

Παρατήρηση, Για κάθε αρμονική συνάρτηση $u=u(x,y)$ υπάρχει αρμονική συνάρτηση $v=v(x,y)$ τέτοια ώστε η $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ να είναι αναλυτική.

Άσκησης Να βρείτε τα σημεία όπου η $f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$ είναι παραγωγίσιμη και τα σημεία όπου είναι αναλυτική.

Λύση Παίρνουμε $u(x,y)=2xy$, $v(x,y)=x^2+y^2$

Για να είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $z=x+iy$ θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{δηλαδή:}$$

$$2y=2y, \quad 2x=-2x. \quad \text{Άρα θα ^{είναι} ~~x=0~~ $x=0$, $y \in \mathbb{R}$ }$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $z_0=0+iy_0$ $y_0 \in \mathbb{R}$

Επίσης δεν είναι αναλυτική στο $z_0=0+iy_0$ διότι δεν υπάρχει περιοχή $\pi(z_0, \epsilon)$ τέτοια ώστε η f

να είναι παραγωγίσιμη για κάθε $z \in \pi(z_0, \epsilon)$,

$$\text{Επίσης έχουμε} \quad f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

$$= 2y_0 + i 2x_0 = 2y_0 + 2i \cdot 0 = 2y_0, \quad z_0 = iy_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Άσκηση: Έστω $f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 2x^3 + 6xy^2 + 1 + i v(x, y)$

είναι αναλυτική συνάρτηση και $f(1) = i$. Να υπολογίσετε την $v(x, y)$

Λύση Θέτουμε $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 2x^3 + 6xy^2 + 1$

$$\text{Τότε } u_x = 4x^3 - 12xy^2 - 6x^2 + 6y^2,$$

$$u_y = -12x^2y + 4y^3 + 12xy. \text{ Θέλουμε να ισχύουν}$$

οι συνθήκες Cauchy-Riemann δηλ.

$$u_x = v_y \text{ και } u_y = -v_x. \text{ Άρα}$$

$$v_y = 4x^3 - 12xy^2 - 6x^2 + 6y^2, \quad v_x = 12x^2y - 4y^3 - 12xy$$

Ολοκληρώνουμε την $v_y = 4x^3 - 12xy^2 - 6x^2 + 6y^2$ ως προς y

$$\text{και παίρνουμε } v = 4x^3y - 4xy^3 - 6x^2y + 2y^3 + h(x) \Rightarrow$$

$$v_x = 12x^2y - 4y^3 - 12xy + h'(x). \text{ Άλλω } v_x = -u_y = 12x^2y - 4y^3 - 12xy$$

$$\text{Άρα } h'(x) = 0 \Rightarrow h = C = C_1 + iC_2. \text{ Επομένως}$$

$$v = 4x^3y - 4xy^3 - 6x^2y + 2y^3 + C_1 + iC_2. \text{ Άρα}$$

$$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 2x^3 + 6xy^2 + 1 + i(4x^3y - 4xy^3 - 6x^2y + 2y^3 + C_1 + iC_2)$$

Θέλουμε $f(1) = i$ θέτουμε $x=1$ και $y=0$ και παίρνουμε

$$f(1) = 1 - 2 + 1 + i(C_1 + iC_2) = i \Rightarrow -C_2 + iC_1 = i \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 0$$

