

-1-

Άσκηση. Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας

$$y=1 \text{ μέσω της } w(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$$

Αντίστροφο έχουμε $w = \frac{z-i}{-iz+1} \Rightarrow -izw + w = z - i \Rightarrow$

$$z = \frac{w+i}{iw+1}. \text{ Από την σχέση } y=1 \text{ παίρνουμε}$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = 1 \Rightarrow \frac{w+i}{iw+1} - \frac{\bar{w}+i}{i\bar{w}+1} = 2i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{w+i}{iw+1} - \frac{\bar{w}+i}{-i\bar{w}+1} = 2i \Rightarrow$$

$$\frac{-i w \bar{w} + w + \bar{w} + i - i w \bar{w} + w i^2 - \bar{w} i^2 + i}{-i^2 w \bar{w} + i w - i \bar{w} + 1} = 2i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-w \bar{w} + 1}{w \bar{w} + i w - i \bar{w} + 1} = 1 \Rightarrow -w \bar{w} + 1 = w \bar{w} + i w - i \bar{w} + 1$$

$$\Rightarrow 2w \bar{w} + i(w - \bar{w}) = 0. \text{ Θέτουμε } w = u + iv.$$

$$\text{Τότε έχουμε } 2(u^2 + v^2) + i(u + iv - u + iv) = 0$$

$$\Rightarrow 2(u^2 + v^2) - 2v = 0 \Rightarrow u^2 + v^2 - v = 0 \Rightarrow$$

$$u^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Άρα η εικόνα είναι}$$

περίφερεια με κέντρο το $(0, \frac{1}{2})$ και ακτίνα το $\frac{1}{2}$.

Άσκηση. Έστω η συνάρτηση $W(z) = z^2$

- a) Να βρεθεί η εικόνα του πρώτου τεταρτημορίου
 b) Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $x=1$

Λύση a) Εφόσον έχουμε το πρώτο τεταρτημόριο D ισχύει $D = \{z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$\theta = \arg z$, $r = |z|$. Εφόσον

$$W(z) = z^2 \quad \text{έχουμε} \quad W(z) = r^2 e^{2i\theta}, \quad 0 \leq 2\theta \leq \pi$$

Άρα η εικόνα είναι το άνω ημικύκλιο.

- b) Θα βρούμε τώρα την εικόνα της ευθείας $x=1$. Έχουμε

$$W = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 1 - y^2 + 2iy \Rightarrow$$

$$u = 1 - y^2, \quad v = 2y \Rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4}.$$

Άρα η εικόνα είναι η παραβολή

$$u = 1 - \frac{v^2}{4}.$$

Συνέχεια, Παραγωγισινη Μιγαδικών Συναρτήσεων

Ορισμός: Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ έχει όριο το A όταν $z \rightarrow z_0$ εάν $(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0): \forall z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \epsilon$.

Ορισμός Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $z_0 \in \mathbb{C}$ όταν $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Πρόταση: Έστω $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ και $z_0 = x_0 + i y_0$. Τότε εάν η f είναι συνεχής στο z_0 , ισχύει

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Ορισμός Θα λέμε ότι η $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in \mathbb{C}$ εάν υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Ορισμός Θα λέμε ότι η $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη ή αναλυτική στο $z_0 \in \mathbb{C}$ εάν υπάρχει περιοχή $\pi(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \epsilon\}$ τέτοια ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη για κάθε $z \in \pi(z_0, \epsilon)$.

Παρατήρηση: Κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι και παραγωγίσιμη. Εάν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ είναι και αναλυτική.

Πρόταση: Ήταν και αναγκαία συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμη η $f: \phi \rightarrow \phi$ στο Z_0 είναι να ικανοποιούν οι συνθήκες Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{στο σημείο } (x_0, y_0).$$

Θεωρούμε ότι $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ και $z_0 = x_0 + i y_0$

Επίσης ικανοποιεί $f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}.$

Παρατήρηση: Εάν η $f: \phi \rightarrow \phi$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του ϕ τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ικανοποιούν οι συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Επίσης έχουμε $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

και παίρνουμε τη σχέση $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

η οποία είναι η εξίσωση του Laplace.

Οι συναρτήσεις u, v λέγονται συνζυγείς αρμονικές

Παρατήρηση, Για κάθε αρμονική συνάρτηση $u=u(x,y)$ υπάρχει αρμονική συνάρτηση $v=v(x,y)$ τέτοια ώστε η $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ να είναι αναλυτική.

