

Περίληψη στα ολογα. Υπόλοιπα και στους πόλους
Έστω z_0 ένα σημείο όπου η f δεν είναι
αναλυτική. Το z_0 καλείται ανώμαλο
σημείο.

Ορισμός: Το z_0 καλείται πόλος τάξης k
εάν $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = A \neq 0$.

Εάν $k=1$ απλός πόλος.

Ορισμός: Έστω z_0 ανώμαλο σημείο για
την f . Θεωρούμε τον δακτύλιο
 $R = \{z: 0 < |z - z_0| < r_2\}$. Έστω η f αναλυτική
στον R . Τότε η $f(z)$ γράφεται

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Ο όρος a_1 καλείται ολογηρωτικό υπόλοιπο

Πρόταση α) Έστω z_0 πόλος τάξης 1 για την f .
Τότε το ολογα υπόλοιπο a_1 δίνεται

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

β) Εάν z_0 πόλος τάξης k , $k > 1$ έχουμε

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1} ((z - z_0)^k f(z))}{dz^{k-1}}$$

Ορισμός: Έστω ότι η f δεν ορίζεται σε
ένα σημείο z_0 , αλλά υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$

Τότε το z_0 καλείται αναλείψιμη ανωμαλία

Παράδειγμα: Έστω $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Η f

δεν ορίζεται στο $z=0$. Αλλά υπάρχει

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \left. \frac{(\sin z)'}{z'} \right|_{z=0} = \left. \cos z \right|_{z=0} = 1$$

Άρα $z=0$ αναλείψιμη ανωμαλία.

Παράδειγμα: Έστω $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. Η f δεν

ορίζεται στο $z=0$. Αλλά υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \left. \frac{(e^z - 1)'}{z'} \right|_{z=0} = \left. e^z \right|_{z=0} = 1$$

Άρα $z=0$ αναλείψιμη ανωμαλία.

Ορισμός: Εάν ένα ανώμαλο σημείο της f
δεν είναι κόμβος ή αναλείψιμη ανωμαλία,
τότε καλείται ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Άσκηση: Έστω η $f(z) = \frac{e^z - 1}{(z-1)^2}$,

Να εξετάσετε τα ανώμαλα σημεία της $f(z)$.

Λύση: Το ανώμαλο σημείο είναι το $z=1$.
Θα εξετάσουμε εάν είναι πόλος δεύτερης τάξης.

Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \left(\frac{e^z - 1}{(z-1)^2} \right) = e-1 \neq 0$$

Άρα $z=1$ πόλος τάξης 2

Άσκηση: Έστω η $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$. Να εξετάσετε
τα ανώμαλα σημεία.

Λύση: Εδώ το ανώμαλο σημείο είναι το $z=0$.

Παίρνουμε
$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \left(\frac{e^z - 1}{z^2} \right) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Άρα δεν είναι πόλος τάξης 2. Θα εξετάσουμε
εάν είναι πόλος τάξης 1. Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \left(\frac{e^z - 1}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{(e^z - 1)'}{z'} \bigg|_{z=0} = \frac{e^z}{1} \bigg|_{z=0} =$$

$1 \neq 0$, άρα είναι πόλος τάξης 1

Άσκηση: Έστω $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z-1)^2(z-2) \cdot z^2}$ -3-

Να ερετάσετε τα ανώμαλα σημεία.

Λύση: Τα ανώμαλα σημεία είναι τα $z=1, z=2, z=0$.

Παίρνουμε πρώτα το $z=1$ Τότε

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2 (e^z - 1)}{(z-1)^2(z-2)z^2} = \frac{e-1}{(1-2) \cdot 1^2} = 1-e \neq 0$$

Άρα $z=1$ πόλος τάξης 2.

Θεωρούμε τώρα το $z=2$.

$$\text{Παίρνουμε } \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2) (e^z - 1)}{(z-1)^2(z-2)z^2} = \frac{e^2 - 1}{4} \neq 0$$

Άρα $z=2$, πόλος τάξης 1.

Τέλος παίρνουμε το $z=0$. Θα ερετάσουμε εάν είναι πόλος δεύτερης τάξης: Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 (e^z - 1)}{(z-1)^2(z-2)z^2} = 0. \text{ Άρα το } z=0 \text{ δεν είναι}$$

πόλος δεύτερης τάξης. Ερετάσουμε εάν είναι

πόλος τάξης ένα: Παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^z - 1}{(z-1)^2(z-2)z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{(z-1)^2(z-2)z} = \frac{(e^z - 1)'}{((z-1)^2(z-2)z)'} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{e^z}{2(z-1)(z-2)z + (z-1)^2 + (z-1)^2(z-2)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{-2} \neq 0. \text{ Άρα} \\ &\quad z=0 \text{ πόλος τάξης 1.} \end{aligned}$$