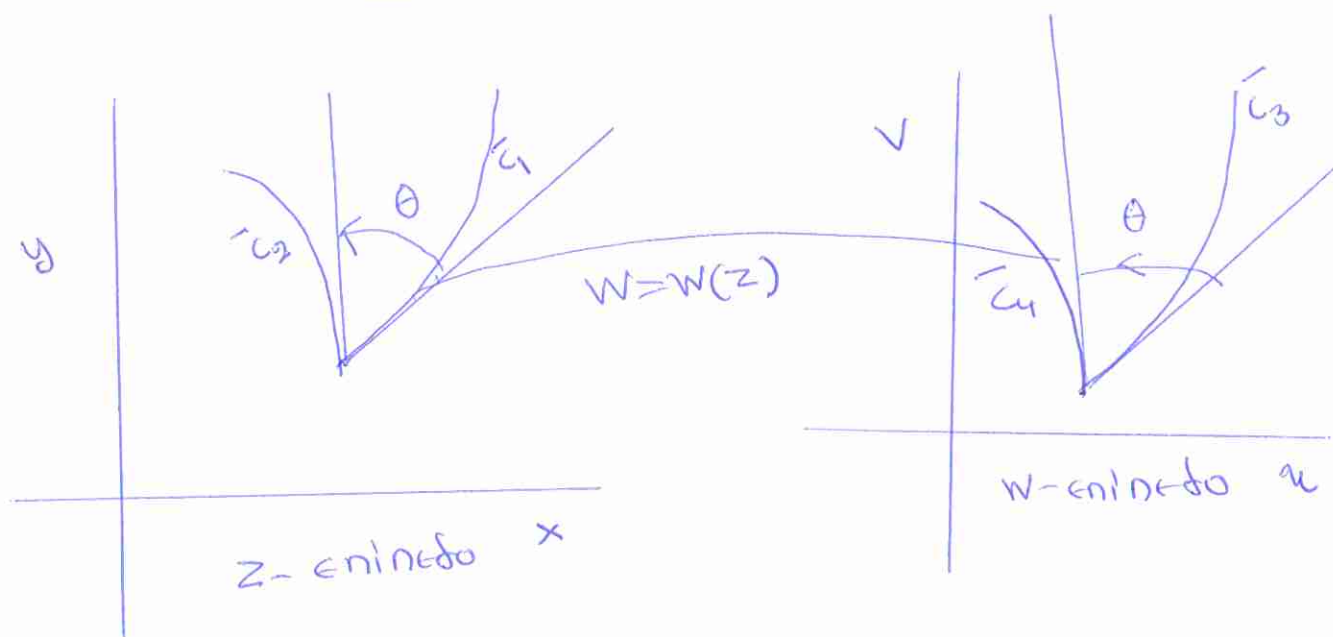
Άρα

$$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 2x^3 + 6xy^2 + 1 + i(4x^3y - 4xy^3 - 6x^2y + 2y^3 + 1)$$

Σύμμορφες Απεικονίσεις.

Ορισμός Έστω για εσάρτηση $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
Εάν για κάθε ζεύγος ακμυόλων στο z -επίπεδο που τέμνονται κατά γωνία θ αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος ακμυόλων στο w -επίπεδο που τέμνονται κατά την ίδια γωνία θ , τότε η $w(z)$ καλείται σύμμορφη.

Σχήμα



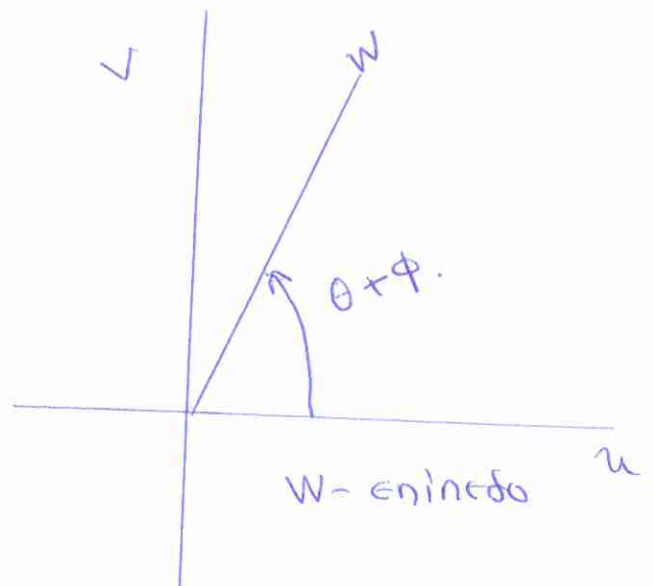
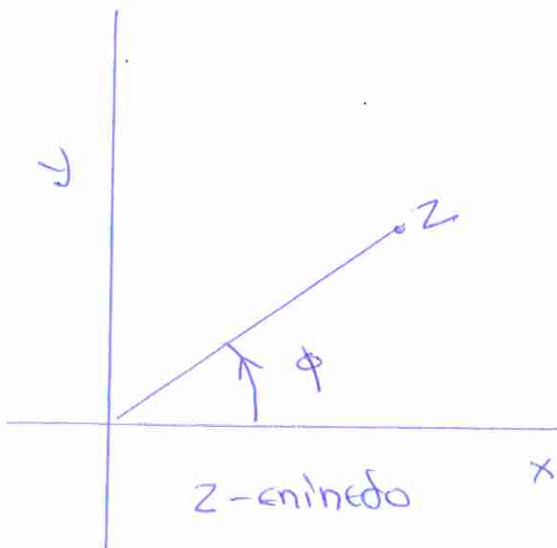
Πρόταση: Έστω ότι η εσάρτηση $w=w(z)$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, ένα προς ένα (αμφιμονότιμη) και $f'(z) \neq 0$, για $z \in \mathbb{C}$, τότε η w είναι σύμμορφη.

Παράδειγμα

Έστω η

εξάρτηση $w = a e^{i\theta} z$, όπου a, θ σταθερές,με $a \neq 0$. Τότε μπορούμε εύκολανα δείξουμε ότι η w είναι εὐμορφικήΕάν $z = r e^{i\phi}$, $r = |z|$, $\phi = \arg z$, τότε