Άσκηση Να βρείτε τα σημεία όπου η $f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$ είναι παραγωγίσιμη και τα σημεία όπου είναι αναλυτική.

Λύση Παίρνουμε $u(x,y)=2xy$, $v(x,y)=x^2+y^2$

Για να είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $z=x+iy$ θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{δηλαδή:}$$

$$2y=2y, \quad 2x=-2x. \quad \text{Άρα θα } x=y=0.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $z=0$.

Επίσης δεν είναι αναλυτική στο $z_0=0$ διότι δεν υπάρχει περιοχή $\pi(z_0, \epsilon)$ τέτοια ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη για κάθε $z \in \pi(z_0, \epsilon)$,

Άσκηση. Δίνεται η συνάρτηση $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $v(x,y) = 2xy + y$. Να δείξετε ότι η v είναι
 συζυγής αρμονική της u , $u(x,y) = x^2 - y^2 + x + 1$.
 και να εκφραστεί την $f = u + iv$ μόνο με την
 μεταβλητή z . Να βρείτε την $f'(z)$

Λύση: Έχουμε $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Άρα

η v είναι αρμονική. Επίσης $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$. Άρα $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Επομένως η f αναλύεται στο $\mathbb{C}$.

Επίσης έχουμε $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Άρα

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{(z + \bar{z})^2}{4} - \frac{(z - \bar{z})^2}{-4} + \frac{z + \bar{z}}{2} + 1$$

$$+ i \left(2 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = z^2 + z + 1.$$

Έχουμε $f'(z) = 2z + 1$ Επίσης από τον τύπο

$f'(z) = u_x + i v_x = (2x + 1) + i(2y) = 2z + 1.$

Άσκηση. Έστω η $f(z) = u(x,y) + i(3x^2y - y^3 + 2y)$
είναι αναλυτική συνάρτηση. Επίσης $f(1+i) = 0$.

Να υπολογίσετε την $u = u(x,y)$

Λύση Ισχύουν οι σχέσεις $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

Άρα $u_x = 3x^2 - 3y^2 + 2$, $u_y = -6xy$.

Παίρνουμε την $u_x = 3x^2 - 3y^2 + 2$. Ολοκληρώνουμε
ως προς x , θεωρώντας το y σταθερό. Τότε

$$u = x^3 - 3xy^2 + 2x + h(y) \Rightarrow u_y = -6xy + h'(y)$$

Αλλά $u_y = -6xy$. Επομένως $u_y = h'(y) - 6xy$

$$-6xy = u_y \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C, \text{ σταθερά}$$

Άρα $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x + C$

Τώρα θέλουμε $f(1+i) = 0$. Αλλά

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2 + 2x + C) + i(3x^2y - y^3 + 2y). \text{ Άρα}$$

$$1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + C + i(3 \cdot 1^2 \cdot 1 - 1^3 + 2 \cdot 1) = 0 \Rightarrow$$

$$C + 4i = 0 \Rightarrow C_1 + iC_2 + 4i = 0 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = -4$$

