδιο ολοκληρωτικό

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz, \quad \gamma = [-R, R] \cup C_1$$

όπου γ :



$$\text{Τότε} \quad \int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{f(x)}{g(x)} dx + \int_{C_1} \frac{f(z)}{g(z)} dz$$

Στην καμπύλη C_1 : $z = Re^{i\theta}$ Άρα

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{f(x)}{g(x)} dx + \int_{C_1} \frac{f(Re^{i\theta})}{g(Re^{i\theta})} d(Re^{i\theta})$$

Παίρνουμε $R \rightarrow \infty$ Τότε εφόσον $\deg f(x) \leq \deg g(x) - 2$

έχουμε $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{f(Re^{i\theta})}{g(Re^{i\theta})} d(Re^{i\theta}) = 0$

Άρα
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_T \frac{f(z)}{g(z)} dz, \quad T \text{ το άνω ημιεπίπεδο}$$

Άρα
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_T \frac{f(z)}{g(z)} dz = 2\pi i \left(a_1^{(1)} + \dots + a_1^{(k)} \right)$$

όπου $a_1^{(i)}$ αντιστοιχούν στα ανώτερα εντάλα της εωάρτησης $\frac{f(z)}{g(z)}$ που βρλωρται στο άνω ημιεπίπεδο.

2^η περίπτωση θεωρούμε το
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) \cos ax}{g(x)} dx$$

όπου $\deg f(x) \leq \deg g(x) - 1$ και η $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Εδώ θεωρούμε το μιγαδικό ολοκληρώμα

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} e^{iaz} dz = \int_{-R}^R \frac{f(x)}{g(x)} e^{iax} dx + \int_{C_1} \frac{f(z)}{g(z)} e^{iaz} dz$$

όπου γ η καμπύλη της 1^{ης} περίπτωσης

Παίρνουμε το $R \rightarrow \infty$. Τότε έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{f(Re^{i\theta})}{g(Re^{i\theta})} e^{iaRe^{i\theta}} d(Re^{i\theta}) = 0 \quad \text{εφόσον } \deg f(x) \leq \deg g(x) - 1$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} e^{iax} dx = \int_T \frac{f(z)}{g(z)} e^{iaz} = 2\pi i (a_{-1}^{(1)} + \dots + a_1^{(k)})$$

όπου $a_{-1}^{(1)}$ τα συνολ. υπολοίπων που αντιστοιχούν στα ανώμαλα σημεία που ανήκουν στο άνω ημιεπίπεδο. Επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cos(ax) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \sin(ax) dx = 2\pi i (a_{-1}^{(1)} + \dots + a_1^{(k)}).$$

3^η περίπτωση

Έστω το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} G(\cos t, \sin t) dt$

Τότε θεωρούμε $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$

Αρα $\cos t = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\sin t = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Αρα

$\cos t = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $\sin t = \frac{z^2 - 1}{2iz}$, διότι $|z|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Επίσης $dz = i e^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$. Επομένως

$$\int_0^{2\pi} G(\cos t, \sin t) dt = \frac{1}{i} \int_C G\left(\frac{z+1}{2z}, \frac{z-1}{2iz}\right) \frac{1}{z} dz$$

όπου $C: |z|=1$

Ασκησης

-4-

1. Με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών υποδείξεων να υπολογίσετε το πραγματικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$$

Λύση: Παιρνουμε την καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup C$

C η άνω ημιεμφύρεια. Έχουμε $f(x) = 1$,

$$g(x) = (x^2+1)(x^2+4)^2. \text{ Άρα } \deg f(x) = 0, \deg g(x) = 6.$$

Άρα $\deg g(x) \leq \deg f(x) - 2$. Επομένως

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} + \int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)^2}$$

Εφόσον $\deg g(x) \leq \deg f(x) - 2$ και $C: Re^{i\theta}$ έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{d(Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^2 + 1)(Re^{i\theta})^2 + 4)^2} = 0 \quad \text{Άρα}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = \int_T \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)^2} \quad \text{όπου } T \text{ το άνω ημιεμφύρεια.}$$

Τα ανώμαλα σημεία είναι $\pm i$ και $\pm 2i$
Από αυτά παίρνουμε μόνο τα: $z_1 = i$ και $z_2 = 2i$
που ανήκουν στο άνω ημιεμφύρεια.

$$\text{Άρα } \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)^2} = 2\pi i (a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)}) \quad \approx 5-$$

Θα υπολ. πρώτα το $a_{-1}^{(1)}$ που αντιστοιχεί στο $z_1=i$
 Θα εστιάσουμε το σημείο $z_1=i$. Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)(z+4)^2} = \frac{1}{2i(-1+4)^2} = \frac{1}{18i}$$

Επομένως $z_1=i$ ανάλος πόλος. Άρα $a_{-1}^{(1)} = \frac{1}{18i}$.

