Δ.3.1 Συστήματα γραμμικών ΔΕ

Παραδ. α) Ν.δ.ο. τα διανύσματα $Y_1 = \begin{bmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{bmatrix}$, $Y_2 = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix}$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$.

β) Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος.

Απ. α) Το γραμμικό σύστημα ΔΕ είναι ομογενές, και υπό μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$Y' = AY$$

όπου $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Η Y_1 είναι λύση γιατί $A\cdot Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix} = Y_1'$

〃 Y_2 〃 〃 〃 $A\cdot Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{bmatrix} = Y_2'$

β) Έχουμε

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$$

Επομένως οι Y_1 και Y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Άρα η ζητούμενη γενική λύση θα είναι της μορφής

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 \begin{bmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ -c_1 \cos x + c_2 \sin x \end{bmatrix}.$$

$\square$

* Οι δύο τρόποι με τους οποίους μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών ΔΕ με σταθερούς συντελεστές, είναι

1) η μέθοδος απαλοιφής και

2) η μέθοδος πινάκων.

* Η μέθοδος απαλοιφής

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ανάγουμε το σύστημα n ΔΕ σε ΔΕ n τάξης, πραγματοποιώντας κατάλληλες αντικαταστάσεις.

Παράδ. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος γραμμικών ΔΕ

$$y_1' = 2y_1 + 3y_2 \qquad (i)$$

$$y_2' = 2y_1 + y_2 + e^x \qquad (ii)$$

Απ. Παραγωγίζοντας την (i) προκύπτει

$$y_1'' = 2y_1' + 3y_2'$$

Οπότε, λόγω της (ii), έχουμε

$$y_1'' = 2y_1' + 3(2y_1 + y_2 + e^x) \Rightarrow$$

$$y_1'' = 2y_1' + 6y_1 + 3y_2 + 3e^x$$

Όμως απ' την (i) έχουμε $y_2 = \frac{1}{3}(y_1' - 2y_1)$.

Επομένως

$$y_1'' = 2y_1' + 6y_1 + 3\cdot\frac{1}{3}(y_1' - 2y_1) + 3e^x \Rightarrow$$

$$y_1'' = 2y_1' + 6y_1 + \quad y_1' - 2y_1 + 3e^x \Rightarrow$$

$$y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 3e^x$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω ΔΕ είναι

$$\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$$

και έχει ρίζες $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = 4$.

Συνεπώς

$$y_{1o\mu} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3.2.5

Αναζητούμε μία μερική λύση της μορφής

$$y = ae^{x} \Rightarrow y' = ae^{x} \Rightarrow y'' = ae^{x}.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τις παραγώγους αυτές, στη ΔΕ, προκύπτει

$$ae^{x} - 3ae^{x} - 4ae^{x} = 3e^{x} \Rightarrow -6ae^{x} = 3e^{x} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως $y_{1\mu} = -\frac{1}{2}e^{x}$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ θα είναι

$$y_1 = y_{1o\mu} + y_{1\mu} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{1}{2}e^{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς

$$y_2 = \frac{1}{3}(y_1' - 2y_1) = \frac{1}{3}\left(-c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{4x} - \frac{1}{2}e^{x}\right) - \frac{2}{3}\left(c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{1}{2}e^{x}\right) =$$

$$= -\frac{c_1}{3}e^{-x} + \frac{4c_2}{3}e^{4x} - \frac{1}{6}e^{x} - \frac{2c_1}{3}e^{-x} - \frac{2c_2}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{x} =$$

$$= -c_1 e^{-x} + \frac{2}{3}c_2 e^{4x} + \frac{1}{6}e^{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\square$

* Μέθοδος πινάκων

Στη μέθοδο αυτή, χρησιμοποιούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, προκειμένου να επιλύσουμε ένα σύστημα γραμμικών ΔΕ με σταθερούς συντελεστές.

Η μέθοδος αυτή περιγράφεται στη Δ.3.2 /σελ. 3-6.