Άρα $f(z) = x^3 - 3xy^2 + 2x + i(3x^2y - y^3 + 2y - 4)$

Άσκηση. Έστω η $f(z) = \frac{1}{3}x^3 + i(y - \frac{1}{3}y^3)$

Να βρείτε τα σημεία όπου η f είναι παραγωγική

Λύση. Έχουμε $u(x,y) = \frac{1}{3}x^3$, $v(x,y) = y - \frac{1}{3}y^3$

Θέλουμε $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Άρα

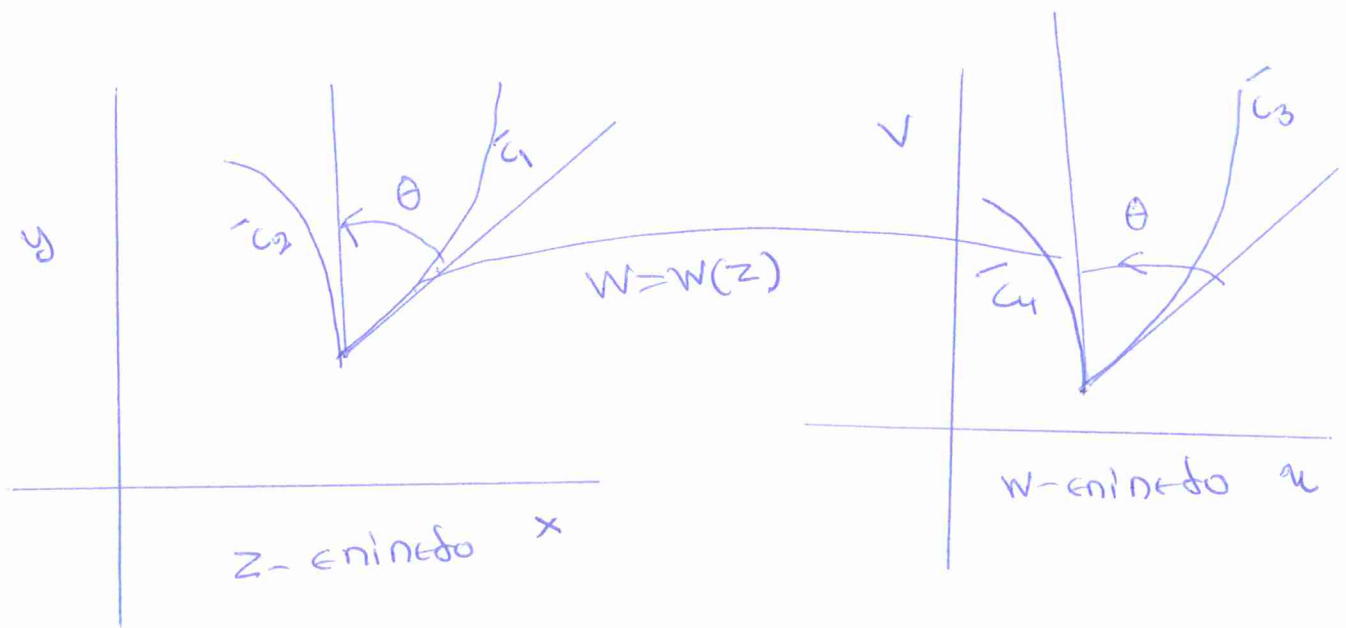
$$x^2 = 1 - y^2, \quad \cancel{1 - y^2} = 0 = 0. \quad \text{Άρα έχουμε } x^2 + y^2 = 1$$

Επομένως η $f(z)$ είναι παραγωγική στα $z = x + iy$, όπου $x^2 + y^2 = 1$

Σύμμορφες Απεικονίσεις.

Ορισμός. Έστω για εσάρτηση $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
Εάν για κάθε ζεύγος καμπύλων στο z -επίπεδο που τέμνονται κατά γωνία θ αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος καμπύλων στο w -επίπεδο που τέμνονται κατά την ίδια γωνία θ , τότε η $w(z)$ καλείται σύμμορφη.

Σχήμα



Πρόταση: Έστω ότι η εσάρτηση $w = w(z)$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, ένα προς ένα (σμφιμονότιμη) και $f'(z) \neq 0$, για $z \in \mathbb{C}$, τότε η w είναι σύμμορφη.

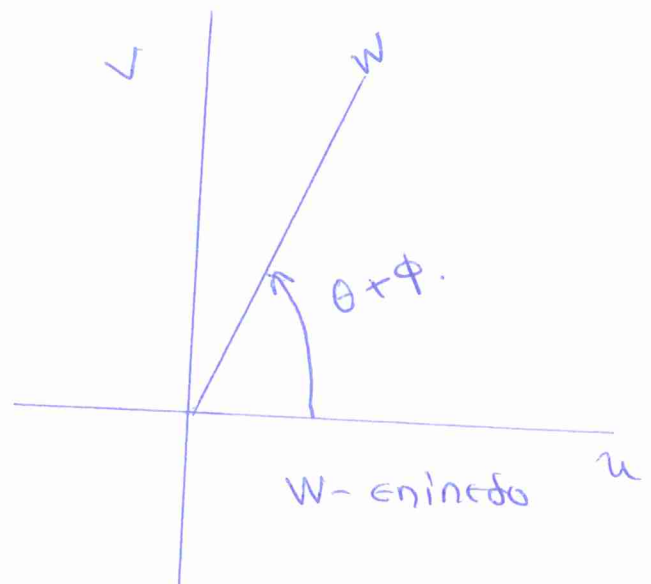
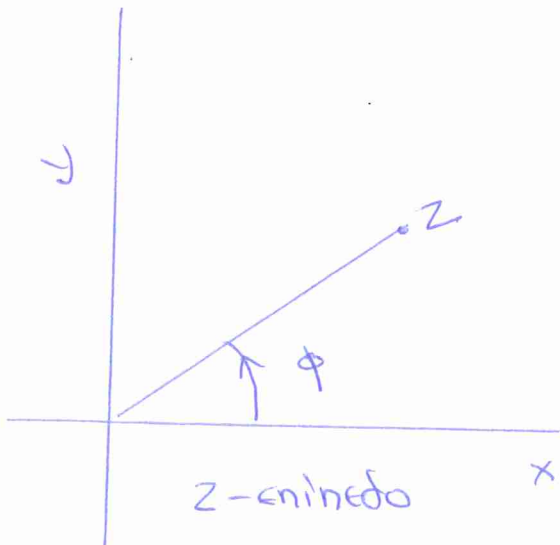
Παράδειγμα