Θα υπολ. τώρα το $a_{-1}^{(2)}$ που αντιστοιχεί στο $z_2=2i$

$$\text{Παίρνουμε } \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)^2 \frac{1}{(z^2+1)(z-2i)^2(z+2i)^2} = \frac{1}{(-4+1)(4i)^2} = \frac{1}{48} \neq 0$$

Άρα $z_2=2i$ πόλος τάξης 2. Άρα

$$a_{-1}^{(2)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(- \frac{2z(z+2i)^2 - 2(z^2+1)(z+2i)}{(z^2+1)^2(z+2i)^4} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2i} \left(- \frac{2z(z+2i) - 2(z^2+1)}{(z^2+1)^2(z+2i)^3} \right) = \frac{-2 \cdot 2i \cdot 4i - 2(-4+1)}{(-4+1)^2(4i)^3} =$$

$$= \frac{+16+6}{-9 \cdot 64i} = -\frac{11}{288i}$$

$$\text{Άρα } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{18i} - \frac{11}{288i} \right) = \frac{10\pi}{288}$$

Λύση: Με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογίσετε το πραγματικό ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta.$$

Λύση Θέτουμε $z = e^{i\theta} \Rightarrow z = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow$

$$\cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \text{αλλά } \bar{z} = \frac{1}{z}$$

Άρα $\cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}$ και $\sin \theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}$,

$dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$. Άρα

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}}{5 - \frac{z(z+1)}{z}} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(5z - z^2 - 2)} dz$$

$$= \frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2 - 5z + 2)} dz$$

Θα βρούμε τα ανώμαλα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Η εξίσωση

$2z^2 - 5z + 2 = 0$ έχει 2 λύσεις την $z_2 = \frac{1}{2}$ και $z_3 = 2$

Άρα η συνάρτηση έχει 2 ανώμαλα σημεία

έντός του μοναδιαίου κύκλου το $z_1 = 0$ και $z_2 = \frac{1}{2}$.

Θα ελετάσουμε πρώτα το $z_1 = 0$.

Παίρνουμε $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 (z^2 - 1)^2}{z^2 (2z^2 - 5z + 2)} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow z_1 = 0$

Πόλος τάξης 2. Άρα

$$a_{-1}^{(1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{(z^2 - 1)^2}{2z^2 - 5z + 2} \right)' =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2z(z-1)(2z^2 - 5z + 2) - (4z - 5)(z^2 - 1)^2}{(2z^2 - 5z + 2)^2} = \frac{-(-5)}{4} = \frac{5}{4}.$$

Θα ελετάσουμε τώρα το $z_2 = \frac{1}{2}$.

Έχουμε $\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 \cdot 2(z-2)(z - \frac{1}{2})} = \frac{(\frac{1}{4} - 1)^2}{\frac{1}{4} \cdot 2(\frac{1}{2} - 2)} = \frac{\frac{9}{16}}{-\frac{6}{8}} = -\frac{3}{4}$

Άρα $\underline{I} = 2\pi i \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}.$

Άσκηση: Με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογίσετε το πραγματικό ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+9)^2} dx$

Λύση: Θεωρούμε το μιγαδικό επιταμείο ολοκλήρωμα στην καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup C$, C το άνω ημικύκλιο

$$\int_{\gamma} \frac{e^{3iz}}{(z^2+9)^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{3ix}}{(x^2+9)^2} dx + \int_C \frac{e^{3iz}}{(z^2+9)^2} dz$$

Εδώ $f(x)=1$ και $g(x)=(x^2+9)^2$ και $\deg f(x) \leq \deg g(x)-1$

Άρα $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{3iz}}{(z^2+9)^2} dz = 0$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2+9)^2} dx = \int_{\gamma} \frac{e^{3iz}}{(z^2+9)^2} dz \quad \text{Το άνω ημικύκλιο}$$

Είναι προφανές ότι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της συνάρτησης που ανήκει στο άνω ημικύκλιο είναι το $z=3i$. Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 3i} (z-3i)^2 \frac{e^{3iz}}{(z+3i)^2(z-3i)^2} = \frac{e^{-9}}{6i} \neq 0$$

Αρα $z=3i$ πόλος τάξης 2. Επομένως

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{e^{3iz}}{(z+3i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{3ie^{3iz}(z+3i) - 2(z+3i)e^{3iz}}{(z+3i)^4}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{3ie^{3iz}(z+3i) - 2e^{3iz}}{(z+3i)^3} = \frac{3ie^{-9}6i - 2e^{-9}}{(6i)^3}$$

$$= \frac{-20e^{-9}}{-216i} = \frac{10e^{-9}}{108i}$$

$$\text{Αρα } \int \frac{e^{3ix}}{(x^2+9)^2} dx = \frac{2\pi i 10e^{-9}}{108i} = \frac{5e^{-9}}{27}$$

$$\text{Αρα } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+9)^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{(x^2+9)^2} dx = \frac{5e^{-9}}{27}$$

$$\text{Αρα } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+9)^2} dx = \frac{5e^{-9}}{27}$$