$$w = a e^{i\theta} r e^{i\phi} = a r e^{i(\theta+\phi)}$$

Σχήμα

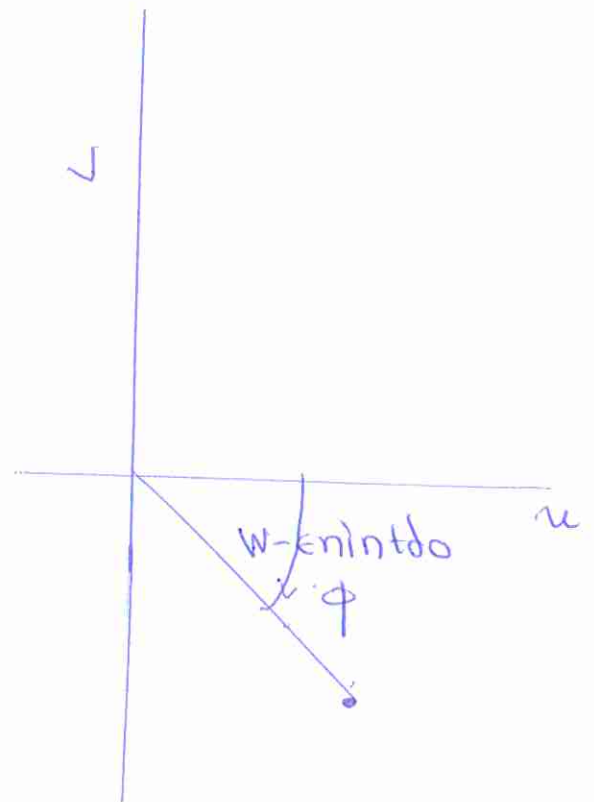
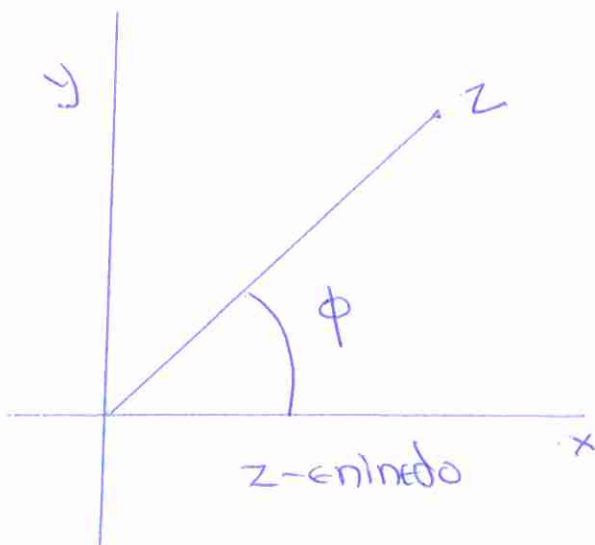
Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση

$$w = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad z = re^{i\phi}, \quad r \neq 0.$$

Τότε $w = \frac{1}{re^{i\phi}} = r^{-1}e^{-i\phi}$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η $w = \frac{1}{z}$ είναι σύμμορφη. Η συνάρτηση αυτή καλείται αντιστροφή.

Σχήμα



Παράδειγμα Έστω η $w = w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

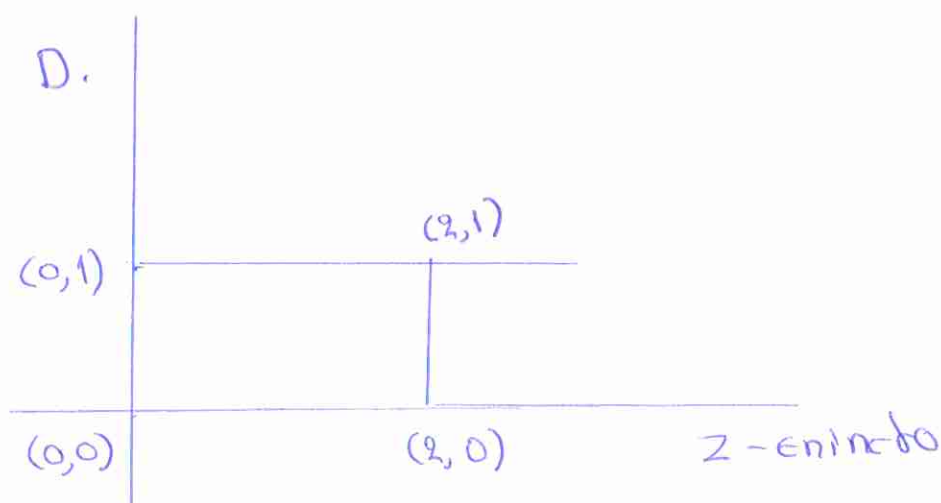
όπου $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0$, Η w ορίζεται

στο $\mathbb{C} - \left\{ \frac{d}{c} \right\}$. Μπορούμε εύκολα να

δείξουμε ότι η w είναι σύμμορφη,

Πρόταση: Εάν δοθούν 3 διακεκριμένα
σημεία z_1, z_2, z_3 του z -επιπέδου και
3 διακεκριμένα σημεία w_1, w_2, w_3 του w -επιπέδου
υπάρχει μοναδικός ομογραφικός μετασχηματισμός
 $w = w(z)$ τέτοιος ώστε $w(z_L) = w_L, L=1,2,3$.