Έστω η
 συνάρτηση $w = a e^{i\theta} z$, όπου a, θ σταθερές,
 με $a \neq 0$. Τότε μπορούμε εύκολα
 να δείξουμε ότι η w είναι ελκμορφική

Εάν $z = r e^{i\phi}$, $r = |z|$, $\phi = \arg z$, τότε

$$w = a e^{i\theta} r e^{i\phi} = a r e^{i(\theta+\phi)}$$

Σχήμα



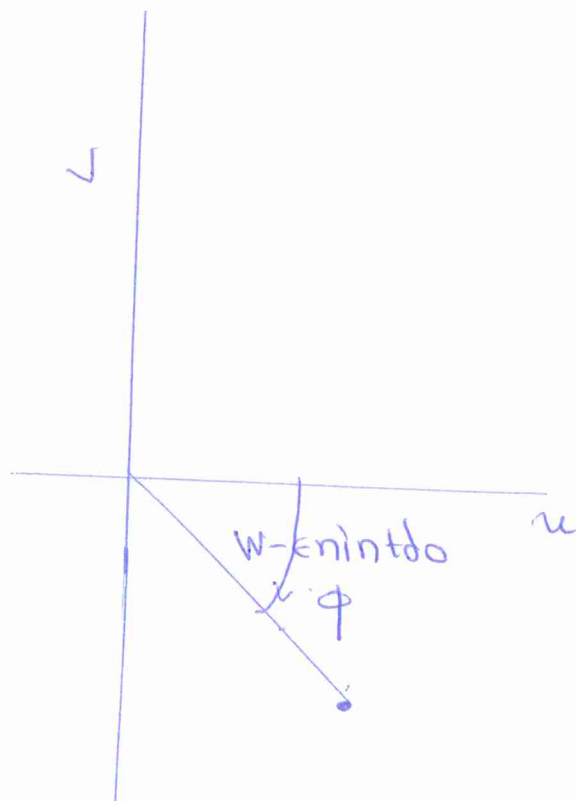
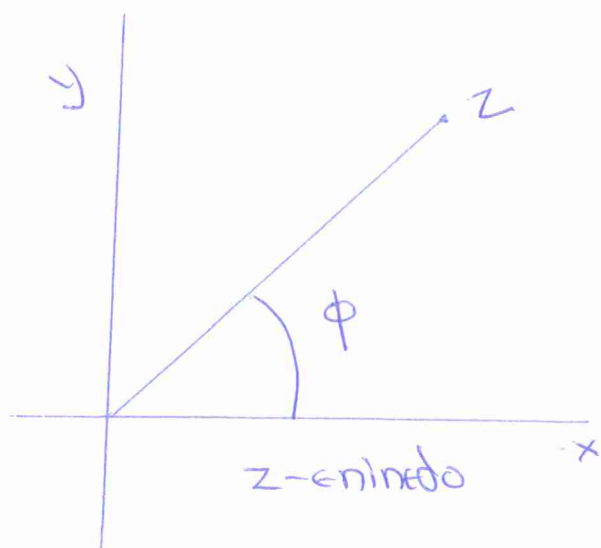
Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση

$$w = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad z = re^{i\phi}, \quad r \neq 0.$$

Τότε $w = \frac{1}{re^{i\phi}} = r^{-1}e^{-i\phi}$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η $w = \frac{1}{z}$ είναι σύμμορφη. Η συνάρτηση αυτή καλείται αντιστροφή.

