

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ.: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2024 στο μάθημα:
“ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

α) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' - 2y = e^{3x} \quad (1,0 \mu)$$

β) Να βρεθεί, σε πεπλεγμένη μορφή, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{3x^2 y + 2x \cos y}{-x^3 + x^2 \sin y + y}. \quad (1,5 \mu)$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

α) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''' - y'' = y' - y. \quad (1,0 \mu)$$

β) Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 9y = 18x. \quad (1,5 \mu)$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

(α) Αν z^* ο συζυγής του z , να δείξετε ότι η εξίσωση $z \cdot z^* - i z^* + iz = 3$ περιγράφει τον κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το i και ακτίνα 2.

(1,0 μ)

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις u , v είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

(0,8 μ)

(γ) Δίνονται οι συναρτήσεις $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Αν $f(x+iy) = u(x, y) + i v(x, y)$, να βρείτε τον τύπο της f ως προς τη μεταβλητή $z = x + iy$.

(0,7 μ)

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

(α) Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της παράστασης

$$\frac{s+1}{s(s-2)}, s > 1.$$

(1,2 μ)

(β) Να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Laplace για να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) - 2y(t) = 1, t \geq 0, \text{ με } y(0) = 1.$$

(1,3 μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

$$\begin{aligned}\alpha) \quad y(x) &= e^{-\int p(x)dx} \left[c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right] \Rightarrow = e^{-\int (-2)dx} \left[c + \int e^{3x} e^{\int (-2)dx} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{\int 2x dx} \left[c + \int e^{3x} e^{-\int 2x dx} dx \right] \Rightarrow = e^{2x} \left[c + \int e^{3x} e^{-2x} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{2x} \left[c + \int e^x dx \right] \Rightarrow = c e^{2x} + e^{3x}.\end{aligned}$$

β) Η ΔΕ γράφεται

$$(3x^2 y + 2x \cos y) dx + (x^3 - x^2 \sin y - y) dy = 0$$

Ελέγχουμε και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y + 2x \cos y) = 3x^2 - 2x \sin y = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 - x^2 \sin y - y)$$

Υπολογίζουμε τη λύση $g(x,y)$ της ΔΕ, λύνοντας τις ακόλουθες ΔΕΜΠ.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 y + 2x \cos y \Rightarrow g(x, y) = x^3 y + x^2 \cos y + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (x^3 y - x^2 \cos y + \varphi(y)) = x^3 - x^2 \sin y - y$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 \sin y + \varphi'(y) = x^3 - x^2 \sin y - y$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -y$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

Άρα

$$g(x, y) = x^3 y + x^2 \cos y - \frac{y^2}{2} + c$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

α) Η ΔΕ είναι μη ομογενής γραμμική ΔΕ 3^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^3 - \omega^2 - \omega - 1 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = -1$, $\omega_{2,3} = 1$

Αρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x, \text{ όπου } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

β) Η ΔΕ είναι μη ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 + 9 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = \pm 3i$.

Αρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y_{om} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x,$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Το 0 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Οπότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = \alpha x + \beta.$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους $y' = \alpha$, $y'' = 0$ στη ΔΕ προκύπτει

$$9(\alpha x + \beta) = 18 \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha = 18 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Αρα

$$y_\mu = 2x.$$

και επομένως η ζητούμενη γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = y_{om} + y_\mu = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + 2x, \text{ όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)(α) Εξίσωση κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το i και ακτίνα 2:

$$|z - i| = 2 \Leftrightarrow |z - i|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$(z - i)(z - i)^* = 4 \Leftrightarrow$$

$$(z - i)(z^* + i) = 4 \Leftrightarrow$$

$$zz^* - iz^* + iz + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$zz^* - iz^* + iz = 3.$$

$$(\beta) u_x = 3x^2 - 3y^2, u_y = -6xy, v_x = 6xy, v_y = 3x^2 - 3y^2.$$

Παρατηρούμε ότι $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ (συνθήκες Cauchy – Riemann) και οι u_x, v_y, u_y, v_x , είναι συνεχείς, άρα η συνάρτηση $f = u + iv: C \rightarrow C$, είναι αναλυτική.

$$\begin{aligned} (\gamma) f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \\ &= x^3 + 3x(iy)^2 + 3x^2(iy) + (iy)^3 \\ &= (x + iy)^3 \\ &= z^3. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

$$(\alpha) \frac{s+1}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} = \frac{(A+B)s-2A}{s(s-2)}$$

Εξισώνοντας βρίσκουμε $-2A = 1$, $A + B = 1$ ή $A = -1/2$ και $B = 3/2$.

Από την παραπάνω ανάλυση και τη γραμμικότητα του αντίστροφου Laplace:

$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s(s-2)}\right) = -\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{3}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}$$

(β)

$$y' - 2y = 1 \Leftrightarrow L(y' - 2y)(s) = L(1)(s) \Leftrightarrow$$

$$L(y')(s) - 2L(y)(s) = L(1)(s) \Leftrightarrow sL(y)(s) - 1 - 2L(y)(s) = 1/s \Leftrightarrow$$

$$(s-2)L(y)(s) = (s+1)/s \Leftrightarrow L(y)(s) = (s+1)/[s(s-2)] \Leftrightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}((s+1)/[s(s-2)])(t) = -1/2 + 3/2 e^{2t} \text{ (από (α))}$$