Παράδειγμα: Έστω $w = z + (1-2i)$ και ο τόπος



Να βρεθεί η εικόνα του D .

Έχουμε $W = x + iy + 1 - 2i = x + 1 + i(y - 2)$.

Θέτουμε $u = x + 1$ και $v = y - 2$.

Θα βρούμε πρώτα την εικόνα του ενδωγράμμου τμήματος $x = 2, 0 \leq y \leq 1$. Η εικόνα είναι

$u = 3, 0 \leq v + 2 \leq 1$ δηλ. $u = 3, -2 \leq v \leq -1$.

Θα βρούμε την εικόνα του ενδωγράμμου τμήματος $y = 1, 0 \leq x \leq 2$. Η εικόνα είναι

$v = -1, 0 \leq u - 1 \leq 2$, άρα $v = -1, 1 \leq u \leq 3$.

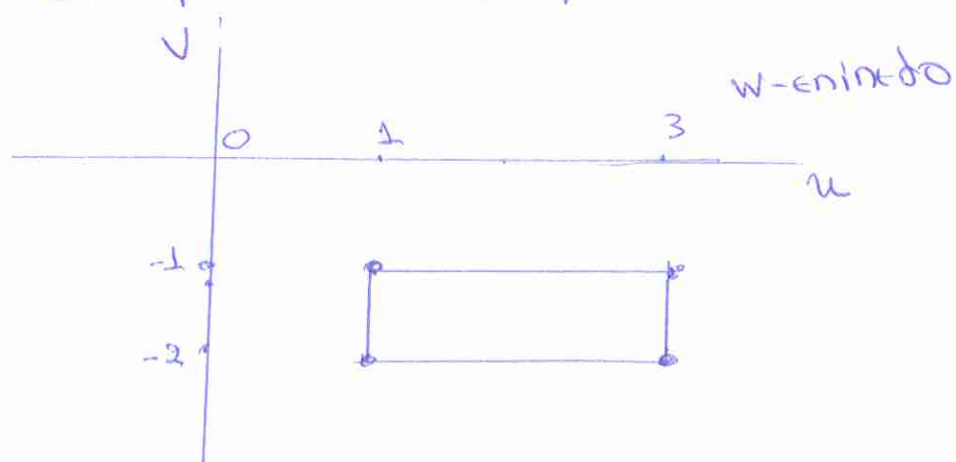
Θα βρούμε την εικόνα του ενδωγράμμου τμήματος $y = 0, 0 \leq x \leq 2$. Η εικόνα είναι

$v = -2, 0 \leq u - 1 \leq 2$, άρα $v = -2, 1 \leq u \leq 3$.

Τέλος θα βρούμε την εικόνα του ενδωγράμμου τμήματος $x = 0, 0 \leq y \leq 1$. Η εικόνα είναι

$u = 1, 0 \leq v + 2 \leq 1$, άρα $u = 1, -2 \leq v \leq -1$.

Άρα έχουμε το σχήμα:



Παράδειγμα Έστω η εικότηση
 $w = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} z$. Να βρεθεί η εικόνα της
 περιοχής D , στο w -επίπεδο.

Λύση: Έχουμε $w = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} z =$

$$\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] (x + iy) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x + iy)$$

$$= (1 + i)(x + iy) = x + iy + ix - y = x - y + i(x + y)$$

Αρα $u = x - y$, $v = x + y$.

Θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $x = 2$

Έχουμε $u = 2 - y$, $v = 2 + y \Rightarrow u = 2 - (v - 2) = 4 - v$

Αρα έχουμε την ευθεία $u + v = 4$.

Θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $x = 0$.