Σχήμα



Παράδειγμα Έστω η $w = w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

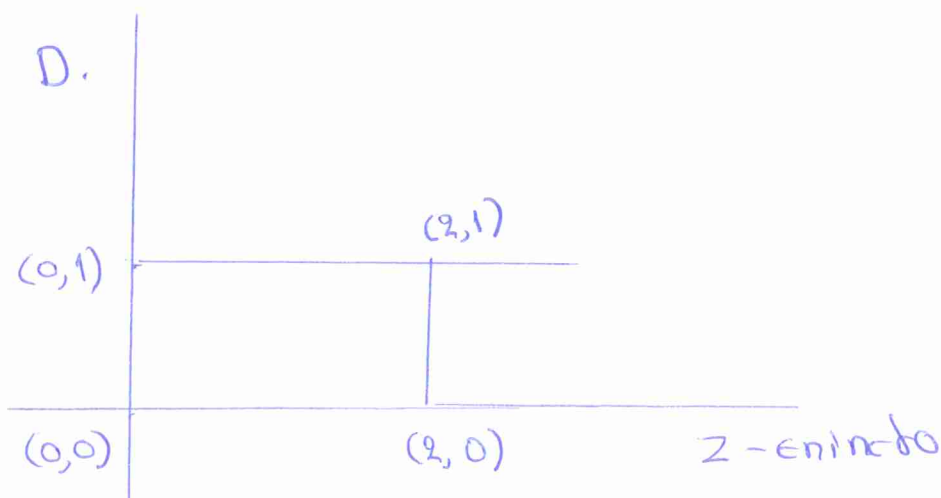
όπου $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0$. Η w ορίζεται

στο $\mathbb{C} - \left\{ \frac{d}{c} \right\}$. Μπορούμε εύκολα να

δείξουμε ότι η w είναι σύμμορφη.

Πρόταση: Εάν δοθούν 3 διακεκριμένα σημεία z_1, z_2, z_3 του z -επιπέδου και 3 διακεκριμένα σημεία w_1, w_2, w_3 του w -επιπέδου υπάρχει μοναδικός ομογραφικός μετασχηματισμός $w = w(z)$ τέτοιος ώστε $w(z_L) = w_L$, $L=1,2,3$.

Παράδειγμα: Έστω $w = z + (1-2i)$ και ο τόπος



Να βρεθεί η εικόνα του D .

Έχουμε $W = x + iy + 1 - 2i = x + 1 + i(y - 2)$.

Θέτουμε $u = x + 1$ και $v = y - 2$.

Θα βρούμε πρώτα την εικόνα του ενδογράφου τμήματος $x=2, 0 \leq y \leq 1$. Η εικόνα είναι

$u=3, 0 \leq v+2 \leq 1$ δηλ. $u=3, -2 \leq v \leq -1$.

Θα βρούμε την εικόνα του ενδογράφου τμήματος $y=1, 0 \leq x \leq 2$. Η εικόνα είναι

$v=-1, 0 \leq u-1 \leq 2$, άρα $v=-1, 1 \leq u \leq 3$.

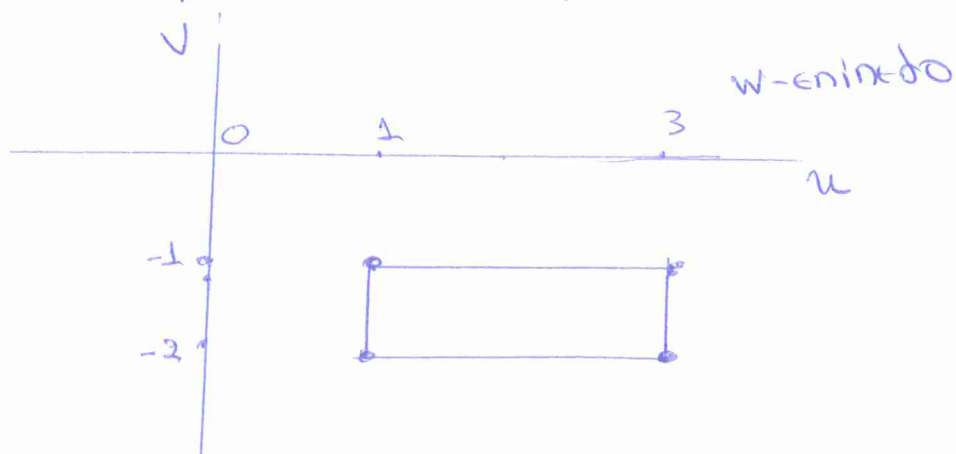
Θα βρούμε την εικόνα του ενδογράφου τμήματος $y=0, 0 \leq x \leq 2$. Η εικόνα είναι

$v=-2, 0 \leq u-1 \leq 2$, άρα $v=-2, 1 \leq u \leq 3$.