Παράδ. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$y_1' = y_1 + 2y_2 - y_3$$
$$y_2' = y_1 - y_2$$
$$y_3' = 2y_1 - 2y_2$$

Απ. Από τη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

προκύπτουν οι ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1.$$

Για $\boxed{\lambda_1=-1}$ έχουμε

$$(A-\lambda_1 I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&2&-1\\1&0&0\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned}2x+2y-z&=0\\x&=0\\2x-2y+z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x&=0\\z&=2y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\y\\2y\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{u}_1=c\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\quad c\in\mathbb{R}.$$ Θέτοντας $c=1$, έχουμε $\vec{u}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$.

Για $\boxed{\lambda_2=0}$ ομοίως εργαζόμενοι, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$

-//- $\boxed{\lambda_3=1}$ -//- -//- , -//- -//- -//- $\vec{u}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$Y=c_1\vec{u}_1e^{\lambda_1 x}+c_2\vec{u}_2e^{\lambda_2 x}+c_3\vec{u}_3e^{\lambda_3 x}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}e^{-x}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}e^{x}\Rightarrow\begin{cases}y_1=c_2+2c_3e^{x}\\y_2=c_1e^{-x}+c_2+c_3e^{x}\\y_3=2c_1e^{-x}+3c_2+2c_3e^{x}\end{cases},\quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$$

$\square$

<u>Παραδ.</u> Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$y_1' = 3y_1 + 2y_2$$
$$y_2' = -y_1$$
$$y_3' = y_3$$

<u>Απ</u>. Από τη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A

$$|A-\lambda \mathbb{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-\lambda)+2\right]=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\cdot(-3\lambda+\lambda^2+2)=0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0 \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)=0.$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2}=1 \ (\text{διπλή}), \quad \lambda_3 = 2 \ (\text{απλή}).$$

Για $\boxed{\lambda_1=1}$ έχουμε $(A-\lambda_1 I)\vec{u}_1=\vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+2y=0 \\ -x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ -x \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Θέτοντας $c_1=1$ και $c_2=0$ βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

 -//- $c_1=0$ και $c_2=1$ -//- -//- -//- $\vec{u}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

τα οποία είναι προφανές ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(αφού $\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(0,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1,-\lambda_1,\lambda_2)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$).

Για $\boxed{\lambda_3 = 2}$ έχουμε

$$(A-\lambda_3 I)\vec{u}_3=\vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_3 = c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c\in\mathbb{R}$$

Θέτοντας $c=1$ προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Άρα η ζητούμενη γενική λύση του συστήματος είναι

$$Y = c_1\vec{u}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\vec{u}_2 e^{\lambda_2 x} + c_3\vec{u}_3 e^{\lambda_3 x} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{x} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} xe^{x} + c_3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2x} \Rightarrow$$

$$Y = \begin{bmatrix} c_1 e^{x} - 2c_3 e^{2x} \\ -c_1 e^{x} + c_3 e^{2x} \\ c_2 x e^{x} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{x} - 2c_3 e^{2x} \\ y_2(x) = -c_1 e^{x} + c_3 e^{2x} \\ y_3(x) = c_2 x e^{x} \end{cases}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Παραδ. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -y_1$$

Απ. Από τη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = i \,,\ \lambda_2 = -i .$$

Λύνουμε το σύστημα

$$(A-\lambda I)\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -ix+y=0 \\ -x-iy=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -ix+y=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}=\begin{bmatrix} c \\ ci \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}=c\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Θέτοντας $c=1$, προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Άρα η ζητούμενη γενική λύση του συστήματος είναι

$$Y=\vec{u}e^{(k+mi)x} \Rightarrow Y=\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}e^{ix}=\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}(\cos x+i\sin x)$$

$$=\begin{bmatrix} \cos x+i\sin x \\ i\cos x-\sin x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}.$$ Οπότε

$$Y=c_1\begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2\in\mathbb{R}.$$

$\square$

Παραδ. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$y_1' = y_1 + 2y_2 - y_3 + e^{2x}$$
$$y_2' = y_1 - y_2$$
$$y_3' = 2y_1 - 2y_2 + 3e^{2x}$$

Απ. Σε προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος ΔΕ

$$Y_{ομ} = \begin{bmatrix} c_2 + 2c_3 e^{x} \\ c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^{x} \\ 2c_1 e^{-x} + 3c_2 + 2c_3 e^{x} \end{bmatrix}$$