Έχουμε $u = -y$, $v = y$. Αρα έχουμε: $u = -v$

Θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $y = 0$

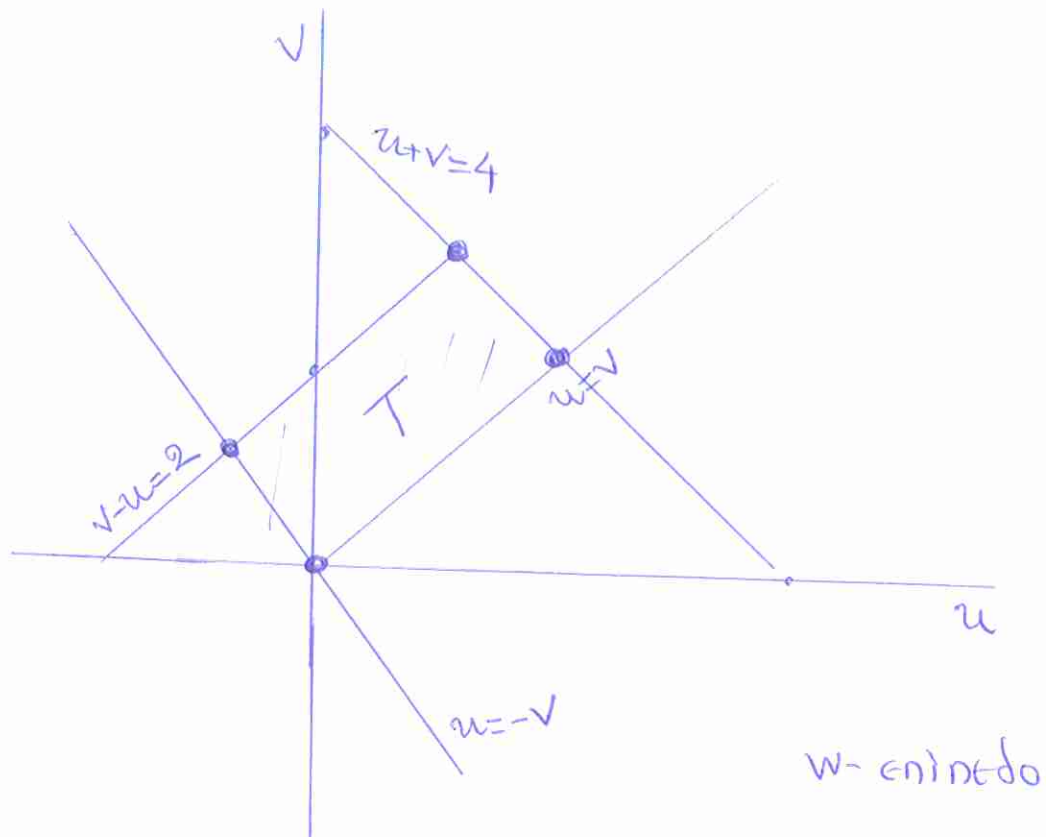
Έχουμε $u = x$, $v = x$. Αρα έχουμε την ευθεία

$$u = v$$

Τέλος θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $y = 1$

Έχουμε $u = x - 1$, $v = x + 1$. Τότε παίρνουμε την ευθεία

$v - u = 2$. Αρα έχουμε το σχήμα:



Η εικόνα της περιοχής D είναι η περιοχή T στο w -επιπέδο.

Άσκηση Έστω ο ομογραμμικός μετασχηματισμός

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}. \text{ Υποθέτουμε ότι}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0. \text{ Τότε ο } w \text{ είναι εύμορφη απεικόνιση.}$$

Λύση. Ο w είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση διότι είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων, έχουμε

$$w'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz+d)^2} \neq 0$$

Επίσης εφόσον ο w είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση για κάθε z είναι και αναλυτική.

Τέλος θα δείξουμε ότι ο w είναι μια προς μια (αμφιμονότιμη) συνάρτηση.

$$\text{Παίρνουμε } w(z_1) = w(z_2) \Rightarrow \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

$$\Rightarrow (az_1+b)(cz_2+d) = (cz_1+d)(az_2+b) \Rightarrow$$

$$acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = caz_1z_2 + cbz_1 + daz_2 + bd$$

$$\Rightarrow (ad - cb)z_1 + (bc - ad)z_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(ad - cb)(z_1 - z_2) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 \text{ εφόσον}$$

$$ad - cb \neq 0.$$

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση $w = z^2$

όπου z ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο, $z \neq 0$.

Τότε η z είναι σύμμορφη.

Λύση: Η συνάρτηση $w = z^2$ είναι παραγωγίσιμη παντού, άρα και αναλυτική. Αυτό είναι εύκολο να το δείξουμε με τις συνθήκες

Cauchy-Riemann. Γράφουμε $w = (x+iy)^2$
 $= x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$

Έχουμε $u_x = 2x, u_y = -2y, v_x = 2y, v_y = 2x$

Άρα $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Επομένως η w είναι αναλυτική. Έχουμε $w'(z) = 2z \neq 0$

Θα δείξουμε ότι είναι μία προς μία.

Παίρνουμε $z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 = 0 \Rightarrow$

$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$. Εφόσον z_1 και z_2

ανήκουν στο πρώτο τεταρτημόριο έχουμε

$z_1 + z_2 \neq 0$. Άρα $z_1 = z_2$. Επομένως η w

είναι μία προς μία. Άρα η $w = z^2$ είναι σύμμορφη.

Άσκηση. Έστω $f(z) = z^2$. Να βρεθεί η
εικόνισσα του τριγώνου $x=1, y=1, x+y=1$.

