

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Ομογενής ΔΕ: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ και $f(ax, ay) = f(x, y)$ ή $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Θέτουμε $z = \frac{y}{x}$

Αν $\frac{dy}{dx} = f(ax + \beta y + \gamma)$ θέτουμε $z = ax + \beta y + \gamma$.

Αν $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + \beta_1y + \gamma_1}{a_2x + \beta_2y + \gamma_2}\right) = f\left(\frac{ax + \beta y + \gamma_1}{\lambda(ax + \beta y) + \gamma_2}\right)$ $u = ax + \beta y$.

Αν $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ τότε $y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right]$.

Αν $y' + g(x)y = f(x)y^n \Rightarrow y'y^{-n} + g(x)y^{1-n} = f(x)$ θέτουμε $u = y^{1-n} \Rightarrow u' = (1-n)y^{-n}y'$

Αν $y' + f(x)y^2 + g(x)y + h(x) = 0$ και $y_1 = y_1(x)$ θέτουμε $y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u'$.

Αν $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ και $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ τότε $\int_a^x P(t, y)dt + \int Q(c, y)dy = 0$

ή $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Αν $Pdx + Qdy = 0$ και $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x)$ τότε $R(x) = e^{\int F(x)dx}$ και $RPdx + RQdy = 0$.

Αν $Pdx + Qdy = 0$ και $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F(y)$ τότε $R(y) = e^{\int F(y)dy}$ και $RPdx + RQdy = 0$.

Αν $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$ τότε $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$.

Αν $a_ny^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$ τότε $a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \dots + a_1\omega + a_0 = 0$ και

(i) $\omega_1 \neq \omega_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = c_1e^{\omega_1x} + c_2e^{\omega_2x}$

(ii) $\omega_1 = \omega_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = c_1e^{\omega_1x} + c_2xe^{\omega_1x}$

(iii) $\omega_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C} \Rightarrow y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Αν $a_ny^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$ τότε $y(x) = y_{\text{om}}(x) + y_{\mu}(x)$.

Αν $f(x) = P_n(x)e^{kx}$ τότε $y_{\mu}(x) = Q_n(x)e^{kx}$ ή $y_{\mu}(x) = x^{\rho}Q_n(x)e^{kx}$.

Αν $f(x) = e^{kx}(P_{n_1}(x)\cos mx + P_{n_2}(x)\sin mx)$ τότε $n = \max\{n_1, n_2\}$ και

$y_{\mu}(x) = e^{kx}(Q_n(x)\cos mx + R_n(x)\sin mx)$ ή $y_{\mu}(x) = x^{\rho}e^{kx}(Q_n(x)\cos mx + R_n(x)\sin mx)$.

Αν $y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$ τότε $y_\mu(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ όπου

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x) \end{cases}$$

$$W(Y_1, \dots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ανν } Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix} \text{ γραμμικώς ανεξ.}$$

Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A.

Αν ο A έχει απλές ιδιοτιμές λ_i , $i = 1, \dots, n$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_i$, $i = 1, \dots, n$, τότε $Y(x) = c_1 \vec{u}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \vec{u}_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \vec{u}_n e^{\lambda_n x}$.

Αν ο A έχει μία διπλή ιδιοτιμή λ_i , $i = 1, \dots, n$ και σε αυτήν αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_i$, $i = 1, 2$, τότε προκύπτουν οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $Y_{i1}(x) = \vec{u}_{i1} e^{\lambda_i x}$ και $Y_{i2}(x) = \vec{u}_{i2} x e^{\lambda_i x}$.

Αν ο A έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_i = k \pm mi$, τότε σε αυτές αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $Y_{i1}(x) = \vec{u}_i e^{kx} \cos mx$, $Y_{i2}(x) = \vec{u}_i e^{kx} \sin mx$

$$\text{Αν } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} e^{kx} \text{ και το } k \text{ δεν είναι ιδιοτιμή του } A, \text{ τότε } Y_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} e^{kx}.$$

$$\text{Αν } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} e^{kx} \text{ και το } k \text{ είναι ιδιοτιμή του } A \text{ (πολλαπλότητας } q), \text{ τότε } Y_\mu = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \\ \vdots \\ R_n(x) \end{pmatrix} e^{kx}.$$

Έστω $P_i(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ v .

$$\text{Αν } B = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} e^{kx} \text{ και το } k \text{ δεν είναι ιδιοτιμή του } A, \text{ τότε } Y_\mu = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \\ \vdots \\ R_n(x) \end{pmatrix} e^{kx},$$

όπου $R_i(x)$ πολυώνυμο βαθμού v .

$$\text{Αν } B = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} e^{kx} \text{ και το } k \text{ είναι ιδιοτιμή του } A \text{ (πολλαπλ/τας } q), \text{ τότε } Y_\mu = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \\ \vdots \\ R_n(x) \end{pmatrix} e^{kx},$$

όπου $R_i(x)$ πολυώνυμο βαθμού $v+q$.