Τέλος θα βρούμε την εικόνα του ενδογράφου τμήματος $x=0, 0 \leq y \leq 1$. Η εικόνα είναι

$u=1, 0 \leq v+2 \leq 1$, άρα $u=1, -2 \leq v \leq -1$.

Άρα έχουμε το σχήμα:



Παράδειγμα Έστω η εικότηση

$w = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z$. Να βρεθεί η εικόνα της περιοχής D , στο w -επίπεδο.

Λύση: Έχουμε $w = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z =$

$$\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] (x + iy) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x + iy)$$

$$= (1 + i)(x + iy) = x + iy + ix - y = x - y + i(x + y)$$

Αρα $u = x - y$, $v = x + y$.

Θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $x = 2$

Έχουμε $u = 2 - y$, $v = 2 + y \Rightarrow u = 2 - (v - 2) = 4 - v$

Αρα έχουμε την ευθεία $u + v = 4$.

Θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $x = 0$.

Έχουμε $u = -y$, $v = y$. Αρα έχουμε: $u = -v$

Θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $y = 0$

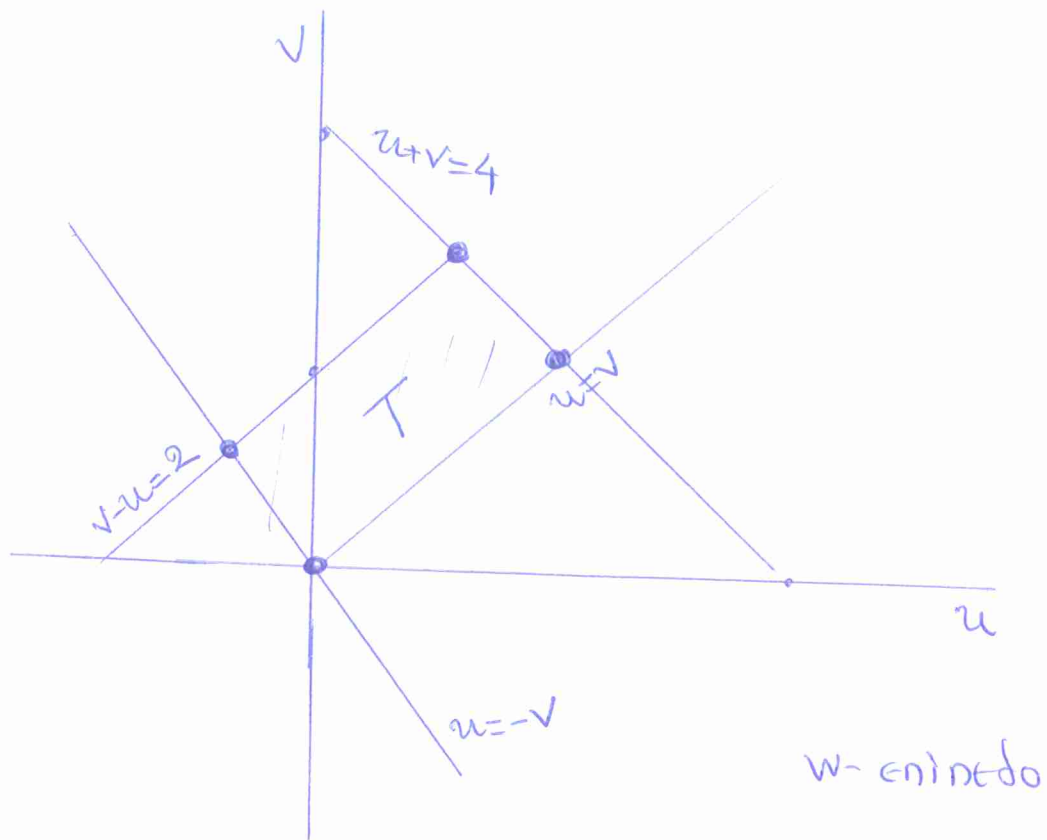
Έχουμε $u = x$, $v = x$. Αρα έχουμε την ευθεία

$$u = v$$

Τέλος θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $y = 1$

Έχουμε $u = x - 1$, $v = x + 1$. Τότε παίρνουμε την ευθεία

$v - u = 2$. Αρα έχουμε το σχήμα:



Η εικόνα της περιοχής D είναι η περιοχή T στο w -επίπεδο.