Λύση. Γράφουμε $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$
 $\Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$

Έχουμε $x=1$. Τότε $u = 1 - y^2, \quad v = 2y$. Άρα
 η εικόνισσα είναι $u = 1 - \frac{v^2}{4}$

Παίρνουμε $y=1$. Τότε $u = x^2 - 1, \quad v = 2x$

Άρα η εικόνισσα είναι $u = \frac{v^2}{4} - 1$

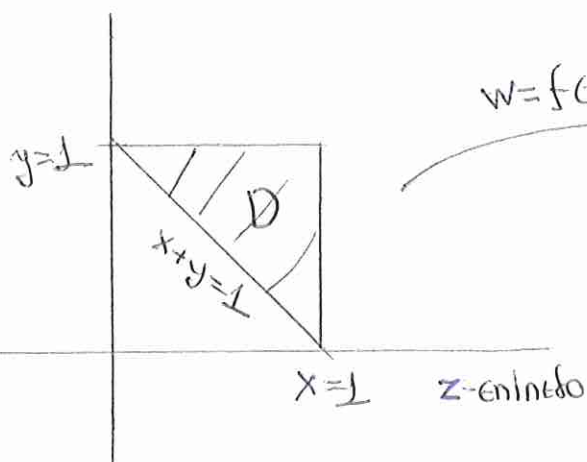
Παίρνουμε $x+y=1$. Τότε $u = (x-y)(x+y) = u = x-y$
 $v = 2xy$. Έχουμε $y = 1-x$. Άρα $u = 2x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$. Άρα η εικόνισσα είναι

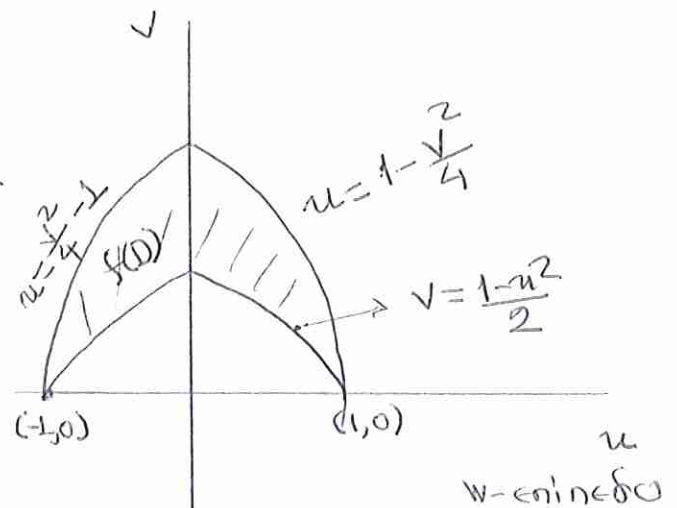
$$v = 2 \left(\frac{u+1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{u+1}{2} \right) \Rightarrow v = \frac{1}{2} (u+1)(1-u) \Rightarrow$$

$$v = \frac{1-u^2}{2}$$

Σύνοψη



$$w = f(z) = z^2$$



Επιμακρόβιο ολοκλήρωμα

Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση,
 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, θεωρούμε $c(t) = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$,
 $t \in [a, b]$ παραμετρική επίωση μακρόβιου c
στο $\mathbb{C}$, γ_1, γ_2 παραγωγίσιμες συναρτήσεις
με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[a, b]$.

Τότε ονομάζουμε επιμακρόβιο ολοκλήρωμα
της f κατά μήκος της μακρόβιου c το
ολοκλήρωμα:

$$\int_c f(z) dz = \int_c (u(x, y) + i v(x, y)) (dx + i dy) =$$

$$= \int_a^b \left(u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + i v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \right) (\gamma_1'(t) + i \gamma_2'(t)) dt$$

Παρατήρηση: Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση
και $c = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_k$. Τότε

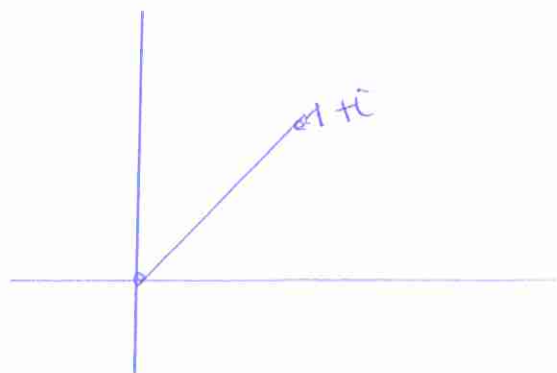
$$\int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \dots + \int_{c_k} f(z) dz$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το εμβαθύνσιο ολοκληρώμα

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz$$

όπου C το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο 0 με το $1+i$

Λύση



Έχουμε

$$I = \int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_C x (dx + i dy). \quad \text{Επίσης } C = x + i x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{Άρα } I = \int_0^1 x(1+i) dx = \frac{x^2}{2}(1+i) \Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}$$

Άσκηση Να υπολογίσετε το εμβαθύνσιο ολοκληρώμα

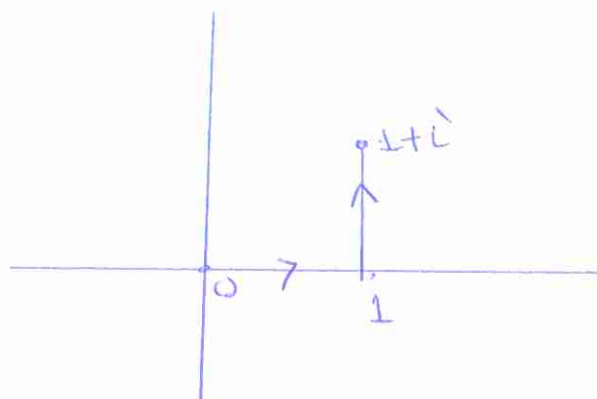
$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz$$

