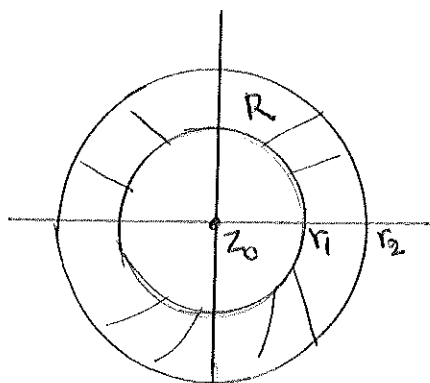


Σειρές Laurent

Θεώρημα: Έστω C_1, C_2 ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το z_0 . Θεωρούμε την περιοχή

$$R = \{z: r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$



Έστω f μια συνάρτηση αναλυτική στον δακτύλιοο R . Τότε η $f(z)$ γράφεται

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

$$+ a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$\text{Το μέρος της σειράς } \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

καλείται πρωτεύον μέρος ενώ το μέρος

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \text{ λέγεται}$$

αναλυτικό μέρος.

Ορισμός Έστω η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι αναλυτική σε κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε το z_0 καλείται ανώμαλο σημείο

Ορισμός Ένα ανώμαλο σημείο z_0 καλείται πόλος τάξεως k εάν ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = A \neq 0$$

εάν $k=1$, τότε το z_0 καλείται απλός πόλος.

Ορισμός Ένα σημείο z_0 καλείται απαλείψιμη ανωμαλία εάν η f δεν ορίζεται στο z_0 αλλά υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Ορισμός: Ο συντελεστής a_{-1} στη σειρά Laurent καλείται ολοκληρωτικός υπόλοιπο.

Πρόταση Έστω το z_0 είναι απλός πόλος

Τότε
$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Εάν το z_0 πόλος τάξεως k τότε

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right).$$

Θεώρημα: Έστω η f αναλυτική σε ένα τόπο D και παραγωγίσιμη στο εσωρό $\subset$ του D εντός από πεπερασμένου ηλίκους σημείων $z_1, z_2, \dots, z_k$ τα οποία βρίσκονται εντός του D .

$$\text{Τότε } \int_C f(z) dz = 2\pi i \left(a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + \dots + a_{-1}^{(k)} \right)$$

όπου $a_{-1}^{(i)}$ το ολοκλ υπόλοιπο που αντιστοιχεί στο ανώμαλο σημείο z_i .

Άσκηση Να βρείτε το ανάπτυγμα

$$\text{Laurent της } f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \text{ στο } z_0 = 1$$

$$\text{στον δαυτύλιο } R = \{z: 0 < |z-1| < r\}, r > 0$$

$$\text{Λύση: Γράφουμε } e^{2z} = e^{2(z-1)} e^2 =$$

$$e^2 \left[1 + \frac{2(z-1)}{1!} + \frac{4(z-1)^2}{2!} + \dots + \frac{[2(z-1)]^n}{n!} + \dots \right]$$

$$\text{Άρα } \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2(z-1)e^2}{(z-1)^3} + \frac{4(z-1)^2 e^2}{2(z-1)^3} +$$

$$+ \frac{8(z-1)^3 e^2}{3!(z-1)^3} + \frac{16(z-1)^4 e^2}{4!(z-1)^3} + \dots$$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{4e^2}{z-1} + \frac{4}{3}e^2 + \frac{2}{3}e^2(z-1) + \dots$$

Άσκηση. Να αναπτύξετε σε σειρά

Laurent την $f(z) = \frac{z}{(1+z)(2+z)}$ στον

δαυτόλο $R = \{z: 0 < |z+2| < 1\}$

Λύση: Γράφουμε $\frac{z}{(1+z)(2+z)} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{2+z}$

$$\Rightarrow z = z(A+B) + B + 2A \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ B=2 \end{matrix}$$

Άρα $\frac{z}{(1+z)(2+z)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2}$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+2-1} = -\frac{1}{1-(z+2)} =$$

$$= -\left(1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots\right) \in \phi \delta \omega \quad |z+2| < 1$$

Άρα $\frac{z}{(1+z)(2+z)} = \frac{2}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (z+2)^n$

Άσκηση. Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent
την $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ στους τόνους

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z: 0 < |z-2| < 1\}, & D_2 &= \{z: 1 < |z-2| < 2\}, \\ D_3 &= \{z: 0 < |z-1| < 1\}, & D_4 &= \{z: 1 < |z-1| < 2\}, \\ D_5 &= \{z: 1 < |z| < 2\}, & D_6 &= \{z: 0 < |z| < 1\} \\ D_7 &= \{z: |z| > 2\} \end{aligned}$$