Επιμακρόλιθο Ολοκληρώματα

Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση,
 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Θεωρούμε $c(t) = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$,
 $t \in [a, b]$ παραμετρική επίλυση μακρόλιθου c
στο $\mathbb{C}$, γ_1, γ_2 παραγωγίσιμες συναρτήσεις
με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[a, b]$.

Τότε ονομάζουμε επιμακρόλιθο ολοκληρώματα
της f κατά μήκος της μακρόλιθου c το
ολοκληρώμα:

$$\int_c f(z) dz = \int_c (u(x, y) + i v(x, y)) (dx + i dy) =$$

$$= \int_a^b \left(u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + i v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \right) (\gamma_1'(t) + i \gamma_2'(t)) dt$$

Παρατήρηση: Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση
και $c = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_k$. Τότε

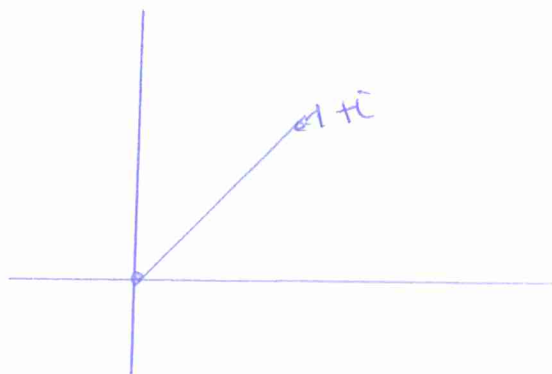
$$\int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \dots + \int_{c_k} f(z) dz$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το επιβαρυντικό ολοκλήρωμα

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz$$

όπου C το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο 0 με το $1+i$

Λύση



Έχουμε

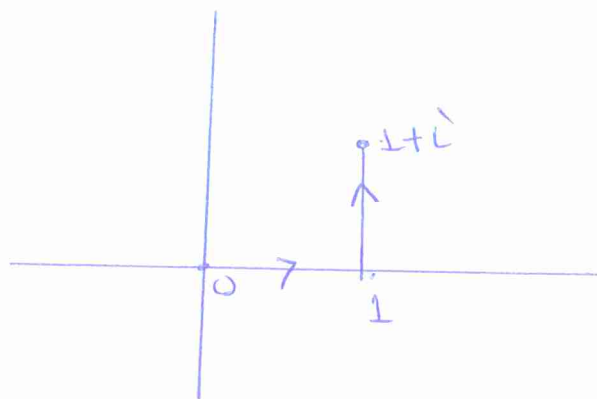
$$I = \int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_C x (dx + i dy) \quad \text{Επίσης } C = x + i x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{Άρα } I = \int_0^1 x(1+i) dx = \left. \frac{x^2}{2}(1+i) \right|_0^1 = \frac{1+i}{2}$$

Άσκηση Να υπολογίσετε το επιβαρυντικό ολοκλήρωμα

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz$$

όπου C η καμπύλη που δίνεται: $C = C_1 \cup C_2$,
 C_1 το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 0 με το 1
 και C_2 το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 1
 με το $1+i$

Λύση:

Εξάφ.

$$I = \int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_{C_1} x(dx+idy) + \int_{C_2} x(dx+idy).$$

$$H \text{ } C_1 \text{ περιγράφεται } y=0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$H \text{ } C_2 \quad \quad \quad x=1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Άρα

$$I = \int_0^1 x \, dx + i \int_0^1 dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + i \left[y \right]_0^1 = \frac{1}{2} + i$$

Άσκηση: Να υπολ. το $\int_C \frac{1}{z} \, dz$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος.

Λύση: Η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\text{Άρα } \int_C \frac{1}{z} \, dz = \int_C \frac{\bar{z}}{|z|^2} (dx+idy) =$$

$$\int_C \frac{x-iy}{x^2+y^2} (dx+idy) = \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t) (-\sin t + i \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cancel{-\cos t \sin t} dt + i \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + i \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} \cancel{\cos t \sin t} dt$$

$$= i 2\pi.$$

Argument: Na υπολογιστέ το $\int_{1-i}^{1+i} \bar{z} dz$

know $z = t + it^3, \quad t \in [-1, 1].$

Answer Example $I = \int_{1-i}^{1+i} (x-iy)(dx+idy)$

$$= \int_{-1}^0 (-t - it^3)(-1 + 3it^2) dt + \int_0^1 (t - it^3)(1 + 3it^2) dt$$

$$= \int_{-1}^0 (t - 3it^3 + it^3 + 3t^5) dt + \int_0^1 (t + 3it^3 - it^3 + 3t^5) dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 - 3i \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^0 + i \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^0 + 3 \left[\frac{t^6}{6} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 3i \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1$$

$$- i \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 + 3 \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2}i + 1 + \frac{1}{2}i = i$$

-20-

Θεωρήματα Επικαμυνθίων Ολοκληρωμάτων

Θεώρημα 1^{ον} Έστω D ανοικτός τόπος με σύνορο C που αποτελείται από ένα σύνολο υλειστών καμυνθίων που δεν τέμνονται μεταξύ τους.