όπου C η καμπύλη που δίνεται: $C = C_1 \cup C_2$,

C_1 το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 0 με το 1

και C_2 το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 1 με το $1+i$

Λύση:



Εξάγε

$$I = \int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_{C_1} x (dx + i dy) + \int_{C_2} x (dx + i dy).$$

$$\begin{aligned} H \, C_1 \text{ περιγράφεται} & \quad y=0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ H \, C_2 & \quad x=1, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$I = \int_0^1 x \, dx + i \int_0^1 dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[y \right]_0^1 = \frac{1}{2} + i$$

Άσκηση: Να υπολ. το $\int_C \frac{1}{z} \, dz$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος.

Λύση: Η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\text{Άρα} \quad \int_C \frac{1}{z} \, dz = \int_C \frac{\bar{z}}{|z|^2} (dx + i dy) =$$

$$\int_C \frac{x-iy}{x^2+y^2} (dx+idy) = \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cancel{-\cos t \sin t} dt + i \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + i \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} \cancel{\cos t \sin t} dt$$

$$= i 2\pi.$$

Άσκηση: Να υπολογιστεί το $\int_{-i}^{1+i} \bar{z} dz$

δίνου $z = t + it^3, \quad t \in [-1, 1].$

Λύση Έχουμε $I = \int_{-i}^{1+i} (x-iy)(dx+idy)$

$$= \int_{-1}^0 (-t - it^3)(-1 + 3it^2) dt + \int_0^1 (t - it^3)(1 + 3it^2) dt$$

$$= \int_{-1}^0 (t - 3it^3 + it^3 + 3t^5) dt + \int_0^1 (t + 3it^3 - it^3 + 3t^5) dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 - 3i \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^0 + i \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^0 + 3 \left[\frac{t^6}{6} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 3i \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1$$

$$- i \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 + 3 \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2}i + 1 + \frac{1}{2}i = i$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το $I = \int_C |z|^2 dz$

α) όπου C η καμπύλη $y=x^2$ από το σημείο $1+i$ στο $2+4i$

β) όπου C το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $1+i$ με το $2+4i$

Λύση. α). Έχουμε $I = \int (x^2 + y^2)(dx + i dy)$.

Εφόσον $y=x^2 \Rightarrow dy=2x dx$. Άρα $I = \int_1^2 (x^2 + x^4)(dx + 2xi dx)$

$$= \int_1^2 (x^2 + x^4)(1 + 2xi) dx = \int_1^2 (x^2 + x^4) dx + i \int_1^2 (2x^3 + 2x^5) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 + i \left(2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 + 2 \left[\frac{x^6}{6} \right]_1^2 \right) = \frac{128}{15} + \frac{57}{2} i$$

β) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(1,1)$ με το $(2,4)$ έχει την εξίσωση:

$$\frac{x-1}{1-2} = \frac{y-1}{1-4} \Rightarrow 3x - y = 2 \Rightarrow y = 3x - 2. \text{ Άρα } dy = 3dx$$

$$I = \int_1^2 (x^2 + (3x-2)^2)(dx + i 3dx) = (1+3i) \int_1^2 [(x^2 + (3x-2)^2)] dx$$

$$= (1+3i) \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{(3x-2)^3}{9} \right]_1^2 \right) = (1+3i) \frac{28}{3}$$

-20-

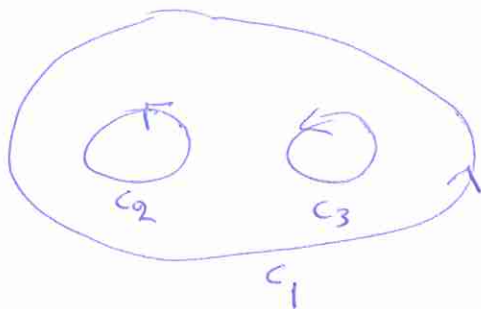
Θεωρήματα Επικαμυνθών Ολοκληρωμάτων

Θεώρημα 1^{ον} Έστω D ανοικτός τόπος με
σύνορο C που αποτελείται από ένα σύνολο
υλειστών καμυνθών που δεν τέμνονται μεταξύ τους.
Έστω η συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική στον D
και παραγωγίσιμη στο σύνορο C .

Τότε

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Παράδειγμα τόπου D με σύνορο C που αποτελείται
από ένα σύνολο υλειστών καμυνθών που δεν
τέμνονται μεταξύ τους



$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

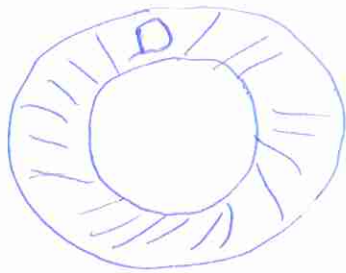
Ενώ ο τόπος D



δεν είναι της παραπάνω μορφής.