Λύση. Γράφουμε $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$

$$\Rightarrow 1 = A(z-2) + B(z-1) \Rightarrow (A+B)z - 2A - B = 1 \Rightarrow$$

$$A+B=0, \quad 2A+B=-1. \quad \text{Άρα } A=-1, \quad B=1$$

$$\text{Επομένως } \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

1) Έστω $D_1 = \{z: 0 < |z-2| < 1\}$. Άρα

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)}$$

Εφόσον $|z-2| < 1$ έχουμε ότι $\frac{1}{1+(z-2)} = 1 - (z-2) + (z-2)^2 - \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$$

$$\text{Άρα } f(z) = \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n$$

2) Παίρνουμε τώρα τον τόνο D_2 :

$$D_2 = \{z: 1 < |z-2| < 2\}. \quad \text{Γράφουμε}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

$$= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-2)^{n+1}}$$

3) Παίρνουμε τώρα τον τόνο $D_3 = \{z: 0 < |z-1| < 1\}$

$$\text{Έχουμε } f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1-1} =$$

$$= -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

4) Έστω τώρα $D_4 = \{z: 1 < |z-1| < 2\}$. Τότε

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1-1} =$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \right) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

5) Παίρνουμε τον $D_5 = \{z: 1 < |z| < 2\}$.

Έχουμε $f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$

Εφόσον $1 < |z| \rightarrow \frac{1}{|z|} < 1$ και εφόσον $|z| < 2$

$\Rightarrow \frac{|z|}{2} < 1$. Γράφουμε

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{z}{2} - 1} =$$

$$= -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

6) Παίρνουμε τον $D_6 = \{z: 0 < |z| < 1\}$

Έχουμε $f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$

$$= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

7) Τέλος παίρνουμε $D_f = \{z: |z| > 2\}$

$$\text{Έχουμε } |z| > 2 \Rightarrow \frac{2}{|z|} < 1 \text{ και } \frac{1}{|z|} < \frac{2}{|z|} < 1$$

Γράφουμε

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} =$$

$$-\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{z^{n+1}}$$

Περίληψη στα ολογα. Υπόλοιπα

Έστω z_0 ένα σημείο όπου η f δεν είναι αναλυτική. Το z_0 καλείται ανώμαλο σημείο.

Ορισμός: Το z_0 καλείται πόλος τάξης k

εάν $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = A \neq 0$.

Εάν $k=1$ απλός πόλος.

Ορισμός: Έστω z_0 ανώμαλο σημείο για την f . Θεωρούμε τον δακτύλιο

$R = \{z: r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Έστω η f αναλυτική στον R . Τότε η $f(z)$ γράφεται

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Ο όρος a_1 καλείται ολογηρωτικό υπόλοιπο

Πρόταση α) Έστω z_0 πόλος τάξης 1 για την f .

Τότε το ολογα. υπόλοιπο a_1 δίνεται

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

β) Εάν z_0 πόλος τάξης k , $k > 1$ έχουμε

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1} ((z - z_0)^k f(z))}{dz^{k-1}}$$

Ασκήσεις στα Οδοντ. Υπόλοιπα,

Άσκηση 1: Να εξετάσετε τα ανώμαλα σημεία και να βρείτε τα αντίστοιχα οδοντοληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων.

α) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ β) $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z}$, γ) $f(z) = \frac{e^z}{(z^2-1)^2}$

Λύση: α) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$. Το $z_0 = 0$ είναι ανώμαλο σημείο για την $f(z)$. Θα εξετάσουμε τι ανώμαλο σημείο είναι. Παιρνουμε:

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{e^z - 1} = \frac{z'}{(e^z - 1)'} \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{e^z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0$$

Άρα $z=0$ είναι πόλος τάξης 1 και

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{e^z - 1} = 1$$

β) $f(z) = \frac{z+2}{z(z-2)}$. Εδώ τα ανώμαλα σημεία είναι $z_0 = 0$ και $z_1 = 2$.

Παιρνουμε πρώτα το $z_0 = 0$. Παιρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(z+2)}{z(z-2)} = -1 \neq 0, \text{ άρα } z_0 \text{ πόλος τάξης 1}$$

και $a_1 = -1$.