Λόγω της μορφής του διανύσματος (πίνακα-στήλη) $B = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ 3e^{2x} \end{bmatrix}$ και επειδή το $k=2$ δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, Δοκιμάζουμε ως μερική λύση την

$$Y_\mu = \begin{bmatrix} \alpha e^{2x} \\ \beta e^{2x} \\ \gamma e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} e^{2x}. \quad \text{Τότε} \quad Y_\mu' = \begin{bmatrix} 2\alpha e^{2x} \\ 2\beta e^{2x} \\ 2\gamma e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{bmatrix} e^{2x}.$$

Αντικαθιστώντας στο σύστημα ΔΕ τη μερική λύση Y_μ, προκύπτει

$$Y_\mu' = AY_\mu + B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{bmatrix} e^{2x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} e^{2x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2x} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{bmatrix} e^{2x} = \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta - \gamma + 1 \\ \alpha - \beta \\ 2\alpha - 2\beta \quad + 3 \end{bmatrix} e^{2x}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha &= \alpha + 2\beta - \gamma + 1 \\ 2\beta &= \alpha - \beta \\ 2\gamma &= 2\alpha - 2\beta \quad + 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1 \\ -\alpha + 3\beta \quad &= 0 \\ -2\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}, \ \beta = -\frac{1}{6}, \ \gamma = \frac{7}{6}.$$

Άρα η ζητούμενη λύση του συστήματος ΔΕ είναι

$$Y = Y_{o\mu} + Y_\mu = \begin{bmatrix} c_2 + 2c_3 e^{x} \\ c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^{x} \\ 2c_1 e^{-x} + 3c_2 + 2c_3 e^{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix} e^{2x} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = c_2 + 2c_3 e^{x} - \frac{1}{2} e^{2x} \\ y_2(x) = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^{x} - \frac{1}{6} e^{2x} \\ y_3(x) = 2c_1 e^{-x} + 3c_2 + 2c_3 e^{x} + \frac{7}{6} e^{2x} \end{cases}$$

$\square$

Παραδ. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$y_1' = 3y_1 + 2y_2 - x + 1$$
$$y_2' = -y_1$$
$$y_3' = y_3 + 1$$

Απ. Σε προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος ΔΕ είναι

$$Y_{ομ.} = \begin{bmatrix} c_1 e^{x} - 2c_3 e^{2x} \\ -c_1 e^{-x} + c_3 e^{2x} \\ c_2 x e^{x} \end{bmatrix}.$$

Λόγω της μορφής του διανύσματος $B = \begin{bmatrix} -x+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0}$ και επειδή το $k=0$ δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, δοκιμάζουμε ως μερική λύση την

$$Y_{\mu} = \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 \\ a_2 x + b_2 \\ a_3 x + b_3 \end{bmatrix}. \quad \text{Τότε} \quad Y_{\mu}' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας τη μερική λύση στο σύστημα ΔΕ, προκύπτει

$$Y_\mu' = AY_\mu + B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 \\ a_2 x + b_2 \\ a_3 x + b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_1 x + 3b_1 + 2a_2 x + 2b_2 + 1 - x \\ -a_1 x - b_1 \\ a_3 x + b_3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = (3a_1 + 2a_2 - 1)x + 3b_1 + 2b_2 + 1 \\ a_2 = -a_1 x - b_1 \\ a_3 = a_3 x + b_3 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = 3a_1 + 2a_2 - 1 \\ a_1 = 3b_1 + 2b_2 + 1 \\ 0 = -a_1 \\ a_2 = -b_1 \\ 0 = a_3 \\ a_3 = b_3 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a_1 + 2a_2 = 1 \\ a_1 + b_1 + 2b_2 = -1 \\ -a_1 = 0 \\ a_2 + b_1 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_3 - b_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = 0, \quad b_3 = -1.$$

Συνεπώς $Y_\mu = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ -1 \end{bmatrix}$. Άρα $Y = Y_{o\mu} + Y_\mu = \begin{bmatrix} c_1 e^x - 2c_3 e^{2x} - \frac{1}{2} \\ -c_1 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ c_2 e^x - 1 \end{bmatrix}$ δηλ. $\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^x - 2c_3 e^{2x} - \frac{1}{2} \\ y_2(x) = -c_1 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ y_3(x) = c_2 e^x - 1. \end{cases}$

$\square$