Ορισμός Απλός σωματός τόπος D καλείται
ένας τόπος στον οποίο κάθε υλειστή καμυνθή
που μένει στον D μπορεί να ενταχθεί σε ένα
σημείο χωρίς να περάσει από σημεία εσωτός του D .

Για παράδειγμα ο δαυτόλιος



δεν είναι απλός σωματός τύπος.

Θεώρημα 2^ο Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον απλό σωματός τύπο D . Θεωρούμε

z_1, z_2 σημεία του D . Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \text{ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.}$$

Ενίοτε υπάρχει συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$g'(z) = f(z) \text{ και } \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = g(z_2) - g(z_1).$$

Θεώρημα του Cauchy

Έστω συνάρτηση f αναλυτική στον D και παραχ. στο σύνορο του D που αποτελείται από ένα σύνολο υλειστών καμπυλών που δεν τέμνονται. Θεωρούμε $z_0 \in D$. Τότε ισχύει

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n=0,1,\dots$$

όπου C το σύνορο του D .

Για $n=0$ έχουμε:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Αετιήσεις Να υπολογίσετε το επταμυθίο

σλουλήρωμα $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz$ όπου

$$C: |z-2|=3$$

Λύση: Παίρνουμε $f(z)=1$, $D=\{z: |z-z_0|\leq 3\}$, $z_0=2$

Προφανώς ο D έχει όριο C μια κλειστή καμπύλη. Έχουμε

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-2}$$

Εντός έχουμε $f'(z)=0$ εφόσον $f(z)=1$.

Αρα $0 = \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz \Rightarrow \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = 0$

Αρα $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = 2\pi i$

Άσκηση Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz$
 όπου $C: |z|=1$.

Λύση: Παίρνουμε τον τύπο

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz$$

Έχουμε: $\int \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz = \int \frac{\frac{z^4+1}{8}}{(z+\frac{1}{2})^3} dz$

Θεωρούμε $f(z) = \frac{z^4+1}{8}$, $z_0 = -\frac{1}{2}$.

Άρα $f'(z) = \frac{4z^3}{8} = \frac{z^3}{2} \Rightarrow f''(z) = \frac{3}{2}z^2 \Rightarrow$

$f''(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$. Άρα

$$\frac{3}{8} \pi i = \int \frac{\frac{z^4+1}{8}}{(z+\frac{1}{2})^3} dz \Rightarrow \int \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz = \frac{3}{8} \pi i$$

Άσκηση. Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$

όπου $C: |z| = \frac{1}{2}$

Λύση Έχουμε $\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$

Άρα $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz + \int_C \frac{1}{z-1} dz$

Η συνάρτηση $\frac{1}{z-1}$ είναι αναλυτική στο τόνο

$\{z: |z| \leq \frac{1}{2}\}$ Άρα $\int_C \frac{1}{z-1} dz = 0$

Επομένως $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz$

Θέτουμε $f(z) = 1$. Άρα από την σχέση

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad \text{με } z_0 = 0$$

έχουμε $1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z} dz \Rightarrow \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$

Άρα $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = 2\pi i$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{dz}{z}$

όπου $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$

Λύση: Το σημείο $0+0i=0$ δεν ανήκει
στον τόνο $D = \{z: (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Άρα η $f(z) = \frac{1}{z}$ αναλυτική στο εσωτερικό του D

και παραγωγίσιμη στο σύνολο C . Άρα

$$\int_C \frac{dz}{z} = 0.$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$

όπου $C: |z|=2$

Λύση: Γράφουμε $\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$

Βρίσκουμε $A=B=1$. Άρα

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz + \int_C \frac{1}{z-1} dz$$

$$\text{Ισχύει για } f(z)=1, \quad 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z} dz, \quad 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-1} dz$$

$$\text{Άρα } \int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = 4\pi i$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το
επιμακρόδιο ολοκληρώτα:

$$\int_C \frac{2z^2 + 1 + z^3}{(z-2)^2} dz$$

δίου $C: z = 3 + 2e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Λύση Έχουμε $x + iy = 3 + 2\cos\theta + 2i\sin\theta$

$$\Rightarrow x-3 = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$$

Άρα το σημείο $(2,0)$ βρίσκεται εντός
του τόκου $D = \{(x,y): (x-3)^2 + y^2 \leq 4\}$

Επομένως η συνάρτηση $\frac{2z^2 + 1 + z^3}{(z-2)^2}$ δεν είναι

αναλυτική εντός του τόκου που έχει εύνορο
την μακρόδια C . Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \text{ όπου } n=1$$

και $f(z) = z^3 + 2z^2 + 1, z_0 = 2$. Άρα

$$f'(2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz$$

$$\text{Άρα } f'(z) = 3z^2 + 4z \Rightarrow f'(2) = 12 + 8 = 20$$

$$\text{Άρα } 20 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z-2)^2} dz \Rightarrow \int_C \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z-2)^2} dz = 20\pi i$$