

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ.: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2026 στο μάθημα:
“ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 1. \quad (1 \mu)$$

β) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης τύπου Bernoulli

$$y' - xy = xy^3. \quad (1,5 \mu)$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

α) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''' + y'' = y' + y. \quad (1 \mu)$$

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$y'' - 4y' + 4y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \quad (1,5 \mu)$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

(α) (i) Να γραφεί στην τριγωνομετρική μορφή του ο αριθμός $z = -\sqrt{3} + i$. (0,5μ)

(ii) Να δείξετε ότι $(-\sqrt{3} + i)^{10} = 512(1 + \sqrt{3}i)$ (0,5μ)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$.

(i) Να αποδειχθεί ότι η u είναι αρμονική. (0,5μ)

(ii) Να βρεθεί συνάρτηση $v(x, y)$ με $v(0, 1) = 0$, τέτοια ώστε η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ να είναι αναλυτική. (1μ)

(iii) Να βρεθεί ο τύπος της $f(z)$ συναρτήσει του $z = x + iy$. (0,5μ)

Δίνεται ότι: - Αν $f = u + iv$ αναλυτική τότε C.R.: $u_x = v_y, u_y = -v_x$

- Αν $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, τότε u αρμονική αν $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

(α) Ένας φοιτητής ισχυρίζεται, λανθασμένα, ότι η ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης συνεπάγεται και την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier. Να δώσετε ένα τεκμηριωμένο αντιπαράδειγμα, δηλαδή μια συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει, ενώ ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (0,5μ)

(β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = 2y + z, z' = -y + 2z, y(0) = 1, z(0) = -1$, με χρήση μετασχηματισμού Laplace. (1,5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

$$\begin{aligned}\alpha) \quad y(x) &= e^{-\int p(x)dx} \left[c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right] \Rightarrow y(x) = e^{-\int (-2)dx} \left[c + \int e^{3x} e^{\int (-2)dx} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{\int 2xdx} \left[c + \int e^{2x} e^{-\int 2xdx} dx \right] \Rightarrow y(x) = e^{2x} \left[c + \int e^{2x} e^{-2x} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{2x} \left[c + \int dx \right] \Rightarrow y(x) = e^{2x} (c + x).\end{aligned}$$

Επειδή $y(0) = 1$ έχουμε

$$1 = ce^0 + 0 \Rightarrow c = 1.$$

Άρα

$$y(x) = e^{2x} + x$$

β) Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-3}$

$$\text{προκύπτει} \quad y^{-3} y' - y^{-3} xy = y^{-3} xy^3 \Rightarrow y^{-3} y' - xy^{-2} = x.$$

$$\text{Θέτουμε} \quad u(x) = y^{1-3} \Rightarrow u(x) = y^{-2} \Rightarrow u'(x) = -2y^{-3} y' \Rightarrow y^{-3} y' = -\frac{1}{2} u'(x).$$

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$-\frac{1}{2} u' - xu = x \Rightarrow u' + 2xu = -2x.$$

Η ΔΕ στην οποία καταλήξαμε είναι γραμμική. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int 2xdx} \left[c + \int (-2x) e^{\int 2xdx} dx \right] = e^{-x^2} \left[c - \int 2xe^{x^2} dx \right] = e^{-x^2} [c - e^{x^2}] = ce^{-x^2} - 1$$

Άρα γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{ce^{-x^2} - 1}}.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

α) Η ΔΕ γράφεται

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

δηλ. είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 3^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^3 + \omega^2 - \omega - 1 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = 1$, $\omega_{2,3} = -1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}, \text{ όπου } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι μη ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ

$$y'' - 4y' + 4y = e^x$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 - 4\omega + 4 = 0$$

της οποίας οι ρίζες είναι $\omega_{1,2} = 2$. Συνεπώς

$$y_{om} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \text{ όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Οπότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = \alpha e^x.$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους

$$y' = \alpha e^x, \quad y'' = \alpha e^x$$

στη ΔΕ προκύπτει

$$\alpha e^x - 4\alpha e^x + 4\alpha e^x = e^x \Rightarrow \alpha e^x = e^x \Rightarrow \alpha = 1$$

Άρα

$$y_\mu = e^x.$$

και επομένως η ζητούμενη γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = y_{om} + y_\mu = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x, \text{ όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $y(0) = 1$ έχουμε

$$1 = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 e^0 + e^0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Υπολογίζουμε

$$y = c_2 x e^{2x} + e^x \Rightarrow y' = c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + e^x.$$

Επειδή $y'(0) = 2$ έχουμε

$$2 = c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = 1.$$

Άρα

$$y = y_{om} + y_\mu = x e^{2x} + e^x.$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

(α) (i) Αν $z = -\sqrt{3} + i = re^{i\theta}$, τότε $r = |z| = 2$ και $\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}}$ ή $\theta = \kappa\pi - \pi/6$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Καθώς ο z βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο, επιλέγουμε $\kappa = 1$. Άρα, $z = 2e^{5\pi/6 i}$

(ii) Είναι $(e^{5\pi/6 i})^{10} = e^{10(5\pi/6 i)} = e^{25\pi/3 i} = e^{(8\pi + \pi/3)i} = e^{8\pi i} e^{i\pi/3} = e^{i\pi/3}$ και

$$(-\sqrt{3} + i)^{10} = 2^{10} e^{i\pi/3} = 1024 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 512(1 + \sqrt{3}i)$$

(β) (i) $u_x = 2x + 2$, $u_{xx} = 2$, $u_y = -2y$, $u_{yy} = -2$ και $u_{xx} + u_{yy} = 0$ άρα η u είναι αρμονική.

(ii) Από C.R. είναι $v_y = u_x = 2x + 2$. Ολοκληρώνοντας ως προς y , παίρνουμε
 $v(x, y) = 2xy + 2y + c(x) \rightarrow v_x(x, y) = 2y + c'(x)$.

Όμως $v_x = -u_y = 2y$, άρα $2y + c'(x) = 2y$ ή $c'(x) = 0$ ή $c(x) = c \in \mathbb{R}$.

Βρήκαμε, $v(x, y) = 2xy + 2y + c$. Καθώς $v(0, 1) = 0$, βρίσκουμε $c = -2$ και
 $v(x, y) = 2xy + 2y - 2$.

(iii) Είναι $f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y - 2)$
 $= (x^2 + 2xyi + (iy)^2 + 2(x + iy) - 2i)$
 $= (x + iy)^2 + 2(x + iy) - 2i$
 $= z^2 + 2z - 2i$

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

(α) Σωστές απαντήσεις είναι όλες οι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες το ολοκλήρωμα $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ δεν υπάρχει αλλά το $\mathcal{L}(f)(s) =$

$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx$ υπάρχει για κατάλληλο s . Μία ενδεικτική σωστή απάντηση είναι η συνάρτηση $f(x) = 1$, για την οποία το $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega x) dx$ (είναι γνωστό ότι) δεν υπάρχει αλλά το $\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx$ υπάρχει για $s \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(s) > 0$.

(β) Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και το σύστημα δ.ε. γίνεται γραμμικό σύστημα ως προς τους μετασχηματισμούς Laplace των λύσεων. Ακολουθεί η επίλυση του γραμμικού συστήματος και η εφαρμογή του αντίστροφου Laplace.

Τελική λύση του συστήματος: $z(t) = -e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t$ και $y(t) = e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t$.