Θα εξετάσουμε τώρα το $z_1 = 2$. Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2)(z+2)}{z(z/2)} = \frac{4}{2} = 2 \neq 0 \Rightarrow z_1 = 2 \text{ πόλος τάξης } 1$$

Επομένως $a_1 = 2$.

c) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-1)^2}$ Τα ανώτατα σημεία είναι

τα $z_0 = 1$, $z_1 = -1$. Παίρνουμε πρώτα το $z_0 = 1$

Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2 e^z}{(z+1)^2(z-1)^2} = \frac{e}{4} \neq 0 \Rightarrow z_0 = 1 \text{ πόλος}$$

τάξης 2. Άρα το αντίστοιχο ολόκληρο υπόλοιπο

$$\text{είναι } a_1 = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-z_0)^k f(z)) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{e^z}{(z+1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z+1)^2 - 2e^z(z+1)}{(z+1)^4} = \frac{e}{4}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z+1) - 2e^z}{(z+1)^3} = \frac{2e - 2e}{8} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Παίρνουμε το $z_1 = -1$ Παίρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)^2 \frac{e^z}{(z+1)^2(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{4} \neq 0 \Rightarrow z_1 = -1 \text{ πόλος τάξης 2}$$

$$\text{Άρα } a_{-1} = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{e^z}{(z-1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z(z-1)^2 - 2e^z(z-1)}{(z-1)^4}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z(z-1) - 2e^z}{(z-1)^3} = \frac{-4e^{-1}}{(-2)^3} = \frac{e^{-1}}{2}.$$

Πρόταση: Έστω η f αναλυτική στον τόπο D εντός από πεπερασμένου πλήθους σημείων $z_1, z_2, \dots, z_k \in D$. Θεωρούμε ότι η f είναι παραγ. στο σύνορο $\subset$ του D . Τότε

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + \dots + a_{-1}^{(k)} \right)$$

όπου $a_{-1}^{(i)}$ το ολοκλ. υπόλοιπο που αντιστοιχεί στο ανώτατο σημείο z_i .

Άσκηση: Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{2z-1}{z^2-2} dz$

δόνου $C: |z| = \frac{1}{2}$ και $C: |z| = 2$

Λύση: Παιρνουμε πρώτα την καμπύλη

$C: |z| = \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τον τόνο $D = \{z: |z| < \frac{1}{2}\}$

Η f είναι αναλυτική στον D εφόσον μόνο του $z_1 = 0$

και παραχ. στο σύνορο C . Άρα

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-2} dz = 2\pi i a_1^{(1)}$$

δόνου a_1 το ολοκλ. υπόλοιπο που αντιστοιχεί στην $z_1 = 0$.

Θα εξετάσουμε το ανώμαλο σημείο $z_1 = 0$.

$$\text{Παιρνουμε } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(2z-1)}{z^2-2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z-1}{z-1} = 1 \neq 0$$

άρα $z_1 = 0$ πόλος τάξης 1. Επομένως $a_1^{(1)} = 1$

$$\text{Επομένως } \int_C \frac{2z-1}{z^2-2} dz = 2\pi i a_1^{(1)} = 2\pi i$$

Παιρνουμε τώρα την καμπύλη $C: |z| = 2$

και τον τόνο $D = \{z: |z| < 2\}$. Η f είναι αναλυτική

στα D εφόσον των σημείων $z_1 = 0$ και $z_2 = 1$

και παραχ. στο σύνορο C . Θα εξετάσουμε το

ανώμαλο σημείο $z_2 = 1$. Παιρνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{2z-1}{z(z-1)} = 1 \neq 0 \Rightarrow z_1 = 1 \text{ πόλος τάξης 1}$$

$$\text{Άρα } a_1^{(2)} = 1 \text{ Επομένως } \int_C \frac{2z-1}{z^2-2} dz = 2\pi i (a_1^{(1)} + a_1^{(2)}) = 4\pi i$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{(z+2)^3}{z^4+4z^3+5z^2} dz, \quad c: |z|=1$$

Λύση: Παιρνουμε τον τόνο $D = \{z: |z| < 1\}$

Θα ελέγξουμε εάν η f έχει ανώμαλα σημεία στον D .

Παιρνουμε $z^4+4z^3+5z^2=0 \Rightarrow z^2(z^2+4z+5)=0 \Rightarrow$
 $z=0$ διπλά και $z=-2 \pm i$. Η H έσπερση

f έχει μόνο ένα ανώμαλο σημείο το $z=0$
εντός του D και είναι παραγ. στο όριο $c: |z|=1$

Θα ελέγξουμε τώρα το ανώμαλο σημείο $z=0$.

Παιρνουμε $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2(z+2)^3}{z^2(z^2+4z+5)} = \frac{8}{5} \neq 0 \Rightarrow z=0$ πόλος

τάξης 2 για την f . Άρα

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2(z+2)^3}{z^2(z^2+4z+5)} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{(z+2)^3}{(z^2+4z+5)} \right)'$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3(z+2)^2(z^2+4z+5) - (z+2)^3(2z+4)}{(z^2+4z+5)^2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 - 8 \cdot 4}{25}$$

$$= \frac{28}{25}.$$

Άρα $\int_C \frac{(z+2)^3}{z^4+4z^3+5z^2} dz = 2\pi i a_{-1} = \frac{56\pi}{25}$