Έστω η εγάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική στον D και παραγωγισμένη στο σύνορο C .

Τότε

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Παράδειγμα τόπου D με σύνορο C που αποτελείται από ένα σύνολο υλειστών καμυνθίων που δεν τέμνονται μεταξύ τους



ενώ ο τόπος D

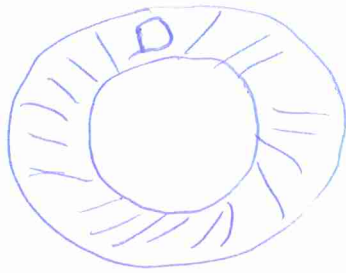


δεν είναι της παραπάνω μορφής

Ορισμός Ανοικτός εναρής τόπος D καλείται

ένας τόπος στον οποίο κάθε υλειστή καμυνθία που μένει στον D μπορεί να ενταθεί σε ένα σμήλο χωρίς να περάσει από σμήλο ετός του D .

Για παράδειγμα ο δαυτόλιος



δεν είναι απλός εσωφής τόπος.

Θεώρημα 2^ο Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον απλό εσωφής τόπο D . Θεωρούμε

z_1, z_2 σημεία του D . Τότε το ολοκλήρωμα

$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.

Επίσης υπάρχει συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$g'(z) = f(z) \text{ και } \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = g(z_2) - g(z_1).$$

Θεώρημα του Cauchy

Έστω συνάρτηση f αναλυτική στον D και παραχ. στο σύνορο του D που αποτελείται από ένα σύνολο υλειτών καμπυλών που δεν τέμνονται. Θεωρούμε $z_0 \in D$. Τότε ισχύει

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n=0,1,\dots$$

όπου C το σύνορο του D .

Για $n=0$ έχουμε:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Αευνήσεις Να υπολογίσετε το επταμνηστικό ολοκλήρωμα $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz$ όπου

$$C: |z-2|=3$$

Λύση: Παίρνουμε $f(z)=1$, $D=\{z: |z-z_0|\leq 3\}$, $z_0=2$

Προφανώς ο D έχει εσωρό C μια κλειστή καμπύλη. Έχουμε

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-2}$$

Εντός έχουμε $f'(2)=0$ εφόσον $f(z)=1$.

Αρα

$$0 = \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z-2)^2} \Rightarrow \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = 0$$

Αρα

$$\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = 2\pi i$$

Άσκηση Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz$
όπου $C: |z|=1$.

Λύση: Παίρνουμε τον τύπο

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz$$

Έχουμε: $\int \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz = \int \frac{\frac{z^4+1}{8}}{(z+\frac{1}{2})^3} dz$

Θεωρούμε $f(z) = \frac{z^4+1}{8}$, $z_0 = -\frac{1}{2}$.

Αρα $f'(z) = \frac{4z^3}{8} = \frac{z^3}{2} \Rightarrow f''(z) = \frac{3}{2}z^2 \Rightarrow$

$f''(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$. Αρα

$$\frac{3}{8} \pi i = \int \frac{\frac{z^4+1}{8}}{(z+\frac{1}{2})^3} dz \Rightarrow \int \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz = \frac{3}{8} \pi i$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{dz}{z}$

όπου $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$

Λύση: Το σημείο $0+0i=0$ δεν ανήκει
στον τόπο $D = \{z: (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Άρα η $f(z) = \frac{1}{z}$ αναλυτική στο εσωτερικό του D

και παραγωγίσιμη στο σύνορο C . Άρα

$$\int_C \frac{dz}{z} = 0.$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$

όπου $C: |z|=2$

Λύση: Γράφουμε $\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$

Βρίσκουμε $A=B=1$. Άρα

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz + \int_C \frac{1}{z-1} dz$$

$$\text{Ισχύει για } f(z)=1, \quad 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z} dz, \quad 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-1} dz$$

$$\text{Άρα } \int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = 4\pi i$$